古典微分几何习题整理与解答

Classical Differential Geometry: Exercises and Solutions

容与

古典微分几何系列讲义

2026.9.19

Contents

1 第一周作业 **2**

1.1 第 4 题: 非弧长参数下的曲率与挠率 2

1.2 第 5 题: 平面曲线投影的长度公式 4

1.3 第 9 题: 比较原理 5

1.4 第 13 题: 内切圆 6

1.5 第 16 题: 球面挠曲线的曲率与挠率关系 9

1.6 第 17 题: 空间挠曲线的球面判别 11

1

第一周作业

1.1 第 4 题: 非弧长参数下的曲率与挠率

题目

设 $\alpha(t)$ 是一条正则参数空间曲线, t 不一定是弧长参数. 记

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \alpha', \qquad \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = \alpha''.$$

证明:

$$\kappa(t) = \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^3}, \qquad \tau(t) = -\frac{(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha'''}{|\alpha' \wedge \alpha''|^2}.$$

解答

记

$$v = |\alpha'| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \qquad T = \frac{\alpha'}{|\alpha'|},$$

则

$$\alpha' = vT.$$

求导得

$$\alpha'' = v'T + vT'.$$

因此

$$\alpha' \times \alpha'' = vT \times (v'T + vT') = v^2 T \times T'.$$

由 $T \cdot T = 1$ 得 $T \perp T'$, 于是

$$|\alpha' \times \alpha''| = v^2 |T'|.$$

又

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{|T'|}{v},$$

所以

$$|T'| = v\kappa.$$

故

$$|\alpha' \times \alpha''| = v^3 \kappa,$$

从而

$$\boxed{\kappa(t)=\frac{|\alpha'\times\alpha''|}{|\alpha'|^3}}.$$

下面计算挠率. 由

$$T'=v\kappa N$$

得

$$N=\frac{T'}{v\kappa},\qquad B=T\times N=\frac{T\times T'}{v\kappa}.$$

求导:

$$B'=\frac{T\times T''}{v\kappa}-\frac{(v\kappa)'}{(v\kappa)^2}(T\times T'),$$

因为 $T'\times T'=0$.
按题目的符号约定,

$$\tau=\frac{1}{v}\,B'\cdot N.$$

代入 $N=T'/(v\kappa)$, 并利用

$$(T\times T')\cdot T'=0,$$

得

$$\tau=\frac{(T\times T'')\cdot T'}{v^3\kappa^2}=-\frac{(T\times T')\cdot T''}{v^3\kappa^2}.$$

另一方面,

$$\alpha''=v'T+vT',$$

$$\alpha'''=v''T+2v'T'+vT'',$$

所以

$$(\alpha'\times\alpha'')\cdot\alpha'''=v^3(T\times T')\cdot T''.$$

同时

$$|\alpha'\times\alpha''|^2=v^4|T\times T'|^2=v^4|T'|^2=v^6\kappa^2.$$

因此

$$\boxed{\tau(t)=-\frac{(\alpha'\times\alpha'')\cdot\alpha'''}{|\alpha'\times\alpha''|^2}}.$$

1.2 第 5 题: 平面曲线投影的长度公式

题目

设 $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ 为一平面曲线, 对于单位方向 u, $\alpha_u = (\alpha \cdot u)u$ 为 α 到 u 方向过原点直线的投影. 证明:

$$\operatorname{length}(\alpha) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{S}^1} \operatorname{length}(\alpha_u)\,\mathrm{d}u.$$

解答

对任意固定的单位向量 $u \in \mathbb{S}^1$, 投影曲线为

$$\alpha_u(t) = (\alpha(t)\cdot u)u.$$

对 t 求导, 得到

$$\alpha_u'(t) = (\alpha'(t)\cdot u)u.$$

由于 u 是单位向量, 即 $\|u\| = 1$, 所以

$$\|\alpha_u'(t)\| = |\alpha'(t)\cdot u|.$$

因此投影曲线 α_u 的长度为

$$\operatorname{length}(\alpha_u) = \int_a^b |\alpha'(t)\cdot u|\,\mathrm{d}t.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^1} \operatorname{length}(\alpha_u)\,\mathrm{d}u &= \int_{\mathbb{S}^1}\int_a^b |\alpha'(t)\cdot u|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \\ &= \int_a^b \int_{\mathbb{S}^1} |\alpha'(t)\cdot u|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

下面计算内层积分. 固定 t, 设 θ 为向量 $\alpha'(t)$ 与单位向量 u 的夹角. 由内积的几何定义,

$$\alpha'(t)\cdot u = \|\alpha'(t)\|\,\|u\|\cos\theta.$$

又因为 $\|u\| = 1$, 所以

$$|\alpha'(t)\cdot u| = \|\alpha'(t)\|\,|\cos\theta|.$$

当 u 沿单位圆 $\mathbb{S}^1$ 绕行一周时, 夹角 θ 也遍历一个完整的 2π 周期. 单位圆上的弧长元满足

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}\theta.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^1} |\alpha'(t)\cdot u|\,\mathrm{d}u &= \|\alpha'(t)\|\int_0^{2\pi}|\cos\theta|\,\mathrm{d}\theta\\ &= 4\|\alpha'(t)\|.\end{aligned}$$

代回原积分, 得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^1}\mathrm{length}(\alpha_u)\,\mathrm{d}u &= \int_a^b 4\|\alpha'(t)\|\,\mathrm{d}t\\ &= 4\int_a^b\|\alpha'(t)\|\,\mathrm{d}t\\ &= 4\,\mathrm{length}(\alpha).\end{aligned}$$

因此

$$\boxed{\mathrm{length}(\alpha)=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{S}^1}\mathrm{length}(\alpha_u)\,\mathrm{d}u}.$$

1.3 第 9 题: 比较原理

题目 (1)

证明: 函数图像 $y=f(x)$ 的带符号曲率为 (定向为 x 从小到大)

$$\kappa(x)=\frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}.$$

解答

参数化为

$$\alpha(x)=(x,f(x)).$$

则

$$\alpha'=(1,f'),\qquad \alpha''=(0,f'').$$

平面曲线的带符号曲率为

$$\kappa=\frac{\det(\alpha',\alpha'')}{|\alpha'|^3}.$$

而

$$\det(\alpha',\alpha'')=f'',\qquad |\alpha'|=\sqrt{1+f'^2}.$$

故

$$\boxed{\kappa(x)=\frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}}.$$

题目 (2)

设

$$f, g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$$

为两个光滑函数, 满足

$$f(x) \geq g(x), \qquad f(0) = g(0).$$

证明:

$$\kappa_f(0) \geq \kappa_g(0).$$

解答

令

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

则

$$h(x) \geq 0, \qquad h(0) = 0,$$

故 $x = 0$ 是 h 的局部极小点. 因此

$$h'(0) = 0, \qquad h''(0) \geq 0.$$

即

$$f'(0) = g'(0), \qquad f''(0) \geq g''(0).$$

由 (1),

$$\kappa_f(0) = \frac{f''(0)}{(1 + f'(0)^2)^{3/2}}, \qquad \kappa_g(0) = \frac{g''(0)}{(1 + g'(0)^2)^{3/2}}.$$

由于两者分母相同且为正, 而

$$f''(0) \geq g''(0),$$

所以

$$\boxed{\kappa_f(0) \geq \kappa_g(0)}.$$

1.4 第 13 题: 内切圆

题目

通过曲率计算说明曲线

$$y = \frac{1}{3}x^2$$

在 $(0, 0)$ 的一个邻域内完全落在圆周

$$(y - 1)^2 + x^2 = 1$$

的外侧.
是否可以找到半径更大的圆, 使其在 $(0,0)$ 处与

$$y=\frac{1}{3}x^2$$

相切, 并且该曲线在 $(0,0)$ 的一个邻域内仍位于该圆的外侧?

解答

设

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2.$$

则

$$f'(0)=0,\qquad f''(0)=\frac{2}{3},$$

因此

$$\kappa_f(0)=\frac{2/3}{(1+0)^{3/2}}=\frac{2}{3}.$$

圆

$$x^2+(y-1)^2=1$$

的半径为 1, 故曲率为

$$\kappa_C=1>\frac{2}{3}.$$

圆的下半支

$$g(x)=1-\sqrt{1-x^2}$$

与抛物线在原点相切, 且

$$g(0)=f(0),\qquad g'(0)=f'(0)=0.$$

由

$$\kappa_g(0)>\kappa_f(0)$$

可得

$$g''(0)>f''(0).$$

于是对充分小的 $x\neq 0$,

$$g(x)>f(x).$$

故抛物线在原点邻域内位于该圆的外侧.
再设半径为 R 的圆在原点与抛物线相切, 则圆心在 y 轴上, 可写为

$$x^2+(y-R)^2=R^2.$$

其曲率为

$$\kappa_R = \frac{1}{R}.$$

若

$$1 < R < \frac{3}{2},$$

则

$$\frac{1}{R} > \frac{2}{3} = \kappa_f(0),$$

故同理抛物线在原点邻域内仍位于圆外.

当

$$R = \frac{3}{2}$$

时, 两者曲率相等. 此时直接代入验证:

$$x^2 + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{9}x^4.$$

所以当 $x \neq 0$ 时,

$$x^2 + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 > \frac{9}{4},$$

故抛物线仍在圆外.

若

$$R > \frac{3}{2},$$

则

$$\frac{1}{R} < \frac{2}{3},$$

局部位置关系反转, 不再满足条件.

因此所有

$$\boxed{1 < R \leq \frac{3}{2}}$$

的圆都符合要求, 其中最大半径为

$$\boxed{R_{\max} = \frac{3}{2}}.$$

1.5 第 16 题: 球面挠曲线的曲率与挠率关系

题目

曲率和挠率均不为零的曲线称为挠曲线. 证明: 如果该曲线落在一个球面上, 其曲率和挠率满足

$$\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)^2+\left[\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right]^2=\text{常数}.$$

解答

设空间挠曲线为弧长参数化曲线

$$c=c(s),$$

其 Frenet 标架为 T,N,B, 曲率和挠率分别为 $\kappa(s)$ 与 $\tau(s)$. 由于是挠曲线,

$$\kappa(s)\neq 0,\qquad \tau(s)\neq 0.$$

设该曲线落在以固定点 p 为球心, 半径为 R 的球面上, 则

$$|p-c(s)|^2=R^2.$$

对 s 求导:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|p-c|^2=-2\langle p-c,c'\rangle=0.$$

由于 $c'=T$, 所以

$$\langle p-c,T\rangle=0.$$

因此向量 $p-c$ 没有 T 方向的分量, 可写成

$$p-c=\alpha(s)N+\beta(s)B.$$

对上式关于 s 求导. 由于 p 为固定点,

$$(p-c)'=-T.$$

另一方面, 利用 Frenet 公式

$$T'=\kappa N,\qquad N'=-\kappa T+\tau B,\qquad B'=-\tau N,$$

有

$$\begin{aligned}-T &= (\alpha N + \beta B)' \\ &= \alpha' N + \alpha N' + \beta' B + \beta B' \\ &= \alpha' N + \alpha(-\kappa T + \tau B) + \beta' B - \beta\tau N \\ &= -\kappa\alpha T + (\alpha' - \tau\beta)N + (\tau\alpha + \beta')B.\end{aligned}$$

比较 T, N, B 三个方向的系数, 得到

$$\begin{cases}-\kappa\alpha = -1, \\ \alpha' - \tau\beta = 0, \\ \tau\alpha + \beta' = 0.\end{cases}$$

由第一式,

$$\alpha = \frac{1}{\kappa}.$$

再由第二式,

$$\beta = \frac{\alpha'}{\tau} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'.$$

因此

$$p - c = \frac{1}{\kappa}N + \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)' B.$$

由于 N, B 是单位正交向量,

$$|p - c|^2 = \left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right]^2.$$

而曲线位于半径为 R 的固定球面上, 所以

$$|p - c|^2 = R^2.$$

故

$$\boxed{\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)^2 + \left[\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right]^2 = R^2 = \text{常数}.}$$

证毕.

1.6 第 17 题: 空间挠曲线的球面判别

题目

若空间挠曲线满足

$$\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)^2+\left[\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right]^2=\text{常数},$$

证明: 该曲线或其曲率为常数, 或该曲线是球面上的一条曲线.

解答

设曲线为弧长参数化的空间挠曲线

$$c=c(s),$$

其 Frenet 标架为 T,N,B. 由于是空间挠曲线, 有

$$\kappa(s)\neq 0,\qquad \tau(s)\neq 0.$$

为简化记号, 令

$$u(s)=\frac{1}{\kappa(s)},\qquad v(s)=\frac{1}{\tau(s)}u'(s).$$

于是题设条件写成

$$u^2+v^2=R^2,$$

其中 R 为常数. 另一方面, 由 v 的定义,

$$u'=\tau v.$$

对

$$u^2+v^2=R^2$$

关于 s 求导, 得

$$2uu'+2vv'=0.$$

代入 $u'=\tau v$, 得到

$$2u\tau v+2vv'=0,$$

即

$$2v(u\tau+v')=0.$$

因此

$$\boxed{v(u\tau+v')=0.}$$

下面分情况讨论.

情形一： $v \equiv 0$. 由

$$v = \frac{1}{\tau}u'$$

以及 $\tau \neq 0$, 可得

$$u' = 0.$$

因此

$$u = \frac{1}{\kappa}$$

为常数, 从而

$$\boxed{\kappa = \text{常数}.}$$

这就是题目中的第一种情况.
情形二： $v \neq 0$. 在所有满足 $v(s) \neq 0$ 的点上, 由

$$v(u\tau + v') = 0$$

可得

$$u\tau + v' = 0.$$

事实上, 该等式可由连续性延拓到整个参数区间.
若 v 在某个非空开区间上恒为零, 则该区间上 $u' = 0$. 若 v 又在别处不恒为零, 在零区间的边界点处, 由 $v \equiv 0$ 一侧可得 $v' = 0$; 而从 $v \neq 0$ 的一侧有

$$v' = -u\tau.$$

由于 $u = 1/\kappa \neq 0$, $\tau \neq 0$, 故 $-u\tau \neq 0$, 与 v' 的连续性矛盾. 因此, 当 $v \neq 0$ 时, $v \neq 0$ 的点在参数区间中稠密, 于是由连续性可得

$$\boxed{u\tau + v' = 0}$$

在整个参数区间上成立.
现在构造向量

$$p(s) = c(s) + u(s)N(s) + v(s)B(s).$$

利用 Frenet 公式

$$T' = \kappa N, \qquad N' = -\kappa T + \tau B, \qquad B' = -\tau N,$$

有

$$\begin{aligned} p' &= c' + u'N + uN' + v'B + vB' \\ &= T + u'N + u(-\kappa T + \tau B) + v'B - v\tau N \\ &= (1 - u\kappa)T + (u' - v\tau)N + (u\tau + v')B. \end{aligned}$$

而

$$u=\frac{1}{\kappa},\qquad u'=\tau v,\qquad u\tau+v'=0,$$

所以三个系数全部为零:

$$p'(s)=0.$$

因此 $p(s)$ 是一个固定向量, 记作 p.
又因为

$$p-c=uN+vB,$$

且 N,B 为单位正交向量, 所以

$$\begin{aligned}|p-c|^2&=u^2+v^2\\&=R^2.\end{aligned}$$

即

$$|c(s)-p|=R.$$

因此曲线上每一点到固定点 p 的距离均为常数 R, 故曲线落在以 p 为球心, R 为半径的球面上.
于是

$$\boxed{\text{该曲线是球面上的一条曲线.}}$$

综上,

$$\boxed{\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\kappa}\right)'\right]^2=\text{常数}\quad\Longrightarrow\quad\kappa=\text{常数 或 }c(s)\text{ 为球面曲线.}}$$