群表示论习题整理与解答

Group Representation Theory: Exercises and Solutions

丘维声《群表示论》习题: 线性表示, 不可约表示, 群表示的结构

容与

群表示论系列讲义

2026.9.9

Contents

1 群表示论的基本概念 7

1.1 同态映射 7

1.1.1 指数同态的核与像 7

1.1.2 模长归一化映射的核与像 8

1.1.3 行列式同态与特殊线性群 10

1.2 群的线性表示的定义和例 11

1.2.1 实数加法群的 2 次实表示 11

1.2.2 实数加法群的 n 次实矩阵表示 11

1.2.3 实数加法群的无限维实表示 13

1.2.4 例题与已求表示的忠实性 14

1.2.5 整数加法群的 1 次复表示及忠实性 16

1.3 群的线性表示的结构 18

1.3.1 置换表示的不变子空间与直和分解 18

1.3.2 对称群 3 元置换的 2 次复表示 19

1.3.3 一般线性群在矩阵空间上的共轭表示 20

1.3.4 正交群共轭表示的对称与反对称分解 20

1.3.5 一般线性群的自然忠实不可约表示 21

1.3.6 矩阵空间左乘表示的列分解 21

1.3.7 2 阶零迹矩阵空间上的共轭表示不可约 22

1.3.8 对称群标准置换分量的不可约性 23

1.4 Abel 群的不可约表示 23

1.4.1 有限 Abel 群的所有 1 次复表示 23

1.4.2 初等 Abel 群非平凡 1 次表示的核 24

1.4.3 忠实 1 次表示推出有限 Abel 群循环 24

1.5 非 Abel 群的不可约表示的一些构造方法 24

1.5.1 对称群的所有 1 次复表示 25

1.5.2 交错群 4 元置换的所有 1 次复表示 25
1.5.3 由 4 元对称群商群构造 2 次不可约表示 26
1.5.4 由行列式构造一般线性群的 1 次表示 27
1.5.5 1 次复表示的商群为循环群 27
1.5.6 非循环有限群没有忠实 1 次复表示 27
1.5.7 有限非 Abel 群的忠实 2 次表示不可约 28
1.5.8 直和表示的对偶与对偶表示直和 28

2 群代数 29

2.1 代数的中心与群代数的中心 29
2.2 有限维半单代数的不可约左模 31
2.2.1 四阶循环群的正则表示 31
2.2.2 子模和为直和的判定 32
2.2.3 直和分解与商模同构 32
2.2.4 有限直和分解的商模 32
2.3 有限维半单代数的不同构的不可约左模的个数 33
2.3.1 除环上的矩阵环的单性 33
2.3.2 右线性空间的线性变换环 33
2.4 有限维单代数的结构，代数闭域上有限维半单代数的不可约左模的维数 . 35
2.4.1 不可约矩阵表示的交织矩阵 35
2.4.2 Schur 引理 36
2.4.3 有限群表示的平均算子 36
2.4.4 交换不可约表示的矩阵 37
2.5 有限群的不可约表示的个数和次数 37
2.5.1 二面体群的不可约复表示 37
2.5.2 四元数群的不可约复表示 39
2.5.3 交错群的不可约复表示 40
2.5.4 Abel 子群与表示次数 41

3 群的特征标 42

3.1 群的特征标的定义和基本性质 42

3.1.1 不可约表示核的交 42

3.1.2 特征标的核 43

3.1.3 特征标中心的性质 44

3.1.4 不可约特征标中心与群中心 45

3.2 不可约特征标的正交关系及其应用 46

3.2.1 四个有限群的复特征标表 47

3.2.2 中心本原幂等元与类和 49

3.2.3 循环群上的傅里叶展开 50

3.2.4 有限 Abel 群的傅里叶变换 50

3.2.5 对称群的三次不可约特征标 51

3.2.6 交错群的四次不可约特征标 51

3.3 不可约复表示的次数满足的条件 52

3.3.1 极小多项式与理想 52

3.3.2 代数整数的极小多项式 53

3.4 不可约表示在群论中的应用 53

3.4.1 二阶不可约表示与有限单群 53

3.4.2 非 Abel 单群的二次表示 55

4 群的表示的张量积，群的直积的表示 55

4.1 模的张量积 55

4.1.1 有理数与二阶循环群的张量积 55

4.1.2 双模与环的张量积 56

4.1.3 线性变换的张量积运算 56

4.1.4 标量扩张 56

4.2 群的表示的张量积 57

4.2.1 一维表示与不可约表示的张量积 57

4.2.2 共轭类大小的公式 58

4.2.3 由两个特征标构造表示表 58

4.3 群的直积的表示 . . . 61
4.3.1 初等 Abel 群的特征标表 . . . 61
4.3.2 十五阶群的特征标表 . . . 61
4.4 不可约复表示的次数满足的又一条件 . . . 62
4.4.1 特征标中心的次数条件 . . . 62

5 诱导表示和诱导特征标 64

5.1 诱导表示 . . . 64
5.1.1 诱导模的陪集分块 . . . 64
5.1.2 诱导模上的子群作用 . . . 64
5.1.3 陪集空间的置换表示 . . . 65
5.2 诱导特征标 . . . 66
5.2.1 四元数群的诱导特征标 . . . 66
5.2.2 交错群的三次不可约表示 . . . 67
5.3 Frobenius 互反律 . . . 68
5.3.1 Abel 群中特征标次数的整除性 . . . 68
5.3.2 对称群 S_4 的特征标表 . . . 69
5.3.3 诱导特征标在共轭类上的计算 . . . 71
5.3.4 交错群 A_5 的特征标表 . . . 72
5.4 诱导特征标不可约的判定 . . . 74
5.4.1 双陪集与主特征标内积 . . . 74
5.4.2 双边陪集与轨道数 . . . 75
5.4.3 两个传递作用的轨道对偶 . . . 76
5.4.4 稳定子群轨道数 . . . 77
5.4.5 不动点平方和公式 . . . 77
5.4.6 一般线性群的 Borel 子群 . . . 78
5.4.7 Brauer 的特征标表矩阵 . . . 80
5.4.8 正规子群的共轭类与特征标 . . . 81
5.4.9 固定点条件的等价性 . . . 82
5.4.10 Frobenius 群的诱导特征标 . . . 83

5.4.11 Clifford 定理 84
5.4.12 Blichfeldt 定理 86
5.4.13 Ito 定理 86
5.4.14 Abel 正规子群与表示次数 87

6 无限群的线性表示 88

6.1 拓扑群、紧群 88
6.1.1 平移与逆运算保持闭性 88
6.1.2 平移与逆运算保持开性 88
6.1.3 乘积集闭包的包含关系 89
6.1.4 闭包子群与正规子群 89
6.1.5 紧致离散群的有限性 89
6.1.6 离散子群的互不相交平移邻域 90
6.1.7 紧致集与离散子群的交有限 90
6.1.8 圆周群的离散子群 91
6.1.9 实数加群的离散子群 91
6.1.10 一般线性群不连通 92
6.1.11 正交群不连通 92
6.1.12 正交群的离散子群 92
6.1.13 开子群是闭子群 93
6.1.14 有限指数闭子群是开子群 94
6.1.15 含单位元邻域的子群 94
6.2 拓扑群的线性表示 94
6.2.1 一般线性群在矩阵空间上的共轭表示 94
6.2.2 子表示的连续性 95
6.3 紧群上的不变积分 95
6.3.1 紧群直积上的逐次积分 95
6.4 紧群的线性表示 95
6.4.1 实数加群的 1 次表示 96
6.4.2 实数加群与圆周群的表示 96

6.4.3 表示逆元与特征标的共轭 99
6.4.4 两个内积的比较变换 99
6.4.5 不可约表示上的不变内积 100
6.4.6 整数子群商群的不可约表示 101

1

群表示论的基本概念

1.1 同态映射

1.1.1 指数同态的核与像

习题 1.1 第 1 题

设f 是实数域的加法群$(\mathbb{R},+)$ 到非零复数乘法群$(\mathbb{C}^*,\cdot)$ 的一个映射:

$$f(x)=\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}x},\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

(1) 证明f 是一个同态; (2) 求$\operatorname{Ker} f$ 和$\operatorname{Im} f$; (3) 用C 表示复平面上的单位圆, 它对于复数乘法成为一个群. 证明: $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong C$.

解答

解题思路: 直接验证f 保持加法运算. 求核归结为解方程$\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}x}=1$, 求像归结为确定指数函数在$\mathbb{R}$ 上的取值集合; 最后由群同态基本定理把商群$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 与像$\operatorname{Im} f$ 等同起来.

详细推导:

(1) 验证f 是同态. 对任意$x,y\in\mathbb{R}$,

$$f(x+y)=\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(x+y)}=\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}x}\cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}y}=f(x)\,f(y),$$

其中第二个等号用到指数运算律$\mathrm{e}^{a+b}=\mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{b}$. 又$f(0)=\mathrm{e}^{0}=1$, 故$f$ 把加法群$(\mathbb{R},+)$ 同态地映入乘法群$(\mathbb{C}^*,\cdot)$, 即为所求的同态.

(2) 求$\operatorname{Ker} f$ 和$\operatorname{Im} f$. 由核的定义,

$$\operatorname{Ker} f=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=1\}=\{x\in\mathbb{R}\mid \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}x}=1\}.$$

对任意实数t, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}=1$ 当且仅当$\cos t=1$ 且$\sin t=0$, 即$t=2k\pi$ 对某个$k\in\mathbb{Z}$ 成立. 于是

$$\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}x}=1 \iff 2\pi x=2k\pi \iff x=k,\quad k\in\mathbb{Z},$$

因此

$$\operatorname{Ker} f=\mathbb{Z}.$$

求像. 一方面, 对任意$x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| = |\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}| = 1,$$

故$\operatorname{Im} f \subseteq C$. 另一方面, 任意$z \in C$ 可写成$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$; 取$x = \theta/(2\pi) \in \mathbb{R}$, 则

$$f(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \cdot \theta/(2\pi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = z,$$

故$C \subseteq \operatorname{Im} f$. 两者结合得

$$\operatorname{Im} f = C,$$

即$\operatorname{Im} f$ 恰为复平面上的单位圆.

(3) 证明$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong C$. 先说明$C$ 确实是$\mathbb{C}^*$ 的子群: 单位复数之积仍为单位复数, 单位元$1 \in C$, 且$z^{-1} = \bar{z}$ 的模仍为1. 由 (1) 与 (2), f 是$\mathbb{R}$ 到$\mathbb{C}^*$ 的同态且$\operatorname{Ker} f = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Im} f = C$. 根据群同态基本定理, f 诱导出同构

$$\bar{f} : \mathbb{R}/\operatorname{Ker} f \longrightarrow \operatorname{Im} f, \qquad x + \mathbb{Z} \longmapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}.$$

代入$\operatorname{Ker} f = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Im} f = C$, 即得

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong C.$$

1.1.2 模长归一化映射的核与像

习题 1.1 第 2 题

设ψ 是乘法群$(\mathbb{C}^*, \cdot)$ 到自身的一个映射:

$$\psi(z) = \frac{z}{|z|}, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}^*.$$

(1) 证明ψ 是一个同态; (2) 求$\operatorname{Ker}\psi$ 和$\operatorname{Im}\psi$; (3) 证明: $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ \cong C$, 其中$\mathbb{R}^+$ 是正实数集, C 是复平面上的单位圆.

解答

解题思路： 直接验证ψ 保持乘法运算, 关键是用到模的乘性$|zw| = |z|\,|w|$. 求核即解方程$z/|z| = 1$, 求像则利用$|z/|z|| = 1$ 且单位圆上的点都是不动点; 最后用群同态基本定理.

详细推导：

(1) 验证ψ 是同态. 对任意$z, w \in \mathbb{C}^*$,

$$\psi(zw) = \frac{zw}{|zw|} = \frac{zw}{|z|\,|w|} = \frac{z}{|z|} \cdot \frac{w}{|w|} = \psi(z)\,\psi(w),$$

其中第二个等号用到复数模的乘性$|zw| = |z|\,|w|$. 又

$$\psi(1) = \frac{1}{|1|} = 1,$$

故ψ 是乘法群$\mathbb{C}^*$ 到自身的同态.

(2) 求$\operatorname{Ker}\psi$ **和**$\operatorname{Im}\psi$**.**

$$\operatorname{Ker}\psi = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \psi(z) = 1\} = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \;\middle|\; \frac{z}{|z|} = 1 \right\}.$$

方程$\frac{z}{|z|} = 1$ 等价于$z = |z|$. 由于$z \neq 0$, 右边$|z|$ 是正实数, 故z 必为正实数, 即$z \in \mathbb{R}^+$; 反之, 若$z \in \mathbb{R}^+$, 则$|z| = z$, 从而$\frac{z}{|z|} = 1$. 因此

$$\operatorname{Ker}\psi = \mathbb{R}^+.$$

求像. 对任意$z \in \mathbb{C}^*$,

$$|\psi(z)| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1,$$

故$\operatorname{Im}\psi \subseteq C$. 反之, 任意$z \in C$ 满足$|z| = 1$, 于是

$$\psi(z) = \frac{z}{|z|} = \frac{z}{1} = z,$$

即单位圆上的点在ψ 下保持不动, 故$C \subseteq \operatorname{Im}\psi$. 因此

$$\operatorname{Im}\psi = C.$$

(3) 证明$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ \cong C$**.** 由 (1) 与 (2), ψ 是同态且$\operatorname{Ker}\psi = \mathbb{R}^+$, $\operatorname{Im}\psi = C$. 根据群同态基本定理, ψ 诱导出同构

$$\bar{\psi} : \mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ \longrightarrow C, \qquad z\mathbb{R}^+ \longmapsto \frac{z}{|z|},$$

故

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ \cong C.$$

1.1.3 行列式同态与特殊线性群

习题 1.1 第 3 题

设F 是一个域, 单位元记作1. 用$\mathrm{SL}_n(F)$ 表示行列式为1 的所有n 阶矩阵组成的集合, 证明:

$$\mathrm{SL}_n(F) \triangleleft \mathrm{GL}_n(F), \qquad \text{且} \qquad \mathrm{GL}_n(F)/\mathrm{SL}_n(F) \cong F^*,$$

其中F^* 是F 的非零元组成的乘法群.

解答

解题思路： 行列式函数det 是$\mathrm{GL}_n(F)$ 到F^* 的同态, 且是满射, 所以$\mathrm{Im}(\det) = F^*$; 由$\mathrm{SL}_n(F)$ 的定义, $\mathrm{Ker}(\det) = \mathrm{SL}_n(F)$. 同态的核必是正规子群, 由此得到$\mathrm{SL}_n(F) \triangleleft \mathrm{GL}_n(F)$; 再用群同态基本定理.

详细推导：

第一步：行列式是满同态. 对任意$A, B \in \mathrm{GL}_n(F)$, 行列式的乘性给出

$$\det(AB) = \det(A)\,\det(B),$$

且$\det(I_n) = 1$, 故det 是$\mathrm{GL}_n(F)$ 到F^* 的群同态. 又对任意$a \in F^*$, 对角矩阵

$$\mathrm{diag}(a, 1, \ldots, 1) \in \mathrm{GL}_n(F), \qquad \det\Big(\mathrm{diag}(a, 1, \ldots, 1)\Big) = a,$$

故det 是满射, 即

$$\mathrm{Im}(\det) = F^*.$$

第二步：求核并证明正规性. 由$\mathrm{SL}_n(F)$ 的定义,

$$\mathrm{Ker}(\det) = \{A \in \mathrm{GL}_n(F) \mid \det(A) = 1\} = \mathrm{SL}_n(F).$$

同态的核必为正规子群: 对任意$A \in \mathrm{GL}_n(F)$, $X \in \mathrm{SL}_n(F)$,

$$\det\Big(AXA^{-1}\Big) = \det(A)\,\det(X)\,\det(A)^{-1} = 1,$$

故$AXA^{-1} \in \mathrm{SL}_n(F)$. 因此

$$\mathrm{SL}_n(F) \triangleleft \mathrm{GL}_n(F).$$

第三步：应用群同态基本定理. 由基本定理, det 诱导出同构

$$\mathrm{GL}_n(F)/\mathrm{Ker}(\det) \longrightarrow \mathrm{Im}(\det),$$

代入$\mathrm{Ker}(\det)=\mathrm{SL}_n(F)$, $\mathrm{Im}(\det)=F^*$, 得

$$\mathrm{GL}_n(F)/\mathrm{SL}_n(F)\cong F^*.$$

1.2 群的线性表示的定义和例

1.2.1 实数加法群的 2 次实表示

习题 1.2 第 1 题

求 $(\mathbb{R},+)$ 的一个 2 次实表示.

解答

解题思路：将实数加法群的每一个元素 t 对应为平面上的旋转，旋转角为 t（弧度）. 旋转的复合恰好对应实数的加法，由此得到群同态.

详细推导：用 V 表示平面上以定点 O 为起点的所有定位向量组成的 2 维实线性空间（即 $V\cong\mathbb{R}^2$）. 任给 $t\in\mathbb{R}$，令 σ_t 为平面上绕点 O 转角为 t 的旋转. σ_t 是 V 上的可逆线性变换，其逆变换为 σ_{-t}（反向旋转同一角度），故 $\sigma_t\in\mathrm{GL}(V)$.

在标准正交基下，旋转 σ_t 的矩阵为

$$\sigma_t \doteq \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

定义映射

$$\varphi:(\mathbb{R},+)\to\mathrm{GL}(V),\quad t\mapsto\sigma_t.$$

由于旋转的复合满足 $\sigma_t\circ\sigma_u=\sigma_{t+u}$（先转 u 再转 t 等价于一次转 $t+u$），我们有

$$\varphi(t+u)=\sigma_{t+u}=\sigma_t\sigma_u=\varphi(t)\,\varphi(u),$$

因此 φ 是 $(\mathbb{R},+)$ 的一个群同态，即为一个 2 次实表示.

结果： $\Phi(t)=\left(\begin{smallmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{smallmatrix}\right)$ 定义了 $(\mathbb{R},+)$ 的一个 2 次实表示. 这是课本例 3 的矩阵形式.

1.2.2 实数加法群的 n 次实矩阵表示

习题 1.2 第 2 题

求 $(\mathbb{R},+)$ 的一个 n 次实矩阵表示.

解答

解题思路：取 n 维实线性空间 $V=\mathbb{R}_n[x]$（次数 $<n$ 的实系数多项式全体），利用平移作用 $f(x)\mapsto f(x+a)$ 构造表示. 平移算子是线性且可逆的，且平移的复合对应加法.

详细推导：令 $V=\mathbb{R}_n[x]$ 为次数小于 n 的实系数多项式构成的 n 维线性空间. 任给 $a\in\mathbb{R}$，定义

$$T_a: V\to V,\quad T_a(f(x))=f(x+a).$$

首先验证 T_a 是线性变换：对任意 $f,g\in V$ 及 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，

$$T_a(\lambda f+\mu g)=(\lambda f+\mu g)(x+a)=\lambda f(x+a)+\mu g(x+a)=\lambda T_a(f)+\mu T_a(g).$$

其次，T_a 可逆：其逆变换为 T_{-a}（因为 $T_a(T_{-a}(f(x)))=T_a(f(x-a))=f((x-a)+a)=f(x)$），故 $T_a\in\mathrm{GL}(V)$.

定义 $\varphi(a)=T_a$. 验证同态性质：

$$\varphi(a+b)(f(x))=T_{a+b}(f(x))=f(x+a+b),$$

$$(\varphi(a)\circ\varphi(b))(f(x))=T_a(T_b(f(x)))=T_a(f(x+b))=f((x+b)+a)=f(x+b+a).$$

由于实数加法可交换，$f(x+a+b)=f(x+b+a)$，故 $\varphi(a+b)=\varphi(a)\varphi(b)$，$\varphi$ 是群同态.

矩阵形式：取 V 的基 $1,x,x^2,\dots,x^{n-1}$. 利用二项式展开计算 T_a 在此基下的矩阵 $\Phi(a)$：

$$\begin{aligned}
\varphi(a)1&=T_a(1)=1,\\
\varphi(a)x&=T_a(x)=x+a,\\
\varphi(a)x^2&=T_a(x^2)=(x+a)^2=x^2+2ax+a^2,\\
&\vdots\\
\varphi(a)x^{n-1}&=T_a(x^{n-1})=(x+a)^{n-1}\\
&=x^{n-1}+\mathrm{C}_{n-1}^{1}x^{n-2}a+\cdots+\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}xa^{n-2}+a^{n-1}.
\end{aligned}$$

因此矩阵表示为

$$\Phi(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1}\\ 0 & 1 & 2a & \cdots & \mathrm{C}_{n-1}^{n-2}a^{n-2}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \mathrm{C}_{n-1}^{n-3}a^{n-3}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathrm{C}_{n-1}^{n-4}a^{n-4}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathrm{C}_{n-1}^{1}a\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

其中第 (i,j) 元（$i,j=0,1,\dots,n-1$，对应基向量 x^i 和 x^j）为

$$\Phi(a)_{ij}=\begin{cases}\mathrm{C}_j^{j-i}\,a^{j-i}, & i\le j,\\ 0, & i>j.\end{cases}$$

该矩阵是上三角矩阵，对角线全为 1，因此 $\det\Phi(a)=1\neq 0$，与 $T_a\in\mathrm{GL}(V)$ 一致.
结果： $\varphi:(\mathbb{R},+)\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$，$\varphi(a)=\Phi(a)$ 是 $(\mathbb{R},+)$ 的一个 n 次实矩阵表示.

1.2.3 实数加法群的无限维实表示

习题 1.2 第 3 题

求 $(\mathbb{R},+)$ 的一个无限维实表示.

解答

解题思路：将第 2 题中的多项式空间从有限维推广到无限维，即取全体实系数多项式构成的空间 $V=\mathbb{R}[x]$. 平移算子在此无限维空间上同样定义了一个表示.
详细推导：取 $V=\mathbb{R}[x]$，即所有实系数多项式（不论次数）构成的无限维实线性空间. 任给 $a\in\mathbb{R}$，定义平移变换

$$T_a:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x],\quad T_a(f(x))=f(x+a).$$

与第 2 题完全相同：T_a 显然是线性变换；T_{-a} 是 T_a 的逆变换，故 $T_a\in\mathrm{GL}(\mathbb{R}[x])$. 令

$$\varphi:(\mathbb{R},+)\to\mathrm{GL}(\mathbb{R}[x]),\quad \varphi(a)=T_a.$$

同态性质验证同第 2 题：

$$\varphi(a+b)(f)=f(x+a+b)=T_a(f(x+b))=\varphi(a)\Big(\varphi(b)(f)\Big),$$

故 $\varphi(a+b)=\varphi(a)\varphi(b)$.
结果： $\varphi(a)(f(x))=f(x+a)$ 定义了 $(\mathbb{R},+)$ 的一个无限维实表示. 这是第 2 题有限维情形在次数无界时的自然推广——基 $\{1,x,x^2,\ldots\}$ 是无限集，$\varphi(a)$ 在该基下的矩阵是无限阶上三角矩阵.

1.2.4 例题与已求表示的忠实性

习题 1.2 第 4 题

在例 1 至例 4 以及上面第 1, 2, 3 题中，哪些表示是忠实的？

解答

解题思路： 一个表示 φ 忠实当且仅当 $\operatorname{Ker}\varphi=\{e\}$（对加法群即 $\operatorname{Ker}\varphi=\{0\}$）. 逐一计算每个表示的核即可.

课本例 1–例 4 回顾（§1.2 群的线性表示的定义和例）：
例 1（1 次实表示）：$f_a:(\mathbb{R},+)\to\mathbb{R}^*$，$f_a(x)=\mathrm{e}^{ax}$，其中 $a\in\mathbb{R}$ 为固定参数.
例 2（1 次复表示）：$f_a:(\mathbb{R},+)\to\mathbb{C}^*$，$f_a(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$，其中 $a\in\mathbb{C}$ 为固定参数.
例 3（2 次实表示）：$\varphi:(\mathbb{R},+)\to\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$，$\Phi(t)=\left(\begin{smallmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{smallmatrix}\right)$.
例 4（n 次实表示）：$\varphi:(\mathbb{R},+)\to\mathrm{GL}(\mathbb{R}_n[x])$，$\varphi(a)(f(x))=f(x+a)$.

（一）课本例 1的忠实性.
$f_a(x)=\mathrm{e}^{ax}$. 核为

$$\operatorname{Ker}(f_a)=\{x\in\mathbb{R}\mid \mathrm{e}^{ax}=1\}.$$

- 当 $a\neq 0$ 时：$\mathrm{e}^{ax}=1\iff ax=0\iff x=0$（因为指数函数 $\mathrm{e}^y=1$ 当且仅当 $y=0$）. 故 $\operatorname{Ker}(f_a)=\{0\}$，$f_a$ **是忠实的**.
- 当 $a=0$ 时：$f_0(x)=\mathrm{e}^{0\cdot x}=1$ 对一切 $x\in\mathbb{R}$ 成立. 故 $\operatorname{Ker}(f_0)=\mathbb{R}$，这是平凡表示，**不是忠实的**.

（二）课本例 2 的忠实性.
$f_a(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$，其中 $a\in\mathbb{C}$. 核为

$$\operatorname{Ker}(f_a)=\{x\in\mathbb{R}\mid \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}=1\}.$$

- 当 $a=0$ 时：$f_0(x)=1$，$\operatorname{Ker}(f_0)=\mathbb{R}$，**不是忠实的**.
- 当 $a\neq 0$ 时：将 a 写为实部和虚部 $a=a_1+\mathrm{i}a_2$（$a_1,a_2\in\mathbb{R}$ 且不全为零）. 则

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a_1+\mathrm{i}a_2)x}=\mathrm{e}^{-a_2x}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}a_1x}=\mathrm{e}^{-a_2x}\Big[\cos(a_1x)+\mathrm{i}\sin(a_1x)\Big].$$

于是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}=1$ 等价于模长为 1 且辐角为 $2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$：

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{-a_2x}=1,\\ a_1x=2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

由第一式 $\mathrm{e}^{-a_2x}=1\iff a_2x=0$.

- 若 $a_2\neq 0$（即 a 不是实数）：则 $a_2x=0\iff x=0$. 此时必有 $x=0$，故 $\mathrm{Ker}(f_a)=\{0\}$，f_a **是忠实的**.
- 若 $a_2=0$（即 $a=a_1\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$）：则 $\mathrm{e}^{-a_2x}=1$ 对任意 x 成立，仅需 $a_1x=2k\pi$. 故
$$\mathrm{Ker}(f_a)=\left\{\frac{2k\pi}{a_1}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\neq\{0\},$$
即核为非零离散子群，f_a **不是忠实的**. 几何上看，当 a 为非零实数时，$x\mapsto\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$ 将 $\mathbb{R}$ 映到单位圆 S^1，具有周期 $2\pi/|a|$，因此不是单射.

（三）课本例 3 的忠实性.

$\Phi(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$. 核为

$$\mathrm{Ker}(\varphi)=\{t\in\mathbb{R}\mid\Phi(t)=\mathrm{I}_2\}.$$

$\Phi(t)=\mathrm{I}_2$ 要求 $\cos t=1$ 且 $\sin t=0$，即

$$t=2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

故 $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}\neq\{0\}$，$\varphi$ **不是忠实的**. 旋转表示具有周期 2π，这不是单射.

（四）课本例 4 的忠实性.

$\varphi(a)(f(x))=f(x+a)$ 作用于 $\mathbb{R}_n[x]$. 核为

$$\mathrm{Ker}(\varphi)=\{a\in\mathbb{R}\mid T_a=\mathrm{id}\}.$$

$T_a=\mathrm{id}$ 意味着对一切 $f\in\mathbb{R}_n[x]$ 均有 $f(x+a)=f(x)$. 特别地，取 $f(x)=x$（它属于 $\mathbb{R}_n[x]$ 只要 $n\geq 2$），则

$$T_a(x)=x+a=x\implies a=0.$$

故 $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{0\}$，$\varphi$ **是忠实的**. 平移算子能够忠实地记录 a 的信息——不同的 a 产生不同的平移变换.

补充说明：即使 $n=1$（即 $V=\mathbb{R}_1[x]$ 为常数多项式空间），此时 $\varphi(a)=\mathrm{id}$ 对一切 a 成立，不是忠实的. 但例 4 通常取 $n\geq 2$，以上分析针对的是一般情形.

（五）第 1题的忠实性（2 次旋转表示）.
第 1 题的表示与例 3 本质相同（均为旋转表示），故 $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\neq\{0\}$，**不是忠实的**.
（六）第 2 题的忠实性（n 次多项式平移表示）.
第 2 题的表示与例 4 完全相同（实际上题目就是要求写出其矩阵形式），故 $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{0\}$，**是忠实的**.
（七）第 3 题的忠实性（无限维多项式平移表示）.
第 3 题的构造与例 4 同理，只需将 $f(x)=x$ 代入：若 $T_a=\mathrm{id}$，则 $f(x+a)=f(x)$ 对一切多项式成立，特别地取 $f(x)=x$ 得 $x+a=x$，故 $a=0$. 因此 $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{0\}$，**是忠实的**. 无限维空间不影响忠实性——判断忠实性的关键是「$T_a=\mathrm{id}\implies a=0$」，而这仅依赖于是否存在一个能区分不同 a 的函数（取 $f(x)=x$ 即可）.

结果汇总：

表示	忠实性	核
例 1 $(a\neq 0)$	忠实	$\{0\}$
例 1 $(a=0)$	不忠实	$\mathbb{R}$
例 2 $(a=0)$	不忠实	$\mathbb{R}$
例 2 $(\mathrm{Im}\,a\neq 0)$	忠实	$\{0\}$
例 2 $(a\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$	不忠实	$\frac{2\pi}{a_1}\mathbb{Z}$
例 3	不忠实	$2\pi\mathbb{Z}$
例 4	忠实	$\{0\}$
第 1 题	不忠实	$2\pi\mathbb{Z}$
第 2 题	忠实	$\{0\}$
第 3 题	忠实	$\{0\}$

1.2.5 整数加法群的 1 次复表示及忠实性

习题 1.2 第 5 题

任意给定 $\lambda\in\mathbb{C}^*$，令

$$\varphi_\lambda:(\mathbb{Z},+)\to\mathbb{C}^*,\quad n\mapsto\lambda^n.$$

说明 φ_λ 是 $(\mathbb{Z},+)$ 的一个 1 次复表示. 讨论 φ_λ 何时是忠实的.

解答

解题思路：先验证 φ_λ 是群同态，再通过分析核 $\mathrm{Ker}(\varphi_\lambda)=\{n\in\mathbb{Z}\mid\lambda^n=1\}$ 来确定忠实性条件.

详细推导：
第一步：验证 φ_λ 是 1 次复表示.
$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 在乘法下构成群，且 $\mathbb{C}^* \cong \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$（1 维可逆线性变换即非零复数的乘法）. 对任意 $n, m \in \mathbb{Z}$，

$$\varphi_\lambda(n+m) = \lambda^{n+m} = \lambda^n \cdot \lambda^m = \varphi_\lambda(n)\,\varphi_\lambda(m).$$

且 $\varphi_\lambda(0) = \lambda^0 = 1$（单位元映到单位元）. 因此 φ_λ 是 $(\mathbb{Z}, +)$ 的一个 1 次复表示.
第二步：分析核.

$$\mathrm{Ker}(\varphi_\lambda) = \{n \in \mathbb{Z} \mid \varphi_\lambda(n) = 1\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid \lambda^n = 1\}.$$

核的结构完全由 λ 在 $\mathbb{C}^*$ 中的性质决定：

- 若 $\lambda = 1$：则 $\lambda^n = 1$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 成立，$\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathbb{Z}$. 这是平凡表示.
- 若 $\lambda = -1$：则 $\lambda^n = (-1)^n$. $(-1)^n = 1 \iff n$ 为偶数，故 $\mathrm{Ker}(\varphi_{-1}) = 2\mathbb{Z}$（全体偶数）.
- 若 λ 是 m 次本原单位根（$m \in \mathbb{N}^*$，即 $\lambda^m = 1$ 且对任意 $1 \le k < m$ 有 $\lambda^k \neq 1$）：则

  $$\lambda^n = 1 \iff m \mid n,$$

  故 $\mathrm{Ker}(\varphi_\lambda) = m\mathbb{Z}$（$m$ 的倍数全体）.
- 若 λ 不是任何正整数次单位根：即对任意 $k \in \mathbb{N}^*$ 均有 $\lambda^k \neq 1$. 此时对任意 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，
  - 若 $n > 0$，则 $\lambda^n \neq 1$（因为 λ 不是 n 次单位根）；
  - 若 $n < 0$，设 $n = -m$（$m > 0$），则 $\lambda^n = \lambda^{-m} = (\lambda^m)^{-1}$. 若 $\lambda^n = 1$，则 $\lambda^m = 1$，矛盾. 故 $\lambda^n \neq 1$.

  因此 $\mathrm{Ker}(\varphi_\lambda) = \{0\}$.

第三步：忠实性条件.
表示 φ_λ 忠实 $\iff \mathrm{Ker}(\varphi_\lambda) = \{0\} \iff$ 对任意 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 均有 $\lambda^n \neq 1$. 用 $\mathbb{Z}^*$ 记 $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$，此条件等价于：

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}^*,\ \lambda^n \neq 1.$$

这又等价于：λ 不是任何正整数次单位根，即

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ \lambda^m \neq 1.$$

换言之，φ_λ 是忠实的当且仅当 λ 在 $\mathbb{C}^*$ 中的乘法阶是无限的（或 λ 根本不是一个单位根）.
一些典型例子：

- $\lambda = 2$：$2^n \neq 1$ 对所有 $n \neq 0$ 成立，φ_2 是忠实的.
- $\lambda = \mathrm{e}$：同样忠实.
- $\lambda = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}}$（即 $\lambda = 1$）：φ_1 是平凡表示，不忠实.
- $\lambda = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/m}$（$m$ 次本原单位根）：$\mathrm{Ker} = m\mathbb{Z}$，不忠实.
- $\lambda = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\alpha}$ 其中 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$（无理数）：对任意 $n \neq 0$，$n\alpha \notin \mathbb{Z}$，故 $\lambda^n = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}n\alpha} \neq 1$. 因此 φ_λ 是忠实的.

结果： $\varphi_\lambda(n) = \lambda^n$ 是 $(\mathbb{Z}, +)$ 的 1 次复表示. 它忠实的充要条件是

$$\lambda \text{ 不是} m \text{ 次单位根}, \forall m \in \mathbb{N}^*,$$

即 λ 在乘法群 $\mathbb{C}^*$ 中的阶为无穷大（或说 λ 不是单位根）.

1.3 群的线性表示的结构

1.3.1 置换表示的不变子空间与直和分解

习题 1.3 第 1 题

设群 G 作用在 $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 上, 并由此得到域 K 上的置换表示 (φ, V). 令

$$V_1 = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \right\rangle, \qquad V_2 = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^n a_i = 0 \right\}.$$

证明 V_1, V_2 都是 G 不变子空间. 若 $\mathrm{char}\, K \nmid n$, 证明 $\varphi = \varphi_{V_1} \oplus \varphi_{V_2}$.

解答

(1) 显然 V_1 和 V_2 都是 V 的子空间. 任给 $g \in G$, 有

$$\varphi(g)\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n g \circ x_i, \qquad \varphi(g)\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i\,(g \circ x_i),$$

由于 $g \circ x_i = g \circ x_j \iff g^{-1} \circ (g \circ x_i) = g^{-1} \circ (g \circ x_j) \iff x_i = x_j$, 因此 V_1 是 $\varphi(g)$ 的不变子空间, 且 $\varphi(g)|_{V_1} = 1_{V_1}$; V_2 是 $\varphi(g)$ 的不变子空间. 从而 V_1, V_2 都是 G 不变子空间.

(2) 设域 K 的特征不能整除 n, 则 $n1 \neq 0$, 其中 1 是 K 的单位元. 记 $\bar{a} = (n1)^{-1} \sum_{i=1}^n a_i$, 则

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}) x_i + \sum_{i=1}^n \bar{a} x_i.$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})=\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}\bar{a}=(n1)\bar{a}-n\bar{a}=0,$$

因此 $\sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})x_i\in V_2$. 显然 $\sum_{i=1}^{n}\bar{a}x_i\in V_1$. 从而 $V=V_1+V_2$.
任给 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\in V_1\cap V_2$, 则 $a_1=a_2=\cdots=a_n$, 且 $\sum_{i=1}^{n}a_i=0$. 从而 $na_1=0$, 即

$$(n1)a_1=0.$$

由于 $n1\neq 0$, 因此 $a_1=0$. 于是 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=0$. 所以 $V_1\cap V_2=\{0\}$. 从而

$$V=V_1\oplus V_2.$$

因此

$$\varphi=\varphi_{V_1}\oplus\varphi_{V_2}.$$

1.3.2 对称群 3 元置换的 2 次复表示

习题 1.3 第 2 题

利用第 1 题, 求 S_3 的一个 2 次复表示及其矩阵表示.

解答

令 S_3 自然作用在 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 上. 第 1 题中的

$$V_2=\{a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\mid a_1+a_2+a_3=0\}$$

是 2 维不变子空间. 取基

$$v_1=x_1-x_2,\qquad v_2=x_1-x_3.$$

对生成元 $(12),(123)$ 计算得

$$\begin{aligned}\varphi_2((12))v_1&=-v_1, & \varphi_2((12))v_2&=-v_1+v_2,\\ \varphi_2((123))v_1&=-v_1+v_2, & \varphi_2((123))v_2&=-v_1.\end{aligned}$$

故所求矩阵表示为

$$\Phi_2((12))=\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix},\qquad \Phi_2((123))=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

其余元素的矩阵由这两个生成元的矩阵相乘得到.

1.3.3 一般线性群在矩阵空间上的共轭表示

习题 1.3 第 3 题

令 $\varphi(A)X = AXA^{-1}$, 其中 $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, $X \in \mathrm{M}_n(K)$. 证明这给出 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的 n^2 次 K 表示. 再证明零迹子空间 $\mathrm{M}_n^0(K)$ 与 $\langle \mathrm{I} \rangle$ 不变; 当 $\operatorname{char} K \nmid n$ 时, 给出相应的直和分解.

解答

对 $A, B \in \mathrm{GL}_n(K)$,

$$\varphi(AB)X = (AB)X(AB)^{-1} = A(BXB^{-1})A^{-1} = \varphi(A)\varphi(B)X.$$

且 $\varphi(A)^{-1} = \varphi(A^{-1})$, 所以这确为表示, 其次数为 $\dim_K \mathrm{M}_n(K) = n^2$.
由迹的循环不变性,

$$\operatorname{tr}(\varphi(A)X) = \operatorname{tr}(AXA^{-1}) = \operatorname{tr}(X),$$

故 $\mathrm{M}_n^0(K)$ 不变. 又 $\varphi(A)(c\mathrm{I}) = c\mathrm{I}$, 故 $\langle \mathrm{I} \rangle$ 不变. 当 $\operatorname{char} K \nmid n$ 时,

$$X = \frac{\operatorname{tr}(X)}{n1_K}\mathrm{I} + \left(X - \frac{\operatorname{tr}(X)}{n1_K}\mathrm{I}\right),$$

右侧第二项零迹. 此外, $c\mathrm{I} \in \mathrm{M}_n^0(K)$ 蕴含 $nc = 0$, 从而 $c = 0$. 因而

$$\mathrm{M}_n(K) = \langle \mathrm{I} \rangle \oplus \mathrm{M}_n^0(K), \qquad \varphi = \varphi_{\langle \mathrm{I} \rangle} \oplus \varphi_{\mathrm{M}_n^0(K)}.$$

1.3.4 正交群共轭表示的对称与反对称分解

习题 1.3 第 4 题

将上题限制为 $\mathrm{O}(n)$ 在 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 上的共轭表示. 证明零迹对称矩阵空间 $\mathrm{M}_n^+(\mathbb{R})$ 和反对称矩阵空间 $\mathrm{M}_n^-(\mathbb{R})$ 不变, 给出直和分解, 并求一个 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次实表示.

解答

对 $A \in \mathrm{O}(n)$, 有 $A^{-1} = A^{\mathsf{T}}$. 若 $X^{\mathsf{T}} = X$, 则

$$(AXA^{-1})^{\mathsf{T}} = AX^{\mathsf{T}}A^{-1} = AXA^{-1}.$$

共轭又保持迹, 因而 $\mathrm{M}_n^+(\mathbb{R})$ 不变. 同理, $X^{\mathsf{T}} = -X$ 时

$$(AXA^{-1})^{\mathsf{T}} = -AXA^{-1},$$

故 $\mathrm{M}_n^-(\mathbb{R})$ 不变.
由第 3 题及

$$X = \frac{X + X^{\mathsf{T}}}{2} + \frac{X - X^{\mathsf{T}}}{2} \quad (X \in \mathrm{M}_n^0(\mathbb{R})),$$

得到

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \langle \mathrm{I} \rangle \oplus \mathrm{M}_n^+(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_n^-(\mathbb{R}).$$

矩阵 $E_{ij} - E_{ji}$ $(1 \leq i < j \leq n)$ 构成 $\mathrm{M}_n^-(\mathbb{R})$ 的一组基, 所以

$$\dim \mathrm{M}_n^-(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

故 $\varphi_{\mathrm{M}_n^-(\mathbb{R})}$ 是所求的实表示.

1.3.5 一般线性群的自然忠实不可约表示

习题 1.3 第 5 题

设 $\varphi(A)\alpha = A\alpha$, 其中 $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, $\alpha \in K^n$. 证明这是 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的忠实 n 次不可约表示.

解答

同态性质显然. 若 $A \in \operatorname{Ker}\varphi$, 则 $A\alpha = \alpha$ 对一切 $\alpha \in K^n$ 成立, 故 $A = \mathrm{I}$. 所以 φ 忠实.
设 $0 \neq U \subseteq K^n$ 是不变子空间, 并取 $0 \neq u \in U$. 对任意 $0 \neq v \in K^n$, 分别把 u, v 扩充为 K^n 的一组基, 即可取到 $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ 使 $Au = v$. 由不变性 $v \in U$. 因此 U 包含一切非零向量, 即 $U = K^n$. 所以表示不可约.

1.3.6 矩阵空间左乘表示的列分解

习题 1.3 第 6 题

定义 $\psi(A)X = AX$ $(A \in \mathrm{GL}_n(K), X \in \mathrm{M}_n(K))$. 对每个 j, 令 $\mathrm{M}_n^{(j)}(K)$ 为只有第 j 列可非零的矩阵空间. 证明 ψ 分解为 n 个不可约子表示, 且每个都与第 5 题等价.

解答

有 $\psi(AB)X = A(BX) = \psi(A)\psi(B)X$, 且 $\psi(A)^{-1} = \psi(A^{-1})$, 故 ψ 是 n^2 次表示. 左乘矩阵不混合各列, 所以每个 $\mathrm{M}_n^{(j)}(K)$ 都不变. 每个矩阵按列唯一分解, 因而

$$\mathrm{M}_n(K) = \mathrm{M}_n^{(1)}(K) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}_n^{(n)}(K), \qquad \psi = \psi_1 \oplus \cdots \oplus \psi_n.$$

定义

$$\sigma_j\left(\sum_{i=1}^{n} x_i E_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i.$$

这是 $\mathrm{M}_n^{(j)}(K)$ 到 K^n 的线性同构, 并且

$$\sigma_j\big(\psi_j(A)X\big) = A\sigma_j(X) = \varphi(A)\sigma_j(X).$$

故 ψ_j 与第 5 题的自然表示等价, 从而每个 ψ_j 不可约.

1.3.7 2 阶零迹矩阵空间上的共轭表示不可约

习题 1.3 第 7 题

当 $K = \mathbb{C}, n = 2$ 时, 证明 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 在 $\mathrm{M}_2^0(\mathbb{C})$ 上的共轭子表示不可约.

解答

令

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad E = E_{12}, \qquad F = E_{21}.$$

则 H, E, F 构成 $\mathrm{M}_2^0(\mathbb{C})$ 的一组基. 设 $0 \neq U \subseteq \mathrm{M}_2^0(\mathbb{C})$ 为不变子空间, 并取

$$0 \neq B = aH + bE + cF \in U.$$

对 $D_t = \mathrm{diag}(t, 1)$ $(t \in \mathbb{C}^*)$, 有

$$D_t B D_t^{-1} = aH + tbE + t^{-1}cF \in U.$$

取三个不同的非零 t, 由相应的 Vandermonde 方程组可分离非零的权分量. 因而若 b 或 c 非零, 则 U 含有 E 或 F; 交换两坐标可使其含有 E. 若 $b = c = 0$, 则 $H \in U$, 而

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = H - 2sE$$

给出 $E \in U$.
最后, 用置换矩阵共轭 E 得 $F \in U$, 再由

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix} = E - sH - s^2 F$$

得到 $H \in U$. 所以 U 含有基 H, E, F, 即 $U = \mathrm{M}_2^0(\mathbb{C})$. 表示不可约.

1.3.8 对称群标准置换分量的不可约性

习题 1.3 第 8 题

设 $n \geq 3$ 且 $\operatorname{char} K \nmid n$. 证明 S_n 的 n 次置换表示分解为主表示与一个 $n-1$ 次不可约子表示的直和.

解答

沿用第 1 题的记号. 已有 $V = V_1 \oplus V_2$, 其中 V_1 给出主表示, $\dim V_2 = n-1$. 只须证明 V_2 上的子表示不可约.

设 $0 \neq U \subseteq V_2$ 不变, 并取 $\alpha = \sum_i a_i x_i \in U \setminus \{0\}$. 因为 $\sum_i a_i = 0$, 各 a_i 不全相同. 不妨设 $a_1 \neq a_2$. 则

$$\varphi((12))\alpha - \alpha = (a_2 - a_1)(x_1 - x_2) \in U.$$

故 $x_1 - x_2 \in U$. 再对 S_n 中元素作用, 一切 $x_i - x_j$ 均属于 U. 特别地, $x_1 - x_2, \ldots, x_1 - x_n$ 是 V_2 的一组基, 所以 $U = V_2$.

1.4 Abel 群的不可约表示

1.4.1 有限 Abel 群的所有 1 次复表示

习题 1.4 第 1 题

求 $(2,2)$ 型、$(2,4)$ 型、$(2,2,2)$ 型、$(3,3)$ 型 Abel 群, 以及加法群 $\mathbb{Z}_p^n$ 的所有 1 次复表示.

解答

取 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$, $\zeta_p = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/p}$. 对各直积因子, 一个 1 次表示由生成元的像唯一决定, 且该像的阶必须整除生成元的阶. 因而全部表示可写为

$$(2,2): \quad \varphi_{r,s}(a^u b^v) = (-1)^{ru+sv}, \quad r,s,u,v \in \{0,1\};$$

$$(2,4): \quad \varphi_{r,s}(a^u b^v) = (-1)^{ru}\mathrm{i}^{sv}, \quad r,u \in \{0,1\},\ s,v \in \{0,1,2,3\};$$

$$(2,2,2): \quad \varphi_{\boldsymbol{r}}(a^{t_1}b^{t_2}c^{t_3}) = (-1)^{r_1t_1+r_2t_2+r_3t_3};$$

$$(3,3): \quad \varphi_{\boldsymbol{r}}(a^{t_1}b^{t_2}) = \omega^{r_1t_1+r_2t_2}.$$

后三式中的所有指标分别在 $\{0,1\}$ 或 $\{0,1,2\}$ 中取值. 对加法群 $\mathbb{Z}_p^n$, 全部表示为

$$\varphi_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{c}) = \zeta_p^{b_1c_1+\cdots+b_nc_n}, \qquad \boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{Z}_p^n.$$

反之, 标准基向量的像均为 p 次单位根, 故每个 1 次表示必且只可能为上述形式.

1.4.2 初等 Abel 群非平凡 1 次表示的核

习题 1.4 第 2 题

设 G 是 p^n 阶初等 Abel 群. 证明任一非平凡 1 次复表示 φ 满足 $|\operatorname{Ker}\varphi| = p^{n-1}$.

解答

将 G 写为

$$G = \langle a_1\rangle \times \cdots \times \langle a_n\rangle, \qquad |\langle a_j\rangle| = p.$$

令 $\zeta_p = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/p}$. 则

$$\varphi(a_1^{t_1}\cdots a_n^{t_n}) = \zeta_p^{r_1t_1+\cdots+r_nt_n}.$$

非平凡性说明某个 $r_j\neq 0$, 因而 $\operatorname{Im}\varphi$ 是非平凡的 p 阶循环群. 由同态基本定理,

$$|\operatorname{Ker}\varphi| = \frac{|G|}{|\operatorname{Im}\varphi|} = \frac{p^n}{p} = p^{n-1}.$$

1.4.3 忠实 1 次表示推出有限 Abel 群循环

习题 1.4 第 3 题

设 G 是有限 Abel 群. 证明若 G 有忠实的 1 次复表示, 则 G 是循环群.

解答

设 $\varphi: G\to\mathbb{C}^*$ 忠实. 则 $\operatorname{Ker}\varphi = \{e\}$, 从而

$$G \cong \operatorname{Im}\varphi.$$

右侧是 $\mathbb{C}^*$ 的有限子群. 设其阶为 m, 则其中每个元素均为 $z^m = 1$ 的根; 这些根构成由本原 m 次单位根生成的循环群. 故 $\operatorname{Im}\varphi$ 循环, 从而 G 循环.

1.5 非 Abel 群的不可约表示的一些构造方法

1.5.1 对称群的所有 1 次复表示

习题 1.5 例 1

求 n 元对称群 S_n $(n \geq 3)$ 的所有 1 次复表示.

解答

设 $\varphi : \mathrm{S}_n \to \mathbb{C}^*$ 是 1 次复表示. 因为 $\mathbb{C}^*$ 为 Abel 群, 对任意 $x, y \in \mathrm{S}_n$,

$$\varphi([x,y]) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1} = 1.$$

所以 $\mathrm{S}_n' \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$. 这说明所有 1 次表示都经由商群 $\mathrm{S}_n/\mathrm{S}_n'$ 分解.
下面严格按教材思路证明 $\mathrm{S}_n' = \mathrm{A}_n$. 由于 $\mathrm{S}_n/\mathrm{A}_n$ 是 2 阶循环群, 它是 Abel 群, 因而

$$\mathrm{S}_n' \subseteq \mathrm{A}_n.$$

另一方面, A_n 由所有 3-轮换生成. 对互异的 i, j, k,

$$(ijk) = (ik)(ij) = \Big[(jk)(ij)(jk)^{-1}\Big](ij)^{-1} \in \mathrm{S}_n'.$$

故 $\mathrm{A}_n \subseteq \mathrm{S}_n'$, 从而 $\mathrm{S}_n' = \mathrm{A}_n$.
于是每个 1 次表示唯一地由 $\mathrm{S}_n/\mathrm{A}_n \cong C_2$ 的 1 次表示提升而来. 后者只有两个: 主表示 $\overline{\varphi}_0$, 以及由

$$\overline{\varphi}_1((12)\mathrm{A}_n) = -1$$

确定的非平凡表示. 因而 S_n 的全部 1 次复表示为

$$\varphi_0(\sigma) = 1, \qquad \varphi_1(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \in \mathrm{A}_n, \\ -1, & \sigma \notin \mathrm{A}_n. \end{cases}$$

即主表示与符号表示.

1.5.2 交错群 4 元置换的所有 1 次复表示

习题 1.5 第 1 题

求 A_4 的所有 1 次复表示. 已知

$$\mathrm{A}_4' = \{\mathrm{I}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

解答

记 $N = \mathrm{A}_4'$. 则 A_4/N 是 3 阶循环群, 其陪集为

$$N, \qquad (123)N, \qquad (132)N.$$

令 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3}$. 商群的三个 1 次表示由

$$\overline{\varphi}_r((123)N) = \omega^r, \qquad r = 0, 1, 2,$$

给出. 提升后得到全部表示

$$\varphi_r(\sigma) = \overline{\varphi}_r(\sigma N), \qquad r = 0, 1, 2.$$

其中 φ_0 为主表示; φ_1 在 N 上取 1, 在 $(123)N$ 上取 ω, 在 $(132)N$ 上取 ω^2; $\varphi_2 = \varphi_1^2$.

1.5.3 由 4 元对称群商群构造 2 次不可约表示

习题 1.5 第 2 题

令 $N = \{\mathrm{I}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \lhd \mathrm{S}_4$. 证明 $\mathrm{S}_4/N \cong \mathrm{S}_3$, 并构造 S_4 的一个 2 次不可约复矩阵表示.

解答

将 S_3 视为固定 4 的 S_4 子群. 有 $\mathrm{S}_3 \cap N = \{\mathrm{I}\}$, 因而

$$|\mathrm{S}_3 N| = \frac{|\mathrm{S}_3||N|}{|\mathrm{S}_3 \cap N|} = \frac{6 \cdot 4}{1} = 24 = |\mathrm{S}_4|.$$

故 $\mathrm{S}_3 N = \mathrm{S}_4$. 由第二同构定理,

$$\mathrm{S}_4/N \cong \mathrm{S}_3/(\mathrm{S}_3 \cap N) \cong \mathrm{S}_3.$$

令 $\pi : \mathrm{S}_4 \to \mathrm{S}_4/N$ 为自然满同态, 以 $\theta : \mathrm{S}_4/N \to \mathrm{S}_3$ 表示上述同构. 将习题 1.3 第 2 题的不可约表示 ψ_2 与 $\theta\pi$ 复合:

$$\varphi_2 = \psi_2 \circ \theta \circ \pi.$$

由于 $\theta\pi$ 满射, φ_2 不可约. 其在相应基下满足

$$\Phi_2((12)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_2((123)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

其余矩阵由这两个生成元及核 N 确定.

1.5.4 由行列式构造一般线性群的 1 次表示

习题 1.5 第 3 题

设 K 是域, $m \in \mathbb{N}^*$. 由 $\varphi_m(t) = t^m$ 构造 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的 1 次 K 表示.

解答

映射 $\varphi_m : K^* \to K^*$ 满足 $\varphi_m(st) = \varphi_m(s)\varphi_m(t)$, 是 K^* 的 1 次表示. 又

$$\det : \mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow K^*$$

为群同态. 因而复合映射

$$\rho_m(A) = \varphi_m(\det A) = (\det A)^m$$

满足 $\rho_m(AB) = \rho_m(A)\rho_m(B)$, 即为所求 1 次 K 表示.

1.5.5 1 次复表示的商群为循环群

习题 1.5 第 4 题

证明若 φ 是有限群 G 的 1 次复表示, 则 $G/\operatorname{Ker}\varphi$ 为循环群.

解答

由同态基本定理,

$$G/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi.$$

像 $\operatorname{Im}\varphi$ 是 $\mathbb{C}^*$ 的有限子群, 因而是循环群. 所以 $G/\operatorname{Ker}\varphi$ 循环.

1.5.6 非循环有限群没有忠实 1 次复表示

习题 1.5 第 5 题

证明非循环的有限群没有忠实的 1 次复表示.

解答

反设有限群 G 有忠实的 1 次复表示 φ. 则 $\operatorname{Ker}\varphi = \{e\}$, 所以第 4 题给出

$$G \cong G/\operatorname{Ker}\varphi$$

为循环群, 矛盾. 因而非循环有限群不存在忠实的 1 次复表示.

1.5.7 有限非 Abel 群的忠实 2 次表示不可约

习题 1.5 第 6 题

证明: 有限非 Abel 群在特征不整除群阶的域上, 任一忠实 2 次表示均不可约.

解答

设 (φ, V) 是这样的表示. 若它可约, 则有 1 维不变子空间 U. 由 Maschke 定理, 存在 1 维不变补空间 W, 使

$$V = U \oplus W.$$

在分别取自 U, W 的基下, 对每个 $g \in G$,

$$\Phi(g) = \begin{pmatrix} \lambda_g & 0 \\ 0 & \mu_g \end{pmatrix}.$$

故任意 $\Phi(g), \Phi(h)$ 交换. 忠实性说明 $\varphi(g)\varphi(h) = \varphi(h)\varphi(g)$ 蕴含 $gh = hg$. 这将使 G 为 Abel 群, 矛盾. 所以 φ 不可约.

1.5.8 直和表示的对偶与对偶表示直和

习题 1.5 第 7 题

设 (φ, V) 和 (ψ, W) 是群 G 的两个 K 表示. 证明

$$(\varphi \oplus \psi)^* \cong \varphi^* \oplus \psi^*.$$

解答

定义

$$\sigma : (V \oplus W)^* \longrightarrow V^* \oplus W^*, \qquad \sigma(f) = (f_1, f_2),$$

其中

$$f_1(v) = f(v, 0), \qquad f_2(w) = f(0, w).$$

$$\begin{array}{ccc} (V \oplus W)^* & \xrightarrow{\sigma} & V^* \oplus W^* \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (\varphi\oplus\psi)^*(g)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (\varphi^*\oplus\psi^*)(g)} \\ (V \oplus W)^* & \xrightarrow[\sigma]{} & V^* \oplus W^* \end{array}$$

这是线性同构, 其逆将 (f_1, f_2) 送到 $(v, w) \mapsto f_1(v) + f_2(w)$. 对 $g \in G$,

$$\begin{aligned}\sigma\Big((\varphi \oplus \psi)^*(g)f\Big)(v, w) &= f\Big(\varphi(g^{-1})v, \psi(g^{-1})w\Big) \\ &= (\varphi^*(g)f_1)(v) + (\psi^*(g)f_2)(w) \\ &= \Big((\varphi^* \oplus \psi^*)(g)\sigma(f)\Big)(v, w).\end{aligned}$$

故 σ 交织两个表示, 即

$$(\varphi \oplus \psi)^* \cong \varphi^* \oplus \psi^*.$$

2

群代数

2.1 代数的中心与群代数的中心

习题 2.1 第 1 题

域 K 上代数 A 的非空子集 A_1 称为 A 的子代数, 如果 A_1 是环 A 的含 A 的单位元的一个子环, 且 A_1 又是域 K 上线性空间 A 的一个子空间. 令

$$Z(A) = \{c \in A \mid ca = ac, \quad \forall a \in A\},$$

证明: $Z(A)$ 是 A 的一个子代数, 称 $Z(A)$ 是代数 A 的中心.

解答

任取 $c, d \in Z(A)$ 及 $a \in A$, 则

$$(c + d)a = ca + da = ac + ad = a(c + d),$$

$$(-c)a = -(ca) = -(ac) = a(-c),$$

以及

$$(cd)a = c(da) = c(ad) = (ca)d = (ac)d = a(cd).$$

因此 $c + d, -c, cd \in Z(A)$, 即 $Z(A)$ 是环 A 的子环. 又 $1_A a = a1_A$ 对任意 $a \in A$ 成立, 所以 $1_A \in Z(A)$.

若 $c,d\in Z(A)$ 且 $\lambda\in K$, 则

$$(\lambda c+d)a=\lambda ca+da=\lambda ac+ad=a(\lambda c+d),$$

故 $\lambda c+d\in Z(A)$. 因而 $Z(A)$ 是线性空间 A 的子空间. 综上, $Z(A)$ 是 A 的子代数, 称为代数 A 的中心.

习题 2.1 第 2 题

设 G 是有限群, K 是域.

1. 证明: $\sum\limits_{g\in G}g\in Z(K[G])$;
2. 对于 $a\in G$, G 的子集 $\{gag^{-1}\mid g\in G\}$ 称为 a 的共轭类, 记作 C_a, 证明:

$$\sum_{x\in C_a}x\in Z(K[G]).$$

解答

(1) 任给 $b=\sum\limits_{h\in G}b_hh\in K[G]$, 有

$$\left(\sum_{g\in G}g\right)b=\sum_{g\in G}\sum_{h\in G}b_h(gh)=\sum_{h\in G}b_h\left(\sum_{g\in G}gh\right).$$

由于右乘固定的 h 只是对 G 中元素的一个置换, $\{gh\mid g\in G\}=G$. 同理 $\{hg\mid g\in G\}=G$, 从而

$$\sum_{g\in G}gh=\sum_{g\in G}g=\sum_{g\in G}hg.$$

因此

$$\left(\sum_{g\in G}g\right)b=\sum_{h\in G}b_h\left(\sum_{g\in G}hg\right)=b\left(\sum_{g\in G}g\right).$$

故 $\sum\limits_{g\in G}g\in Z(K[G])$.

(2) 任取 $h\in G$. 共轭映射 $x\mapsto hxh^{-1}$ 将 C_a 置换自身, 因为

$$h(gag^{-1})h^{-1}=(hg)a(hg)^{-1}\in C_a.$$

该映射的逆为 $x\mapsto h^{-1}xh$, 因而

$$h\left(\sum_{x\in C_a}x\right)h^{-1}=\sum_{x\in C_a}hxh^{-1}=\sum_{x\in C_a}x.$$

于是 $\sum_{x\in C_a} x$ 与 G 中每个元素都交换. 由于 $K[G]$ 中任意元素都是 G 中元素的 K 线性组合, 它也与 $K[G]$ 中任意元素交换. 因此

$$\sum_{x\in C_a} x \in Z(K[G]).$$

2.2 有限维半单代数的不可约左模

2.2.1 四阶循环群的正则表示

习题 2.2 第 1 题

把 4 阶循环群 $G=\langle a\rangle$ 在复数域上的正则表示 ρ 分解成不可约子表示的直和. 由此看出, G 的每一个不可约复表示都出现在 ρ 的直和分解式中 (在等价的意义上).

解答

在习题 1.2 的第 8 题中已求出 4 阶循环群的正则表示 ρ 提供的矩阵表示 P 为

$$P(a)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

求出复矩阵 $P(a)$ 的特征多项式为 λ^4-1, 从而 $P(a)$ 的全部特征值为 $1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i}$. 于是

$$P(a)\sim \operatorname{diag}\{1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i}\}.$$

因此 $\rho=\varphi_0\oplus\varphi_1\oplus\varphi_2\oplus\varphi_3$, 其中

$$\varphi_0(a)=1,\quad \varphi_1(a)=\mathrm{i},\quad \varphi_2(a)=-1,\quad \varphi_3(a)=-\mathrm{i}.$$

4 阶循环群 $G=\langle a\rangle$ 的不可约复表示都是 1 次的, 且恰有 4 个 1 次表示, 它们正好是 $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$.

2.2.2 子模和为直和的判定

习题 2.2 第 2 题

设 H_1 和 H_2 都是环 R 上左模 M 的子模, 证明: 和 H_1+H_2 是直和当且仅当 $H_1\cap H_2=\{0\}$.

解答

必要性. 设 H_1+H_2 是直和. 任取 $x\in H_1\cap H_2$, 则 $0=x+(-x)$. 由于 0 的表示法唯一, 因此 $x=0$. 从而 $H_1\cap H_2=\{0\}$.
充分性. 设 $H_1\cap H_2=\{0\}$. 任取 H_1+H_2 中一个元素 x, 设 $x=x_1+x_2=y_1+y_2$, 其中 $x_1,y_1\in H_1,x_2,y_2\in H_2$, 则 $x_1-y_1=y_2-x_2\in H_1\cap H_2$. 于是 $x_1-y_1=y_2-x_2=0$. 从而 $x_1=y_1,x_2=y_2$. 因此 H_1+H_2 是直和.

2.2.3 直和分解与商模同构

习题 2.2 第 3 题

设环 R 上左模 M 能分解成它的两个子模 H_1 与 H_2 的直和: $M=H_1\oplus H_2$, 证明: $M/H_1\cong H_2$, $M/H_2\cong H_1$ (模同构).

解答

设 $x=x_1+x_2$, 其中 $x_1\in H_1,x_2\in H_2$. 令 $P_1(x)=x_1$, 称 P_1 是 M 在 H_1 上的投影. 显然 P_1 保持加法, 且与环 R 的作用可交换, 因此 P_1 是 M 到 H_1 的模同态, 显然 P_1 是满射, 因此 $\operatorname{Im}P_1=H_1$.

$$x\in\operatorname{Ker}P_1\Longleftrightarrow P_1(x)=0\Longleftrightarrow x_1=0\Longleftrightarrow x=x_2\in H_2.$$

因此 $\operatorname{Ker}P_1=H_2$. 根据模同态基本定理, $M/H_2\cong H_1$. 同理 $M/H_1\cong H_2$.

2.2.4 有限直和分解的商模

习题 2.2 第 4 题

设环 R 上的左模 M 是它的子模 $H_1,H_2,\ldots,H_s$ 的直和, 即 $M=H_1\oplus H_2\oplus\cdots\oplus H_s$, 证明:

$$M/(H_2\oplus\cdots\oplus H_s)\cong H_1.$$

解答

显然 $M=H_1\oplus H_2\oplus\cdots\oplus H_s=H_1\oplus(H_2\oplus\cdots\oplus H_s)$. 由第 3 题立刻得到 $M/(H_2\oplus\cdots\oplus H_s)\cong H_1$.

2.3 有限维半单代数的不同构的不可约左模的个数

2.3.1 除环上的矩阵环的单性

习题 2.3 第 1 题

设 R 是一个有单位元 $1(\neq 0)$ 的环, 如果 R 的每一个非零元都可逆, 那么称 R 是一个除环 (或体). 证明: 若 D 是一个除环, 则 $M_n(D)$ 是单环.

解答

设 D 是一个除环. 任取 $M_n(D)$ 的一个双边理想 J, 设 $J \neq \{0\}$, 欲证 $J = M_n(D)$. 为此只要证 $E_{ij} \in J$, $1 \leq i, j \leq n$. 任取 $A \in J$ 且 $A \neq 0$. 设 $A = (a_{ij})$, 其中 $a_{kt} \neq 0$. 任意给定 i, j. 由于

$$E_{ik} A E_{tj} = a_{kt} E_{ij}$$

(参看 [33] 第 166 页公式 (3)), 且 J 是双边理想, 因此 $a_{kt} E_{ij} \in J$. 从而 $E_{ij} \in J$, $1 \leq i, j \leq n$. 于是 $M_n(D)$ 中任一矩阵 $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} E_{ij} \in J$. 因此 $J = M_n(D)$.

2.3.2 右线性空间的线性变换环

习题 2.3 第 2 题

设 V 是除环 D 上的一个右模, 把 D 在 V 上的作用看成是 D 与 V 的 (右) 纯量乘法 (即 $V \times D$ 到 V 的一个映射), 则 V 称为除环 D 上的右线性空间, V 中的元素称为向量. 与域上的线性空间类似, 除环 D 上的右线性空间 V 中, 也有线性相关、线性无关、基和维数等概念. V 到自身的模同态称为 V 上的线性变换. V 上所有线性变换组成的集合记作 $\mathrm{Hom}_D(V, V)$. 在 $\mathrm{Hom}_D(V, V)$ 中有加法、乘法运算, 易验证 $\mathrm{Hom}_D(V, V)$ 成为一个环. 证明: 若 $\dim_D V = n$, 则有环同构:

$$\mathrm{Hom}_D(V, V) \cong M_n(D).$$

(注在 $\mathrm{Hom}_D(V, V)$ 中还可以定义 (右) 纯量乘法运算: 任给 $A \in \mathrm{Hom}_D(V, V)$, $d \in D$, 规定

$$(Ad)v := (Av)d, \quad \forall v \in V.$$

容易验证 $\mathrm{Hom}_D(V, V)$ 成为除环 D 上的右线性空间, 且满足:

$$(AB)d = (Ad)B = A(Bd), \quad \forall A, B \in \mathrm{Hom}_D(V, V),\ d \in D.)$$

解答

V 中取一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. 任取 $A \in \mathrm{Hom}_D(V, V)$, 设

$$\begin{aligned} A(\alpha_1) &= \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \cdots + \alpha_n a_{n1}, \\ A(\alpha_2) &= \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \cdots + \alpha_n a_{n2}, \\ &\vdots \\ A(\alpha_n) &= \alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \cdots + \alpha_n a_{nn}, \end{aligned}$$

则

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

把上式右端的 n 阶矩阵记作 A. 令

$$\sigma : \mathrm{Hom}_D(V, V) \longrightarrow M_n(D) \qquad A \longmapsto A.$$

显然 σ 是映射、满射、单射. 从而 σ 是双射. 容易验证 σ 保持加法. 下面来证 σ 保持乘法. 设

$$A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)A, \qquad B(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)B,$$

则

$$\begin{aligned} (AB)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= A\Big((\alpha_1, \ldots, \alpha_n)B\Big) \\ &= A\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_{i1}, \sum_{i=1}^n \alpha_i b_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^n \alpha_i b_{in}\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n A(\alpha_i) b_{i1}, \sum_{i=1}^n A(\alpha_i) b_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^n A(\alpha_i) b_{in}\right) \\ &= (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n)B \\ &= [(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)A]B \\ &= (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(AB). \end{aligned}$$

从而 $\sigma(AB) = AB = \sigma(A)\sigma(B)$. 因此 σ 是 $\mathrm{Hom}_D(V, V)$ 与 $M_n(D)$ 之间的环同构. 下面验证 σ 与右纯量乘法相容. 有

$$(Ad)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = ((Ad)\alpha_1, \ldots, (Ad)\alpha_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= ((A\alpha_1)d, \ldots, (A\alpha_n)d) \\
&= (A\alpha_1, A\alpha_2, \ldots, A\alpha_n)d \\
&= [(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)A]d \\
&= (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(Ad).
\end{aligned}
$$

因此 $\sigma(Ad) = Ad = \sigma(A)d$. 从而 σ 也是 $\mathrm{Hom}_D(V, V)$ 与 $M_n(D)$ 之间的右代数同构.

2.4 有限维单代数的结构，代数闭域上有限维半单代数的不可约左模的维数

2.4.1 不可约矩阵表示的交织矩阵

习题 2.4 第 1 题

设 Φ 和 Ψ 分别是群 G 的两个不可约矩阵表示, 次数分别为 n 和 m, 设 A 是域 K 上的 $m \times n$ 矩阵, 使得 $\Psi(g)A = A\Phi(g)$, $\forall g \in G$. 证明: $A = 0$ 或者 $m = n$ 且 A 是可逆矩阵.

解答

设 Φ 和 Ψ 分别是群 G 的两个 K-表示 (φ, V) 和 (ψ, W), 对于 V, W 中分别取的一个基提供的矩阵表示. 设 A 是 V 到 W 的一个线性映射, 它关于 V 的上述基和 W 的上述基的矩阵是 A, 则 $\psi(g)A = A\varphi(g)$, $\forall g \in G$. 由于 φ, ψ 都是群 G 在域 K 上的线性表示, 因此 V, W 都是 $K[G]$-模, 其中

$$
gv := \varphi(g)v, \quad \forall v \in V; \qquad gw := \psi(g)w, \quad \forall w \in W.
$$

$$
A(gv) = A(\varphi(g)v) = [A\varphi(g)]v = [\psi(g)A]v = g(Av),
$$

因此 A 是 V 到 W 的模同态, 即 $A \in \mathrm{Hom}_{K[G]}(V, W)$. 由于 V, W 都是不可约左 $K[G]$-模. 因此根据引理 1 得, 当 $V \ncong W$ 时, $A = 0$. 从而当 $A \neq 0$ 时, $V \cong W$. 于是 $n = m$, $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$, $\mathrm{Im}\, A = W$. 从而 A 是双射, 即 A 可逆. 因此 $A = 0$ 或者 $n = m$ 且 A 是可逆矩阵.

2.4.2 Schur 引理

习题 2.4 第 2 题

设 (φ, V) 和 (ψ, W) 是群 G 在域 K 上的两个不可约表示. 设 σ 是域 K 上有限维线性空间 V 到 W 的线性映射, 并且满足 $\psi(g)\sigma = \sigma\varphi(g)$, $\forall g \in G$. 证明:

(1) 若 φ 和 ψ 不等价, 则 $\sigma = 0$;

(2) 若 $V = W$ 且 $\varphi = \psi$, 则 $\sigma = k1_V$, 其中 $k \in K$.

解答

V 和 W 都是不可约左 $K[G]$-模. 由已知条件, σ 是 V 到 W 的模同态.

(1) 若 φ 和 ψ 不等价, 则 $V \ncong W$, 根据引理 1 得, $\sigma = 0$.

(2) 若 $V = W$ 且 $\varphi = \psi$, 则 $\sigma \in \mathrm{Hom}_{K[G]}(V, V)$. 由引理 2 得, 对某个 $k \in K$, $\sigma = k1_V$.

2.4.3 有限群表示的平均算子

习题 2.4 第 3 题

设 (φ, V) 和 (ψ, W) 是有限群 G 的两个不可约复表示, 并设 σ 是有限维复线性空间 V 到 W 的任一线性映射, 令

$$\tilde{\sigma} = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \psi(g)\sigma\varphi(g)^{-1}.$$

证明:

(1) 若 φ 与 ψ 不等价, 则 $\tilde{\sigma} = 0$;

(2) 若 $V = W$ 且 $\varphi = \psi$, 则 $\tilde{\sigma} = k1_V$, 其中

$$k = \frac{\mathrm{tr}(\sigma)}{\dim V},$$

这里 $\mathrm{tr}(\sigma)$ 是线性变换 σ 的迹.

解答

任给 $h \in G$, 有

$$\begin{aligned}\psi(h)\tilde{\sigma}\varphi(h)^{-1} &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \psi(h)\psi(g)\sigma\varphi(g)^{-1}\varphi(h)^{-1} \\ &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \psi(hg)\sigma\varphi(hg)^{-1} = \tilde{\sigma},\end{aligned}$$

因此

$$\psi(h)\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}\varphi(h), \quad \forall h \in G.$$

(1) 若 φ 与 ψ 不等价, 则根据第 2 题的第 (1) 小题得 $\tilde{\sigma} = 0$.
(2) 若 $V = W$ 且 $\varphi = \psi$, 则根据第 2 题的第 (2) 小题得 $\tilde{\sigma} = k1_V$. 于是

$$\operatorname{tr}(\tilde{\sigma}) = k \dim V.$$

由于

$$\operatorname{tr}(\tilde{\sigma}) = |G|^{-1} \sum_{g\in G} \operatorname{tr}\left[\varphi(g)\sigma\varphi(g)^{-1}\right] = |G|^{-1} \sum_{g\in G} \operatorname{tr}(\sigma) = \operatorname{tr}(\sigma),$$

因此

$$k = \frac{\operatorname{tr}(\sigma)}{\dim V}.$$

2.4.4 交换不可约表示的矩阵

习题 2.4 第 4 题

设 Φ 是群 G 在代数闭域 K 上的 n 次不可约矩阵表示, 设 A 是域 K 上 n 阶矩阵使得 $\Phi(g)A = A\Phi(g)$, $\forall g \in G$. 证明: A 是数量矩阵.

解答

设 Φ 是群 G 的线性表示 (φ, V) 在 V 的一个基下提供的矩阵表示. A 是 V 上的线性变换, 它在 V 的上述基下的矩阵为 A, 则 $\varphi(g)A = A\varphi(g)$, $\forall g \in G$. 根据第 2 题第 (2) 小题的结论得 $A = k1_V$, 其中 k 是 K 中某个元素. 从而 A 是数量矩阵.

2.5 有限群的不可约表示的个数和次数

2.5.1 二面体群的不可约复表示

习题 2.5 第 1 题

求 8 阶二面体群 $D_4 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = \tau^2 = \mathrm{I},\ \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$ 的所有不等价的不可约复表示.

解答

根据 [24] 第 80 页的第 14 题, D_4 的共轭类有 5 个:

$$\{\mathrm{I}\}, \quad \{\sigma^2\}, \quad \{\sigma, \sigma^3\}, \quad \{\tau, \sigma^2\tau\}, \quad \{\sigma\tau, \sigma^3\tau\}.$$

于是 D_4 有 5 个不等价的不可约复表示.

根据 [24] 第 66 页的第 9 题, $D_4' = \langle\sigma^2\rangle$. 于是

$$D_4/D_4' = \{\langle\sigma^2\rangle, \langle\sigma^2\rangle\sigma, \langle\sigma^2\rangle\tau, \langle\sigma^2\rangle\sigma\tau\} = \langle\langle\sigma^2\rangle\sigma\rangle \times \langle\langle\sigma^2\rangle\tau\rangle.$$

D_4/D_4' 共有 4 个 1 次表示: $\overline{\varphi}_0, \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \overline{\varphi}_3$, 其中 $\overline{\varphi}_0$ 是主表示, $\overline{\varphi}_1 = \overline{\varphi}_{\langle\sigma^2\rangle\sigma}$, $\overline{\varphi}_2 = \overline{\varphi}_{\langle\sigma^2\rangle\tau}$, $\overline{\varphi}_3 = \overline{\varphi}_{\langle\sigma^2\rangle\sigma\tau}$. 于是

$$\begin{aligned}
&\overline{\varphi}_1(\langle\sigma^2\rangle\sigma) = (-1)^{1\times1+0\times0} = -1, &&\overline{\varphi}_1(\langle\sigma^2\rangle\tau) = (-1)^{1\times0+0\times1} = 1,\\
&\overline{\varphi}_2(\langle\sigma^2\rangle\sigma) = (-1)^{0\times1+1\times0} = 1, &&\overline{\varphi}_2(\langle\sigma^2\rangle\tau) = (-1)^{0\times0+1\times1} = -1,\\
&\overline{\varphi}_3(\langle\sigma^2\rangle\sigma) = (-1)^{1\times1+1\times0} = -1, &&\overline{\varphi}_3(\langle\sigma^2\rangle\tau) = (-1)^{1\times0+1\times1} = -1.
\end{aligned}$$

把 D_4/D_4' 的这 4 个 1 次表示提升, 便得到 D_4 的 4 个 1 次表示: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, 其中 φ_0 是主表示,

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(\sigma) = -1, \quad \varphi_1(\tau) = 1; \qquad \varphi_2(\sigma) = 1, \quad \varphi_2(\tau) = -1;\\
&\varphi_3(\sigma) = -1, \quad \varphi_3(\tau) = -1.
\end{aligned}$$

$$\varphi_l(\sigma^i\tau^j) = [\varphi_l(\sigma)]^i[\varphi_l(\tau)]^j, \quad l = 1, 2, 3; \quad 0 \le i \le 3,\ 0 \le j \le 1.$$

由于 $|D_4| = 8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$, 因此 D_4 有一个 2 次不可约复表示. D_4 是正方形的对称 (性) 群. 以正方形中心 O 为原点, 以正方形的一条对称轴 (τ 是关于这条对称轴的反射) 为 x 轴, 建立平面直角坐标系 Oxy, x 轴,y 轴的单位向量分别记作 e_1, e_2, 则

$$\sigma(e_1) = e_2, \quad \sigma(e_2) = -e_1; \qquad \tau(e_1) = e_1, \quad \tau(e_2) = -e_2.$$

于是 σ, τ 在基 e_1, e_2 下的矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

取复数域上的一个 2 维线性空间 V, 取 V 的一个基 α_1, α_2. 设 $\varphi_4(\sigma), \varphi_4(\tau)$ 是 V 上的线性变换, 它们在 V 的一个基 α_1, α_2 下的矩阵分别是 A, B, 则 φ_4 是 D_4 的一个 2 次复表示. 显然 φ_4 是忠实的. 由于 D_4 是非 Abel 群, 因此根据习题 1.5 的第 6 题得, φ_4 不可约.

2.5.2 四元数群的不可约复表示

习题 2.5 第 2 题

求四元数群 $Q = \langle i, j \mid i^4 = j^4 = 1,\ jij^{-1} = i^{-1}\rangle$ 的所有不等价的不可约复表示. (注关于四元数群的概念可参看 [24] 第 89 页.)

解答

易求出 $Z(Q) = \{\pm 1\}$. 于是

$$C_Q(i) = \{\pm 1, \pm i\}, \qquad C_Q(j) = \{\pm 1, \pm j\}.$$

因此 i 的共轭类的元素个数为 2, j 的共轭类的元素个数为 2. 于是 Q 共有 5 个共轭类:

$$\{1\}, \quad \{-1\}, \quad \{i, -i\}, \quad \{j, -j\}, \quad \{ij, -ij\}.$$

因此四元数群 Q 共有 5 个不等价的不可约复表示.
由于 $Q/Z(Q)$ 是 4 阶群, 而 4 阶群都是 Abel 群, 因此 $Z(Q) \supseteq Q'$. 由于

$$-1 = i^2 = i(jij^{-1})^{-1} = iji^{-1}j^{-1} \in Q',$$

因此 $Z(Q) \subseteq Q'$. 于是 $Q' = Z(Q) = \langle -1\rangle$. 从而

$$Q/Q' = \{\langle -1\rangle, \langle -1\rangle i, \langle -1\rangle j, \langle -1\rangle ij\}$$

有 4 个 1 次表示: $\overline{\varphi}_0, \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \overline{\varphi}_3$, 其中 $\overline{\varphi}_0$ 是主表示, $\overline{\varphi}_1 = \overline{\varphi}_{\langle -1\rangle i}$, $\overline{\varphi}_2 = \overline{\varphi}_{\langle -1\rangle j}$, $\overline{\varphi}_3 = \overline{\varphi}_{\langle -1\rangle ij}$. 于是

$$\begin{aligned}
&\overline{\varphi}_1(\langle -1\rangle i) = (-1)^{1\times 1+0\times 0} = -1, && \overline{\varphi}_1(\langle -1\rangle j) = (-1)^{1\times 0+0\times 1} = 1,\\
&\overline{\varphi}_2(\langle -1\rangle i) = (-1)^{0\times 1+1\times 0} = 1, && \overline{\varphi}_2(\langle -1\rangle j) = (-1)^{0\times 0+1\times 1} = -1,\\
&\overline{\varphi}_3(\langle -1\rangle i) = (-1)^{1\times 1+1\times 0} = -1, && \overline{\varphi}_3(\langle -1\rangle j) = (-1)^{1\times 0+1\times 1} = -1.
\end{aligned}$$

把 $\overline{\varphi}_0, \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \overline{\varphi}_3$ 提升, 便得到 Q 的 4 个 1 次表示: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, 其中 φ_0 是主表示,

$$\varphi_1(i) = -1, \quad \varphi_1(j) = 1; \qquad \varphi_2(i) = 1, \quad \varphi_2(j) = -1; \qquad \varphi_3(i) = -1, \quad \varphi_3(j) = -1.$$

$$\varphi_l(i^r j^s) = [\varphi_l(i)]^r [\varphi_l(j)]^s, \quad l = 1, 2, 3; \quad 0 \le r \le 3,\ 0 \le s \le 3.$$

由于 $|Q| = 8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$, 因此 Q 有一个 2 次不可约复表示.

从 [28] 第 711 页的三个 Pauli 矩阵受到启发, 令

$$\Phi_4 : Q \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \qquad i \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad j \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

且

$$\Phi_4(i^r j^s) = [\Phi_4(i)]^r [\Phi_4(j)]^s, \quad 0 \leq r, s \leq 3,$$

则 Φ_4 是 Q 的 2 次复矩阵表示. 设 Φ_4 是由 Q 的 2 次复表示 φ_4 提供的. 显然 φ_4 是忠实的. 由于 Q 是非 Abel 群, 因此 φ_4 不可约.

2.5.3 交错群的不可约复表示

习题 2.5 第 3 题

求交错群 A_4 的所有不等价的不可约复表示.

解答

根据 [24] 第 80 页的第 17 题, A_4 有 4 个共轭类, 它们的代表分别是: $(1), (12)(34), (123), (132)$. 于是 A_4 共有 4 个不等价的不可约复表示.

$$\mathrm{A}_4' = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

于是 A_4 有 3 个 1 次表示, 它们可由 $\mathrm{A}_4/\mathrm{A}_4'$ 的 3 个 1 次表示 $\overline{\varphi}_0, \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2$ 提升得到. 习题 1.5 的第 1 题已给出了 A_4 的 3 个 1 次表示 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$, 其中 φ_0 是主表示. 记 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$.

$$\begin{aligned} \varphi_1((123)) = \varphi_1((134)) = \varphi_1((243)) = \varphi_1((142)) &= \omega, \\ \varphi_1((132)) = \varphi_1((234)) = \varphi_1((124)) = \varphi_1((143)) &= \omega^2, \\ \varphi_1((1)) = \varphi_1((12)(34)) = \varphi_1((13)(24)) = \varphi_1((14)(23)) &= 1. \end{aligned}$$

同理可写出 $\varphi_2(\sigma)$, $\forall \sigma \in \mathrm{A}_4$.

$$|\mathrm{A}_4| = 12 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2.$$

因此 A_4 有一个 3 次不可约复表示. 我们知道 S_4 有一个 3 次不可约表示, 它是由 S_4 在集合 $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 上的自然作用引起的 4 次置换表示分解得到的, 记作 ψ, 它的表示空间

$$V_2 = \left\{ \sum_{i=1}^4 a_i x_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^4 a_i = 0, \ a_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

V_2 中取基 $\alpha_1 = x_1 - x_2,\ \alpha_2 = x_1 - x_3,\ \alpha_3 = x_1 - x_4$, 则

$$\begin{aligned}
&\psi((12))\alpha_1 = -\alpha_1, && \psi((12))\alpha_2 = -\alpha_1 + \alpha_2, && \psi((12))\alpha_3 = -\alpha_1 + \alpha_3,\\
&\psi((13))\alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_2, && \psi((13))\alpha_2 = -\alpha_2, && \psi((13))\alpha_3 = -\alpha_2 + \alpha_3,\\
&\psi((14))\alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_3, && \psi((14))\alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_3, && \psi((14))\alpha_3 = -\alpha_3.
\end{aligned}$$

把 ψ 限制到 A_4 上便得到 A_4 的一个 3 次复表示, 记作 φ_3. 根据 [24] 第 39 页的第 6 题, 得

$$\mathrm{A}_4 = \langle (123), (124) \rangle.$$

由于 $(123) = (13)(12), (124) = (14)(12)$, 因此

$$\begin{aligned}
&\varphi_3((123))\alpha_1 = -\alpha_1 + \alpha_2, && \varphi_3((123))\alpha_2 = -\alpha_1, && \varphi_3((123))\alpha_3 = -\alpha_1 + \alpha_3,\\
&\varphi_3((124))\alpha_1 = -\alpha_1 + \alpha_3, && \varphi_3((124))\alpha_2 = -\alpha_1 + \alpha_2, && \varphi_3((124))\alpha_3 = -\alpha_1.
\end{aligned}$$

因此

$$\Phi_3((123)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_3((124)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Phi_3((123))$ 的特征值为 $1, \omega, \omega^2$, $\Phi_3((123))$ 属于特征值 1 的特征子空间为 $\langle (1,1,-3)^{\mathsf{T}} \rangle$, 属于特征值 ω 的特征子空间为 $\langle (\omega,1,0)^{\mathsf{T}} \rangle$, 属于特征值 ω^2 的特征子空间为 $\langle (\omega^2,1,0)^{\mathsf{T}} \rangle$.
$\Phi_3((124))$ 的特征值也为 $1, \omega, \omega^2$, 属于 1 的特征子空间为 $\langle (1,-3,1)^{\mathsf{T}} \rangle$, 属于 ω 的特征子空间为 $\langle (\omega,0,1)^{\mathsf{T}} \rangle$, 属于 ω^2 的特征子空间为 $\langle (\omega^2,0,1)^{\mathsf{T}} \rangle$. 假如 φ_3 可约, 则 V_2 有 1 维 A_4 不变子空间. 从而 $\varphi_3((123))$ 与 $\varphi_3((124))$ 应有公共 1 维不变子空间. 由于两者各有 3 个不同特征值, 因此应有公共特征子空间. 但是上述计算看到没有公共特征子空间. 因此 φ_3 不可约.

2.5.4 Abel 子群与表示次数

习题 2.5 第 4 题

设 G 是有限群, K 是特征不能整除 $|G|$ 的代数闭域, 证明: 如果 G 有一个 Abel 子群 H, 那么 G 的每个不可约 K-表示的次数不超过 $[G : H]$.

解答

任取 G 的一个不可约 K-表示 (φ, V). 由于 G 是有限群, 且域 K 的特征不能整除 $|G|$, 因此 G 的每一个不可约 K-表示都是有限维的. 从而 V 是有限维的. 考虑 φ 在子群 H 上的限制 $\varphi|_H$. $\varphi|_H$ 可分解成有限多个不可约子表示的直和. 设 W 是 V 的 H 不变子

空间, 且 $\varphi|_H$ 在 W 上的子表示 $(\varphi|_H)_W$ 是不可约的. 由于 H 是 Abel 群, 且 K 是代数闭域, 因此 H 的每一个不可约 K-表示都是 1 次的. 从而 $\dim_K W = 1$. 设 $W = \langle w \rangle$, 令 V' 是 V 的子集 $\{\varphi(g)w \mid g \in G, w \in W\}$ 生成的子空间. 显然 V' 是 G 不变子空间. 由于 (φ, V) 不可约, 因此 $V' = V$. 记 $r = [G : H]$. 设 H 在 G 中的左陪集代表系为 $\{g_1, g_2, \ldots, g_r\}$. 对于 g_iH 中任一元素 g_ih $(h \in H)$, 有

$$\varphi(g_ih)w = \varphi(g_i)\varphi(h)w = \varphi(g_i)(kw) = k\varphi(g_i)w.$$

因此 V' (从而 V) 可以由 $\varphi(g_1)w, \varphi(g_2)w, \ldots, \varphi(g_r)w$ 生成. 从而 $\dim_K V \leq r$, 即 $\dim_K V \leq [G : H]$.

3

群的特征标

3.1 群的特征标的定义和基本性质

3.1.1 不可约表示核的交

习题 3.1 第 1 题

设 G 是有限群, 域 K 的特征不能整除 $|G|$. 设 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ 是 G 的所有不等价的不可约 K-表示, 证明:

$$\bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} \varphi_i = \{1\}.$$

解答

由于 $\operatorname{char} K \nmid |G|$, 因此 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ 都出现在 G 的正则表示 ρ 到它的不可约子表示的直和分解式中 (在等价的意义上). 设 φ_i 在 ρ 的直和分解式中出现 m_i 次, 则

$$\rho \simeq m_1\varphi_1 \oplus m_2\varphi_2 \oplus \cdots \oplus m_s\varphi_s.$$

在 ρ 的表示空间 $K[G]$ 中取一个基, 即 G 的全部元素, 则 ρ 在此基下提供的矩阵表示 P 为

$$SP(g)S^{-1} = \operatorname{diag}\{\underbrace{\Phi_1(g), \ldots, \Phi_1(g)}_{m_1 \text{ 个}}, \ldots, \underbrace{\Phi_s(g), \ldots, \Phi_s(g)}_{m_s \text{ 个}}\},$$

其中 S 是域 K 上的可逆矩阵. 于是

$$\begin{aligned} g \in \bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} \varphi_i &\Longleftrightarrow \varphi_i(g) = 1_{V_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, s \\ &\Longleftrightarrow \Phi_i(g) = I_{n_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, s \\ &\Longleftrightarrow P(g) = I \\ &\Longleftrightarrow \rho(g) = 1_{K[G]} \\ &\Longleftrightarrow gx = x, \quad \forall x \in G \\ &\Longleftrightarrow g = 1. \end{aligned}$$

因此

$$\bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} \varphi_i = \{1\}.$$

3.1.2 特征标的核

习题 3.1 第 2 题

设 χ 是有限群 G 的任一 K-表示 φ 提供的特征标, 定义

$$\operatorname{Ker} \chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}.$$

取 K 为复数域, 证明:

(1) $\operatorname{Ker} \chi = \operatorname{Ker} \varphi$;

(2) 设 $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_s$ 是 G 的所有不等价的不可约表示 φ_i 提供的特征标, 则

$$\bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} \chi_i = \{1\}.$$

解答

(1)

$$\operatorname{Ker} \chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\} = \{g \in G \mid \varphi(g) = 1_V\} = \operatorname{Ker} \varphi.$$

(2) 由第 1 题和本题的第 (1) 小题得

$$\bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} \chi_i = \bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} \varphi_i = \{1\}.$$

3.1.3 特征标中心的性质

习题 3.1 第 3 题

设 χ 是有限群 G 的 n 次复表示 (φ, V) 提供的特征标, 定义

$$Z(\chi) := \{g \in G \mid |\chi(g)| = \chi(1)\},$$

称 $Z(\chi)$ 是 χ 的中心, 证明:

(1) $Z(\chi)$ 是 G 的正规子群, 且 $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq Z(\chi)$;

(2) $g \in Z(\chi) \Longrightarrow g\operatorname{Ker}\varphi \in Z(G/\operatorname{Ker}\varphi)$;

(3) $Z(\chi)/\operatorname{Ker}\varphi \subseteq Z(G/\operatorname{Ker}\varphi)$, 且 $Z(\chi)/\operatorname{Ker}\varphi$ 是循环群;

(4) $\chi(1) = 1 \Longrightarrow Z(\chi) = G$.

解答

(1) 任取 $g \in Z(\chi)$, 则 $\varphi(g) = c1_V$. 显然 $Z(\chi) \leq G$. 对于任意 $x \in G$, 有

$$\varphi(xgx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(g)\varphi(x)^{-1} = \varphi(x)c1_V\varphi(x)^{-1} = c1_V,$$

其中 c 是 m 次单位根, m 是 G 的指数. 从而 $|\chi(xgx^{-1})| = \chi(1)$. 因此 $xgx^{-1} \in Z(\chi)$. 于是 $Z(\chi) \triangleleft G$.

任给 $g \in \operatorname{Ker}\varphi$, 则 $\varphi(g) = 1_V$. 从而 $\chi(g) = \chi(1)$, 因此 $g \in Z(\chi)$. 所以 $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq Z(\chi)$.

(2) 设 $g \in Z(\chi)$, 则根据第 (1) 小题的证明过程知道 $\varphi(g) = c1_V$, 并且对于任意 $x \in G$, 有 $\varphi(xgx^{-1}) = c1_V$. 从而 $\varphi(xgx^{-1}) = \varphi(g)$. 于是

$$\varphi(xgx^{-1}g^{-1}) = 1_V.$$

因此 $xgx^{-1}g^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi$. 由此得出 $g\operatorname{Ker}\varphi \in Z(G/\operatorname{Ker}\varphi)$.

(3) 任取 $g\operatorname{Ker}\varphi \in Z(\chi)/\operatorname{Ker}\varphi$, 则 $g \in Z(\chi)$. 根据 (2) 小题得 $g\operatorname{Ker}\varphi \in Z(G/\operatorname{Ker}\varphi)$. 因此

$$Z(\chi)/\operatorname{Ker}\varphi \subseteq Z(G/\operatorname{Ker}\varphi).$$

考虑 $Z(\chi)/\operatorname{Ker}\varphi$ 到 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个对应法则

$$\psi : g\operatorname{Ker}\varphi \longmapsto \varphi(g).$$

易证 ψ 是映射, 且保持运算, 因此 ψ 是 $Z(\chi)/\operatorname{Ker}\varphi$ 的一个表示. 由于 $g \in Z(\chi)$, 因此 $\varphi(g) = c_g 1_V$. 令

$$\widetilde{\psi}(g\operatorname{Ker}\varphi) = c_g,$$

则 $\widetilde{\psi}$ 是 $Z(\chi)/\operatorname{Ker}\varphi$ 到 $\mathbb{C}^*$ 的一个映射. 易证 $\widetilde{\psi}$ 是群同态. 从而 $\widetilde{\psi}$ 是 $Z(\chi)/\operatorname{Ker}\varphi$ 的

1 次复表示.
对于 $g,h\in Z(\chi)$, 若 $c_g=c_h$, 则 $\varphi(g)=\varphi(h)$. 从而 $g^{-1}h\in\operatorname{Ker}\varphi$. 于是 $g\operatorname{Ker}\varphi=h\operatorname{Ker}\varphi$. 因此 $\widetilde{\psi}$ 是单射. 从而 $\widetilde{\psi}$ 是忠实的. 由于 $Z(\chi)/\operatorname{Ker}\varphi$ 是有限 Abel 群, 因此根据习题 1.4 的第 3 题得, $Z(\chi)/\operatorname{Ker}\varphi$ 是循环群.
(4) 设 $\chi(1)=1$, 则 (φ,V) 是 G 的 1 次复表示. 对于任意 $g\in G$, 根据本节命题 6 得, $\chi(g)$ 是 m 次单位根, 其中 m 是群 G 的指数. 于是 $|\chi(g)|=1=\chi(1)$. 因此 $g\in Z(\chi)$. 从而 $Z(\chi)=G$.

3.1.4 不可约特征标中心与群中心

习题 3.1 第 4 题

设 χ 是有限群 G 的任一不可约复表示 (φ,V) 提供的特征标, 证明:

(1) $g\in Z(\chi)\Longleftrightarrow g\operatorname{Ker}\varphi\in Z(G/\operatorname{Ker}\varphi)$;

(2) $Z(G)\subseteq Z(\chi)$;

(3) $Z(\chi)/\operatorname{Ker}\varphi=Z(G/\operatorname{Ker}\varphi)$, 且 $Z(G/\operatorname{Ker}\varphi)$ 是循环群;

(4) $\chi(1)=1\Longleftrightarrow Z(\chi)=G$;

(5) $Z(G)=\bigcap\limits_{i=1}^{s}Z(\chi_i)$, 其中 $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_s$ 是 G 的所有不等价的不可约表示 $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_s$ 提供的特征标.

解答

(1) 令

$$\overline{\varphi}(g\operatorname{Ker}\varphi)=\varphi(g),\qquad \forall g\operatorname{Ker}\varphi\in G/\operatorname{Ker}\varphi,$$

则 $\overline{\varphi}$ 是 $G/\operatorname{Ker}\varphi$ 的一个不可约表示. 取 $g\operatorname{Ker}\varphi\in Z(G/\operatorname{Ker}\varphi)$, 则对于任意 $x\operatorname{Ker}\varphi\in G/\operatorname{Ker}\varphi$, 有

$$(g\operatorname{Ker}\varphi)(x\operatorname{Ker}\varphi)=(x\operatorname{Ker}\varphi)(g\operatorname{Ker}\varphi).$$

从而

$$\overline{\varphi}(g\operatorname{Ker}\varphi)\overline{\varphi}(x\operatorname{Ker}\varphi)=\overline{\varphi}(x\operatorname{Ker}\varphi)\overline{\varphi}(g\operatorname{Ker}\varphi).$$

于是

$$\varphi(g)\varphi(x)=\varphi(x)\varphi(g),\qquad \forall x\in G.$$

由于 $\varphi(g)$ 是 V 到自身的一个线性映射, 且 φ 不可约, 因此根据习题 2.4 的第 2 题得 $\varphi(g)=c1_V$, 对某个 $c\in\mathbb{C}$. 从而 $|\chi(g)|=\chi(1)$, 因此 $g\in Z(\chi)$.
反向由第 3 题的第 (2) 小题立即得到. 因此

$$g\in Z(\chi)\Longleftrightarrow g\operatorname{Ker}\varphi\in Z(G/\operatorname{Ker}\varphi).$$

(2) 任取 $g \in Z(G)$, 则对于任意 $x \in G$, 有 $gx = xg$. 于是

$$\varphi(g)\varphi(x) = \varphi(x)\varphi(g), \qquad \forall x \in G.$$

由于 φ 不可约, 因此根据习题 2.4 的第 2 题得 $\varphi(g) = c1_V$, 对某个 $c \in \mathbb{C}$. 从而 $g \in Z(\chi)$. 因此 $Z(G) \subseteq Z(\chi)$.
(3) 任取 $g\operatorname{Ker}\varphi \in Z(G/\operatorname{Ker}\varphi)$, 由 (1) 小题得 $g \in Z(\chi)$. 从而 $g\operatorname{Ker}\varphi \in Z(\chi)/\operatorname{Ker}\varphi$. 结合第 3 题的第 (3) 小题得

$$Z(\chi)/\operatorname{Ker}\varphi = Z(G/\operatorname{Ker}\varphi),$$

且 $Z(G/\operatorname{Ker}\varphi)$ 是循环群.
(4) 必要性. 由第 3 题的第 (4) 小题立即得到. 充分性. 设 $Z(\chi) = G$. 由 (3) 小题得

$$G/\operatorname{Ker}\varphi = Z(G/\operatorname{Ker}\varphi).$$

于是 $G/\operatorname{Ker}\varphi$ 是 Abel 群. 由于 $\overline{\varphi}$ 是 $G/\operatorname{Ker}\varphi$ 的一个不可约复表示, 因此 φ 是 1 次的. 从而 $\chi(1) = 1$.
(5) 由 (2) 小题得

$$Z(G) \subseteq \bigcap_{i=1}^{s} Z(\chi_i).$$

反之, 任取 $g \in \bigcap_{i=1}^{s} Z(\chi_i)$, 则 $\varphi_i(g) = c_i 1_{V_i}$, $i = 1, 2, \ldots, s$. 从而对于任意 $x \in G$,

$$\varphi_i(g)\varphi_i(x) = \varphi_i(x)\varphi_i(g), \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

于是

$$\varphi_i(xgx^{-1}g^{-1}) = 1_{V_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

因此 $xgx^{-1}g^{-1} \in \bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker}\varphi_i$. 根据第 2 题得 $xgx^{-1}g^{-1} = 1$. 于是 $g \in Z(G)$. 因此

$$Z(G) = \bigcap_{i=1}^{s} Z(\chi_i).$$

3.2 不可约特征标的正交关系及其应用

3.2.1 四个有限群的复特征标表

习题 3.2 第 1 题

求下列群的复特征标表:

(1) 二面体群 $D_4 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = \tau^2 = \mathrm{I},\ \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$;

(2) 四元数群 $Q = \langle i, j \mid i^4 = j^4 = 1,\ jij^{-1} = i^{-1} \rangle$;

(3) 交错群 A_4;

(4) 二面体群 $D_6 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^6 = \tau^2 = \mathrm{I},\ \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$.

解答

(1) 第二章习题 2.5 第 1 题已求出 D_4 的所有不等价的不可约复表示, 于是可以立即写出 D_4 的复特征标表如下:

	I	σ	σ^2	τ	$\sigma\tau$
χ_0	1	1	1	1	1
χ_1	1	-1	1	1	-1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1
χ_4	2	0	-2	0	0

(2) 第二章习题 2.5 第 2 题已求出四元数群 Q 的所有不等价的不可约复表示, 于是可写出 Q 的复特征标表:

	1	i	-1	j	ij
χ_0	1	1	1	1	1
χ_1	1	-1	1	1	-1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1
χ_4	2	0	-2	0	0

(3) 第二章习题 2.5 第 3 题已求出 A_4 的所有不等价的不可约复表示, 于是可以写出

A_4 的复特征标表:

	(1)	(12)(34)	(123)	(132)
χ_0	1	1	1	1
χ_1	1	1	ω	ω^2
χ_2	1	1	ω^2	ω
χ_3	3	-1	0	0

(4) 根据 [24] 第 80 页的第 14 题, D_6 的共轭类有 6 个:

$$\{\mathrm{I}\},\quad \{\sigma^3\},\quad \{\sigma,\sigma^5\},\quad \{\sigma^2,\sigma^4\},\quad \{\tau,\sigma^2\tau,\sigma^4\tau\},\quad \{\sigma\tau,\sigma^3\tau,\sigma^5\tau\}.$$

于是 D_6 有 6 个不等价的不可约复表示.
根据 [24] 第 66 页的第 10 题, $D_6' = \langle\sigma^2\rangle$. 因此

$$D_6/D_6' = \{\langle\sigma^2\rangle, \langle\sigma^2\rangle\sigma, \langle\sigma^2\rangle\tau, \langle\sigma^2\rangle\sigma\tau\}$$

是 4 阶 Abel 群. D_6/D_6' 的 4 个 1 次表示提升后便得到 D_6 的 4 个 1 次复表示 $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$, 其中 φ_0 是主表示, 且

$$\varphi_1(\sigma) = -1,\quad \varphi_1(\tau) = 1;\qquad \varphi_2(\sigma) = 1,\quad \varphi_2(\tau) = -1;$$

$$\varphi_3(\sigma) = -1,\quad \varphi_3(\tau) = -1.$$

由于 $12 = 1^2+1^2+1^2+1^2+2^2+2^2$, 因此 D_6 有两个不等价的 2 次不可约复表示. D_6 是正六边形的对称 (性) 群, 因此可求出 D_6 的一个 2 次不可约复表示 φ_4, 它提供的矩阵表示 Φ_4 为

$$\Phi_4(\sigma) = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix},\qquad \Phi_4(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

根据以上信息可写出 D_6 的复特征标表的前五行, 而第 6 行可以利用第二正交关系求

出:

	I	σ	σ^2	σ^3	τ	$\sigma\tau$
χ_0	1	1	1	1	1	1
χ_1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	-1	1
χ_4	2	1	-1	-2	0	0
χ_5	2	-1	-1	2	0	0

3.2.2 中心本原幂等元与类和

习题 3.2 第 2 题

设 G 是有限群, $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_s$ 是 G 的所有不相等的不可约复特征标; g_i 是 G 的共轭类 C_i 的代表元素, c_i 是 C_i 的所有元素的和 (称 c_i 为类和), $i = 1, 2, \ldots, s$; $e_1, e_2, \ldots, e_s$ 是群代数 $\mathbb{C}[G]$ 的全部本原中心幂等元. 证明:

$$c_i = |C_i| \sum_{j=1}^{s} \frac{\chi_j(g_i)}{\chi_j(1)} e_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

解答

$c_i \in Z(\mathbb{C}[G])$, $e_1, e_2, \ldots, e_s$ 是 $Z(\mathbb{C}[G])$ 的一个基, 因此可设

$$c_i = \sum_{j=1}^{s} k_j e_j.$$

于是对于 $l \in \{1, 2, \ldots, s\}$, 有

$$\chi_l^*(c_i) = \sum_{j=1}^{s} k_j \chi_l^*(e_j) = k_l \chi_l(1).$$

由此可解出 k_l:

$$k_l = \frac{\chi_l^*(c_i)}{\chi_l(1)} = \frac{|C_i| \chi_l(g_i)}{\chi_l(1)}, \qquad l = 1, 2, \ldots, s.$$

因此

$$c_i = |C_i| \sum_{j=1}^{s} \frac{\chi_j(g_i)}{\chi_j(1)} e_j.$$

3.2.3 循环群上的傅里叶展开

习题 3.2 第 3 题

设 $G=\langle a\rangle$ 是 n 阶循环群. 证明: G 上的任一复值函数 f 有如下的展开式:

$$f(a^r)=\sum_{j=0}^{n-1}k_j\xi^{rj},\qquad r=0,1,\dots,n-1,$$

其中 $\xi=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$, 且系数 k_j 为

$$k_j=\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}f(a^r)\xi^{-rj},\qquad j=0,1,\dots,n-1.$$

解答

设 $\xi=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$, 则 $G=\langle a\rangle$ 的对应于 a^j 的 1 次复特征标 χ_j 为

$$\chi_j(a)=\xi^j,\qquad j=0,1,2,\dots,n-1.$$

对于 $f\in\mathbb{C}^G$, 由于 $\chi_0,\chi_1,\dots,\chi_{n-1}$ 是 $\mathbb{C}^G$ 的一个标准正交基, 因此

$$f=\sum_{j=0}^{n-1}(f,\chi_j)\chi_j,$$

从而

$$f(a^r)=\sum_{j=0}^{n-1}(f,\chi_j)\chi_j(a^r)=\sum_{j=0}^{n-1}(f,\chi_j)\xi^{rj}.$$

其中

$$(f,\chi_j)=\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}f(a^r)\overline{\chi_j(a^r)}=\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}f(a^r)\xi^{-rj}.$$

取 $k_j=(f,\chi_j)$, 即得所要求的展开式和系数.

3.2.4 有限 Abel 群的傅里叶变换

习题 3.2 第 4 题

设 G 是有限 Abel 群, f 是 G 上的复值函数, 证明: f 是一个常值函数当且仅当 $\widehat{f}(g)=0$, $\forall g\in G$ 且 $g\neq 1$, 其中 $\widehat{f}$ 是 f 关于 G 的 Fourier 变换 τ 的像.

解答

必要性. 设 $f(g)=c,\ \forall g\in G$, 则当 $g\neq 1$ 时, 有

$$\widehat{f}(g)=\frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_{x\in G}f(x)\overline{\chi_g(x)}=\frac{c}{\sqrt{|G|}}\sum_{x\in G}\chi_1(x)\overline{\chi_g(x)}=0.$$

充分性. 设 $\widehat{f}(g)=0,\ \forall g\in G$ 且 $g\neq 1$, 则任给 $x\in G$, 有

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_{g\in G}\widehat{f}(g)\chi_g(x)=\frac{1}{\sqrt{|G|}}\widehat{f}(1)\chi_1(x)=\frac{1}{\sqrt{|G|}}\widehat{f}(1).$$

因此 f 是常值函数.

3.2.5 对称群的三次不可约特征标

习题 3.2 第 5 题

求 S_4 的一个 3 次不可约复特征标.

解答

根据 [24] 第 80 页的第 16 题, S_4 有 5 个共轭类, 其代表元素为

$$(1),\quad (12),\quad (12)(34),\quad (123),\quad (1234).$$

由于 S_4 是双传递置换群, 因此根据本节定理 7 得, S_4 有一个 3 次不可约复表示 ψ, 且

$$\chi_\psi((12))=2-1=1,$$

$$\chi_\psi((12)(34))=0-1=-1,$$

$$\chi_\psi((123))=1-1=0,$$

$$\chi_\psi((1234))=0-1=-1.$$

3.2.6 交错群的四次不可约特征标

习题 3.2 第 6 题

求交错群 A_5 的一个 4 次不可约复特征标.

解答

A_5 有 5 个共轭类, 其代表元素为

$$(1), \quad (12)(34), \quad (123), \quad (12345), \quad (13524).$$

根据本节推论 5, A_5 有一个 4 次不可约复表示 ψ, 且

$$\chi_\psi((12)(34)) = 1 - 1 = 0,$$

$$\chi_\psi((123)) = 2 - 1 = 1,$$

$$\chi_\psi((12345)) = \chi_4((13524)) = 0 - 1 = -1.$$

3.3 不可约复表示的次数满足的条件

3.3.1 极小多项式与理想

习题 3.3 第 1 题

设 α 是一个复数, 有理数域 $\mathbb{Q}$ 添加 α 得到的子环 (即 $\mathbb{C}$ 中包含 $\mathbb{Q}$ 和 α 的所有子环的交) 记作 $\mathbb{Q}[\alpha]$. 证明:

(1) 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的一元多项式环 $\mathbb{Q}[x]$ 中, 以 α 为复根的所有多项式组成的集合

$$I = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(\alpha) = 0\}$$

是 $\mathbb{Q}[x]$ 的一个理想; 若 $I \neq (0)$, 则 α 为代数数, 此时在 $\mathbb{Q}[x]$ 中以 α 为复根的所有非零多项式中次数最低的且首项系数为 1 的多项式 $p(x)$ 称为 α 在 $\mathbb{Q}$ 上的极小多项式, 说明 $p(x)$ 是 I 的一个生成元;

(2) 代数数 α 在 $\mathbb{Q}$ 上的极小多项式 $p(x)$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 中的不可约多项式.

解答

(1) 显然 I 对于减法封闭; 任取 $f(x) \in I, g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, 有 $f(\alpha)g(\alpha) = 0$, 因此 $f(x)g(x) \in I$. 从而 I 是 $\mathbb{Q}[x]$ 的一个理想. 由于 $\mathbb{Q}$ 是域, 因此根据 [24] 第 136 页的命题 2, I 是主理想; 若 $I \neq (0)$, 则 I 可以由首项系数为 1 的多项式生成. 由于 α 在 $\mathbb{Q}$ 上的极小多项式 $p(x)$ 是 I 中次数最低的非零多项式, 因此 $p(x)$ 是 I 的一个生成元.
(2) 假如 $p(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 则 $p(x) = p_1(x)p_2(x)$, 其中 $p_i(x) \in \mathbb{Q}[x]$, 且 $\deg p_i(x) < \deg p(x)$, $i = 1, 2$. 于是 $p_1(\alpha)p_2(\alpha) = 0$. 从而 $p_1(\alpha) = 0$ 或 $p_2(\alpha) = 0$. 这与 $p(x)$ 是 α 在 $\mathbb{Q}$ 上的极小多项式矛盾. 因此 $p(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

3.3.2 代数整数的极小多项式

习题 3.3 第 2 题

证明: 如果 α 是代数整数, 那么 α 在 $\mathbb{Q}$ 上的极小多项式 $p(x)$ 是首项系数为 1 的整系数多项式.

解答

设 α 是代数整数, 则存在首项系数为 1 的整系数多项式 $f(x)$, 使得 $f(\alpha)=0$. 于是 $f(x)\in I$, 从而 $p(x)\mid f(x)$. 由于 $f(x)$ 是首项系数为 1 的整系数多项式, 因此根据 [28] 第 94 页的命题 4 和 $\mathbb{Q}[x]$ 中的唯一因式分解定理, $f(x)$ 的分解式中某一个在 $\mathbb{Q}$ 上不可约的本原多项式 $q_j(x)$ 与 $p(x)$ 相伴. 由于 $q_j(x)$ 与 $p(x)$ 的首项系数都为 1, 因此 $q_j(x)=p(x)$. 从而 $p(x)$ 是整系数多项式.

3.4 不可约表示在群论中的应用

3.4.1 二阶不可约表示与有限单群

习题 3.4 第 1 题

证明: 若 G 是一般线性群 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ 的有限子群, 并且 G 是单群, 则 G 必为 Abel 群, 从而 G 是素数阶循环群.

解答

用反证法. 假如 G 是非 Abel 群. 任给 $A\in G$, 令 $A(\alpha):=A\alpha$, $\forall\alpha\in\mathbb{C}^2$, 则 $A\in\mathrm{GL}(\mathbb{C}^2)$. 令 $\varphi: A\longmapsto A$, 则 φ 是 G 到 $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^2)$ 的一个映射, 且 φ 保持乘法. 从而 φ 是 G 的一个 2 次复表示. 显然 φ 是单射, 因此 φ 是忠实的. 由于 G 是非 Abel 群, 因此它的忠实的 2 次表示 φ 不可约. 于是

$$\deg\varphi\mid|G|.$$

由于 $\deg\varphi=2$, 因此 G 有 2 阶元 A, 即 $A^2=I$, 且 $A\neq I$. 从而 A 的最小多项式 $m(\lambda)\mid\lambda^2-1$, 且 $m(\lambda)\neq\lambda-1$.

情形 1 $m(\lambda)=\lambda+1$. 此时 $A=-I$. 由于 $\{\pm I\}\triangleleft G$, 且 G 是单群, 因此 $G=\{\pm I\}$. 这与 G 是非 Abel 群矛盾.

情形 2 $m(\lambda)=\lambda^2-1$. 此时 ±1 是 $m(\lambda)$ 的全部复根. 从而 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 的全部复根是 ±1. 因此

$$A\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

行列式函数 det 是 G 到 $\mathbb{C}^*$ 的一个同态, 从而 det 是 G 的一个 1 次表示但不是主表示. 由于 $\det(A) = -1$, 因此 $\mathrm{Ker}(\det) \neq \{I\}$. 根据命题 3, 这与 G 是单群矛盾.
综上所述, G 是 Abel 群.

3.4.2 非 Abel 单群的二次表示

习题 3.4 第 2 题

证明: 任一非 Abel 有限单群 G 没有 2 次不可约复表示, 从而若非 Abel 有限群 G 有 2 次不可约复表示, 则 G 不是单群.

解答

若有限群 G 有 2 次不可约复表示 φ, 则 g 提供的矩阵表示 Φ 是 G 到 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ 的一个同态, 从而 $\mathrm{Ker}\,\Phi \triangleleft G$. 由于 G 是单群, 因此 $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{1\}$ 或 $\mathrm{Ker}\,\Phi = G$. 假如为后者, 则

$$\Phi(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \forall g \in G.$$

于是 Φ 可约, 矛盾. 因此 $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{1\}$. 从而

$$G \cong \mathrm{Im}\,\Phi.$$

而 $\mathrm{Im}\,\Phi < \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. 于是 G 同构于 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ 的有限子群. 根据第 1 题的结论, G 为 Abel 群.

4

群的表示的张量积，群的直积的表示

4.1 模的张量积

4.1.1 有理数与二阶循环群的张量积

习题 4.1 第 1 题

证明：$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 = 0$.

解答

$$r \otimes \overline{0} = 0; \qquad \frac{q}{p} \otimes \overline{1} = \frac{2q}{2p} \otimes \overline{1} = \frac{q}{2p} \otimes \overline{2 \cdot 1} = \frac{q}{2p} \otimes \overline{0} = 0.$$

4.1.2 双模与环的张量积

习题 4.1 第 2 题

设 S, R 都是有单位元的环，M 是 (S, R)-双模，证明：$M \otimes_R R \cong M$ 是左 S-模同构，也是右 R-模同构。

解答

类似于定理 5 的证法。

4.1.3 线性变换的张量积运算

习题 4.1 第 3 题

设 V, W 都是域 K 上线性空间，A, A_1, A_2 是 V 上的线性变换，B, B_1, B_2 是 W 上的线性变换，$I_V, I_W, I_{V\otimes_K W}$ 分别表示 $V, W, V \otimes_K W$ 上的恒等变换。证明：

(1) $(A_1 + A_2) \otimes B = A_1 \otimes B + A_2 \otimes B$;

(2) $A \otimes (B_1 + B_2) = A \otimes B_1 + A \otimes B_2$;

(3) $(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = A_1A_2 \otimes B_1B_2$;

(4) $(kA) \otimes B = A \otimes (kB) = k(A \otimes B), \quad k \in K$;

(5) $I_V \otimes I_W = I_{V\otimes_K W}$;

(6) 从 A, B 可逆可以推出 $A \otimes B$ 可逆，且 $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

解答

参看 [28] 第 813 页的定理 5。

4.1.4 标量扩张

习题 4.1 第 4 题

设 V 是域 K 上的线性空间，域 F 包含 K，证明：

(1) $F \otimes_K V$ 是域 F 上的线性空间，记作 V^F;

(2) 若 V 是 r 维的，其一个 K-基为 $v_1, v_2, \ldots, v_r$，则 V^F 是 r 维，且 $1 \otimes v_1, 1 \otimes v_2, \ldots, 1 \otimes v_r$ 是 V^F 的一个 F-基。

解答

(1) 由于域 F 可看成是 (F, K)-双模，V 是 (K, K)-双模，因此 $F \otimes_K V$ 是左 F-模，从而 $F \otimes_K V$ 是域 F 上的线性空间。

(2) 由于

$$V \cong \underbrace{K \oplus \cdots \oplus K}_{r\text{ 个}},$$

因此

$$F \otimes_K V \cong F \otimes_K K \oplus \cdots \oplus F \otimes_K K \cong \underbrace{F \oplus \cdots \oplus F}_{r\text{ 个}}.$$

这是左 F-模同构。从而

$$\dim_F(F \otimes_K V) = r(\dim_F F) = r.$$

易计算出对于任意 $f \in F, v \in V$，$f \otimes v$ 可由 $1 \otimes v_1, \ldots, 1 \otimes v_r$ 作 F-线性表出，因此 $1 \otimes v_1, \ldots, 1 \otimes v_r$ 是 V^F 的一个 F-基。

4.2 群的表示的张量积

4.2.1 一维表示与不可约表示的张量积

习题 4.2 第 1 题

设 (φ, V) 是群 G 的 1 次 K-表示，(ψ, W) 是 G 的 n 次不可约 K-表示，证明：$(\varphi \otimes \psi, V \otimes_K W)$ 是 G 的 n 次不可约 K-表示。

解答

由于 $\dim_K(V \otimes_K W) = (\dim_K V)(\dim_K W) = n$，因此 $\varphi \otimes \psi$ 是 G 的 n 次 K-表示。设 $\varphi, \psi, \varphi \otimes \psi$ 分别在 $V, W, V \otimes_K W$ 的相应基下提供的矩阵表示记作 $\Phi, \Psi, \Phi \otimes \Psi$，则 $\Phi(g) = (a(g))$。从而

$$(\Phi \otimes \Psi)(g) = \Phi(g) \otimes \Psi(g) = a(g)\Psi(g), \qquad \forall g \in G.$$

假如 $\varphi \otimes \psi$ 可约，则存在 n 阶可逆矩阵 S，使得对一切 $g \in G$，$S(\Phi \otimes \Psi)(g)S^{-1}$ 为分块上三角矩阵。由此得出对一切 $g \in G$，$S\Psi(g)S^{-1}$ 为分块上三角矩阵，从而 ψ 可约，矛盾。因此 $\varphi \otimes \psi$ 不可约。

4.2.2 共轭类大小的公式

习题 4.2 第 2 题

设 G 是有限群，$C_1, C_2, \ldots, C_s$ 是 G 的全部共轭类，$g_j \in C_j$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$。设 $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_s$ 是 G 的全部不相等的不可约复特征标。证明：

$$|C_j| = |G| \Big/ \sum_{l=1}^{s} \chi_l(g_j)\overline{\chi_l(g_j)}, \qquad j = 1, 2, \ldots, s.$$

解答

根据第二正交关系得

$$\frac{1}{|G|} \sum_{l=1}^{s} |C_j| \chi_l(g_j)\overline{\chi_l(g_j)} = 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, s.$$

由此得出

$$|C_j| = |G| \Big/ \sum_{l=1}^{s} \chi_l(g_j)\overline{\chi_l(g_j)}, \qquad j = 1, 2, \ldots, s.$$

4.2.3 由两个特征标构造表示表

习题 4.2 第 3 题

设有限群 G 有一个 1 次复特征标 χ_2 和一个 2 次不可约复特征标 χ_4，它们在 G 的共轭类代表元 $g_1 = 1, g_2, \ldots, g_7$ 上的取值如下：

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
χ_2	1	1	1	ω^2	ω	ω^2	ω
χ_4	2	-2	0	-1	-1	1	1

其中 $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}$。求：

(1) G 的复特征标表，以及 $|G|$；

(2) G 的各个共轭类的元素个数；

(3) G 的全部正规子群（指出每一个正规子群由哪些共轭类组成以及该正规子群的阶）；

(4) G 的换位子群 G'；

(5) G 的中心 $Z(G)$，G 是否为 Abel 群？

解答

(1) G 有 7 个共轭类，因此 G 有 7 个不相等的不可约复特征标 $\chi_1,\ldots,\chi_7$，其中 χ_1 是 G 的主特征标。令

$$\chi_3=\chi_2\chi_2,\qquad \chi_5=\chi_2\chi_4,\qquad \chi_6=\chi_2\chi_5,$$

则可写出 G 的复特征标表的前 6 行。为了求出第 7 行元素，我们需要首先求出 $\chi_7(g_1)$，然后利用第 j 列（$2\leq j\leq 7$）与第 1 列正交，便可求出第 7 行的其他元素。设 $\chi_7(g_1)=y$，则

$$|G|=1^2+1^2+1^2+2^2+2^2+2^2+y^2=15+y^2.$$

由于 G 的不可约复表示的次数是 $|G|$ 的因数，因此 $y\mid|G|$。从而 $y\mid 15$。于是 $y=1$ 或 3 或 5 或 15。g_2 所在的共轭类 C_2 的元素个数为

$$|C_2|=|G|\Big/\left[1^2+1^2+1^2+(-2)^2+(-2)^2+(-2)^2+|\chi_7(g_2)|^2\right]=|G|\Big/\left[15+|\chi_7(g_2)|^2\right].$$

由于 G 的复特征标表的第 2 列与第 1 列正交，因此

$$0=1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot(-2)+2\cdot(-2)+2\cdot(-2)+y\cdot\chi_7(g_2).$$

由此得出 $\chi_7(g_2)=\frac{9}{y}$。若 $y=1$，则 $\chi_7(g_2)=9,|G|=16$。此时

$$|C_2|=16/(15+9^2)\notin\mathbb{N}^*,$$

矛盾。若 $y=3$，则 $\chi_7(g_2)=3,|G|=24$。此时

$$|C_2|=24/(15+3^2)=1.$$

若 $y=5$，则 $\chi_7(g_2)=9/5,|G|=40$，此时

$$|C_2|=40\Big/\left[15+\left(\frac{9}{5}\right)^2\right]\notin\mathbb{N}^*,$$

矛盾。若 $y=15$，则 $\chi_7(g_2)=9/15,|G|=240$。此时

$$|C_2|=240\Big/\left[15+\left(\frac{9}{15}\right)^2\right]\notin\mathbb{N}^*,$$

矛盾。因此 $y=3,|G|=24,\chi_7(g_2)=3,|C_2|=1$。由于第 j 列（$3\leq j\leq 7$）与第 1 列

正交，因此可求出复特征标表第 7 行的其他元素：

$$T=\left(\begin{array}{c|ccccccc} & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 & g_7 \\ \hline \chi_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \chi_2 & 1 & 1 & 1 & \omega^2 & \omega & \omega^2 & \omega \\ \chi_3 & 1 & 1 & 1 & \omega & \omega^2 & \omega & \omega^2 \\ \chi_4 & 2 & -2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ \chi_5 & 2 & -2 & 0 & 1+\omega & 1+\omega^2 & \omega^2 & \omega \\ \chi_6 & 2 & -2 & 0 & 1+\omega^2 & 1+\omega & \omega & \omega^2 \\ \chi_7 & 3 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

(2) 根据上面的特征标表和习题 4.2 第 2 题，

$$|C_1|=1,\quad |C_2|=1,$$

$$|C_3|=|G|/(1^2+1^2+1^2+(-1)^2)=24/4=6,$$

$$|C_4|=24\Big/\left[1^2+\omega^2\omega+\omega\omega^2+(-1)^2+(1+\omega^2)(1+\omega)+(1+\omega)(1+\omega^2)\right]=24/6=4,$$

$$|C_5|=24\Big/\left[1^2+\omega\omega^2+\omega^2\omega+(-1)^2+(1+\omega^2)(1+\omega)+(1+\omega)(1+\omega^2)\right]=24/6=4,$$

$$|C_6|=24/(1^2+\omega^2\omega+\omega\omega^2+1^2+\omega^2\omega+\omega\omega^2)=4,$$

$$|C_7|=24/(1^2+\omega\omega^2+\omega^2\omega+1^2+\omega\omega^2+\omega^2\omega)=4.$$

(3) 设 χ_i 是由 G 的不可约复表示 φ_i 提供的特征标，$i=1,\ldots,7$。根据习题 3.1 第 2 题，$\operatorname{Ker}\varphi_i=\operatorname{Ker}\chi_i$，于是从表中看出

$$\operatorname{Ker}\varphi_1=G,\quad \operatorname{Ker}\varphi_2=C_1\cup C_2\cup C_3=\operatorname{Ker}\varphi_3,$$

$$\operatorname{Ker}\varphi_4=\operatorname{Ker}\varphi_5=\operatorname{Ker}\varphi_6=C_1=\{1\},\quad \operatorname{Ker}\varphi_7=C_1\cup C_2=\{1,g_2\}.$$

由于 G 的任一正规子群都是若干个 $\operatorname{Ker}\varphi_i$ 的交，因此 G 的全部正规子群如下：

$$\{1\},\quad G,\quad N_1=\{1,g_2\},\quad N_2=C_1\cup C_2\cup C_3,$$

其中 $|N_1|=2,|N_2|=8$。

(4) 由于 G 恰有 3 个 1 次复表示，因此 G/G' 含有 3 个 1 次表示。又由于 G/G' 是 Abel 群，因此 G/G' 与它的复特征标群同构。于是 $|G/G'|=3$。从而 $|G'|=8$。由于 $G'<G$，因此 $G'=N_2=C_1\cup C_2\cup C_3$.

(5) 根据习题 3.1 的第 4 题，$Z(G)=\bigcap_{i=1}^{7}Z(\chi_i)$。

$$Z(\chi_1)=G,\quad Z(\chi_2)=G,\quad Z(\chi_3)=G,$$

$$Z(\chi_4)=Z(\chi_5)=Z(\chi_6)=C_1\cup C_2=\{1,g_2\},\quad Z(\chi_7)=\{1,g_2\}.$$

从而 $Z(G)=\{1,g_2\}$。因此 G 是非 Abel 群。

4.3 群的直积的表示

4.3.1 初等 Abel 群的特征标表

习题 4.3 第 1 题

求群 $G=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 的复特征标表。

解答

$$H_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

于是 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 的复特征标表为

$$H_4=\begin{pmatrix}H_2 & H_2\\ H_2 & -H_2\end{pmatrix},$$

从而 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 的复特征标表为

$$H_8=\begin{pmatrix}H_4 & H_4\\ H_4 & -H_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}H_2 & H_2 & H_2 & H_2\\ H_2 & -H_2 & H_2 & -H_2\\ H_2 & H_2 & -H_2 & -H_2\\ H_2 & -H_2 & -H_2 & H_2\end{pmatrix}.$$

4.3.2 十五阶群的特征标表

习题 4.3 第 2 题

求 15 阶群 G 的复特征标表（提示：根据 [24] 第 85 页的 Sylow 第三定理，G 的 Sylow 3-子群的个数为 $1+3k$ 且 $1+3k\mid 5$。于是 $k=0$。从而 G 的 Sylow 3-子群只有一个 P，于是 $P\triangleleft G$。同理可得，G 的 Sylow 5-子群的个数为 1。于是 G 的 Sylow 5-子群

$Q \triangleleft G$。显然 $P \cap Q = \{1\}$，从而 $|PQ| = \frac{|P||Q|}{|P \cap Q|} = 15$。于是 $G = PQ$。由于 $P \triangleleft G, Q \triangleleft G$，因此对于任意 $a \in P, b \in Q$，有 $aba^{-1}b^{-1} \in P \cap Q$。从而 $aba^{-1}b^{-1} = 1$。这表示 P 的元素与 Q 的元素可交换。根据 [24] 第 47 页的定理 4 得 $G \cong P \times Q$。于是可从 P, Q 的复特征标表得出 G 的复特征标表。解法二：设 $P = \langle a \rangle, Q = \langle b \rangle$。易求出 ab 的阶为 15，因此 G 是 15 阶循环群。从而可以直接写出 G 的复特征标表。）

解答

解法一　G 的 Sylow 3-子群 $P \triangleleft G$，G 的 Sylow 5-子群 $Q \triangleleft G$，$G \cong P \times Q$。P 的复特征标表为

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}, \qquad \omega = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}.$$

Q 的复特征标表为

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \xi & \xi^3 \\ 1 & \xi^3 & \xi & \xi^4 & \xi^2 \\ 1 & \xi^4 & \xi^3 & \xi^2 & \xi \end{pmatrix}, \qquad \xi = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{5}}.$$

于是 G 的复特征标表 $T = T_1 \otimes T_2$。请读者详细写出 $T_1 \otimes T_2$。

解法二　设 $P = \langle a \rangle, Q = \langle b \rangle$。由于 $ab = ba$，且 a 的阶 3 与 b 的阶 5 互素，因此 ab 的阶为 15。从而 G 是 15 阶循环群，于是可以直接写出 G 的复特征标表。

4.4 不可约复表示的次数满足的又一条件

4.4.1 特征标中心的次数条件

习题 4.4 第 1 题

设 (φ, V) 是有限群 G 的任一个不可约复表示，φ 提供的特征标记作 χ。证明：

(1) $\chi(1) \mid [G : Z(\chi)]$;

(2) $\chi(1)^2 \leq [G : Z(\chi)]$，等号成立当且仅当对一切 $y \in G \backslash Z(\chi)$ 有 $\chi(y) = 0$;

(3) 若 $G' \subseteq Z(\chi)$，则 $\chi(1)^2 = [G : Z(\chi)]$.

解答

(1) 根据习题 3.1 的第 3 题和第 4 题知：$Z(\chi) \triangleleft G$，并且 $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq Z(\chi)$，还有

$$Z(\chi)/\operatorname{Ker}\varphi = Z(G/\operatorname{Ker}\varphi).$$

根据本节定理 1 知，$G/\operatorname{Ker}\varphi$ 的任一个不可约复表示的次数能整除

$$[G/\operatorname{Ker}\varphi : Z(G/\operatorname{Ker}\varphi)] = [G/\operatorname{Ker}\varphi : Z(\chi)/\operatorname{Ker}\varphi] = [G : Z(\chi)].$$

由 G 的表示 φ 可得到 $G/\operatorname{Ker}\varphi$ 的表示 $\widetilde{\varphi}$ 使得 φ 是 $\widetilde{\varphi}$ 的提升，它们有相同的次数：

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{GL}(V) \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \nearrow_{\widetilde{\varphi}} & \\ G/\operatorname{Ker}\varphi & & \end{array}$$

因此 $\chi(1) \mid [G : Z(\chi)]$。

(2) 由于 χ 不可约，因此 $(\chi, \chi) = 1$。从而

$$\begin{aligned} [G : Z(\chi)]|Z(\chi)| &= |G| \\ &= \sum_{g \in Z(\chi)} \chi(g)\overline{\chi(g)} + \sum_{g \notin Z(\chi)} \chi(g)\overline{\chi(g)} \\ &= \chi(1)^2|Z(\chi)| + \sum_{g \notin Z(\chi)} |\chi(g)|^2 \\ &\geq \chi(1)^2|Z(\chi)|. \end{aligned}$$

由此得出 $\chi(1)^2 \leq [G : Z(\chi)]$，等号成立当且仅当 $\forall g \notin Z(\chi)$ 有 $\chi(g) = 0$。

(3) 只要证对一切 $y \notin Z(\chi)$ 有 $\chi(y) = 0$。利用习题 3.1 的第 4 题的结果：$g \in Z(\chi)$ 当且仅当 $g\operatorname{Ker}\varphi \in Z(G/\operatorname{Ker}\varphi)$。于是从 $g \notin Z(\chi)$ 推出：存在 $h \in G$ 使得

$$(g\operatorname{Ker}\varphi)(h\operatorname{Ker}\varphi) \neq (h\operatorname{Ker}\varphi)(g\operatorname{Ker}\varphi),$$

即 $g^{-1}h^{-1}gh \notin \operatorname{Ker}\varphi$。记 $a = g^{-1}h^{-1}gh$，则 $a \in G' \subseteq Z(\chi)$。从而 $|\chi(a)| = \chi(1)$。所以

$$\varphi(a) = \lambda 1_V,$$

其中 λ 是单位根。由于 $a \notin \operatorname{Ker}\varphi$，因此 $\lambda \neq 1$。由于

$$\lambda 1_V = \varphi(a) = \varphi(g)^{-1}\varphi(h)^{-1}\varphi(g)\varphi(h),$$

因此 $\lambda\varphi(g) = \varphi(h)^{-1}\varphi(g)\varphi(h)$。两边取迹得 $\lambda\chi(g) = \chi(g)$。由此得出 $\chi(g) = 0$。由此得出 (2) 中的等号成立。

5

诱导表示和诱导特征标

5.1 诱导表示

5.1.1 诱导模的陪集分块

习题 5.1 第 1 题

设 K 是任一域, H 是群 G 的正规子群, H 在 G 中的陪集代表系是 $\{g_1 = 1, g_2, \ldots, g_t\}$. 设 (ψ, W) 是 H 的一个 K-表示, 证明: 对于 $1 \leq i \leq t$, 有

(1) $g_iK[H] \otimes_{K[H]} W$ 是左 $K[H]$-模;

(2) $g_iK[H] \otimes_{K[H]} W$ 提供的 H 的表示 ψ_i 的次数等于 ψ 的次数.

解答

(1) 任给 $h \in H$, 对于任意 $h' \in H$, 由于 $H \lhd G$, 因此有

$$h(g_ih') = g_i(g_i^{-1}hg_i)h' \in g_iK[H].$$

从而 $g_iK[H]$ 成为左 $K[H]$-模. 于是 $g_iK[H] \otimes_{K[H]} W$ 是左 $K[H]$-模.

(2) 在定理 1 中已证明有 K-模同构

$$g_iK[H] \otimes_{K[H]} W \cong W.$$

因此

$$\dim_K \left[g_iK[H] \otimes_{K[H]} W\right] = \dim_K W.$$

从而左 $K[H]$-模 $g_iK[H] \otimes_{K[H]} W$ 提供的 H 的表示 ψ_i 的次数等于 ψ 的次数.

5.1.2 诱导模上的子群作用

习题 5.1 第 2 题

设 K 是任一域, H 是群 G 的子群, H 在 G 中的左陪集代表系是 $\{g_1 = 1, g_2, \ldots, g_t\}$. 设 W 是左 $K[H]$-模. 令

$$W_i = g_iK[H] \otimes_{K[H]} W,$$

从定理 1 的证明知道, W_i 是左 K-模, 即域 K 上的线性空间. 从 (7) 式可看出, W_i 可

看成 W^G 的子空间 (在同构的意义上), $i=1,2,\ldots,t$. 令

$$\Omega=\{W_1,W_2,\ldots,W_t\}.$$

证明: 左 $K[G]$-模 W^G 诱导了 G 在 Ω 上的一个作用, 由此得到的 G 的置换表示等价于 H 的主表示的诱导表示.

解答

任给 $g\in G$, 任给 $i\in\{1,2,\ldots,t\}$, 有 $gg_i=g_lh$, 对某个 $l\in\{1,2,\ldots,t\}$ 和某个 $h\in H$. 于是规定

$$gW_i:=W_l. \tag{1}$$

任给 $x\in G$, $(xg)g_i=x(gg_i)=x(g_lh)=(xg_l)h=g_jh'$, 其中 $xg_l=g_jh'$, 对某个 $j\in\{1,2,\ldots,t\}$ 和某个 $h'\in H$. 于是

$$(xg)W_i=W_j.$$

又有 $x(gW_i)=x(W_l)=W_j$, 因此 $(xg)W_i=x(gW_i)$. 显然 $1W_i=W_i$. 因此 (1) 式规定了群 G 在集合 Ω 上的一个作用.
由这个作用得到的 G 的 t 次置换表示 φ 提供的矩阵表示 Φ 使得对每个 $g\in G$, $\Phi(g)$ 是 t 阶置换矩阵. 根据 (1) 式, $\Phi(g)$ 的 (l,i) 元为 1.
根据本节命题 21, H 的主表示 1_H 的诱导表示 $(1_H)^G$ 提供的矩阵表示 A 使得 $A(g)$ 的 (l,i) 元为

$$1_H(g_l^{-1}gg_i).$$

由于 $g_l^{-1}gg_i=h\in H$, 因此 $1_H(g_l^{-1}gg_i)=1$. 由此得出 $\Phi(g)=A(g)$, 因此 φ 与 $(1_H)^G$ 等价.

5.1.3 陪集空间的置换表示

习题 5.1 第 3 题

设 K 是任一域, H 是群 G 的子群, 并且 $[G:H]=t$. 把 H 在 G 中的所有左陪集组成的集合记作 G/H. 对于 $g\in G, aH\in G/H$, 规定

$$g(aH):=(ga)H.$$

显然, 这给出了 G 在集合 G/H 上的一个作用. 证明: 从这个作用得到的 G 的置换表示等价于 H 的主表示 1_H 的诱导表示 $(1_H)^G$.

解答

证法与第 2 题的证法类似.

5.2 诱导特征标

5.2.1 四元数群的诱导特征标

习题 5.2 第 1 题

设 Q 为四元数群, 即

$$Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\},$$

其中 $k = ij$. 设 $H = \langle i \rangle$.

(1) 设 ψ_1 是 H 的 1 次复表示, 其中 $\psi_1(i) = -1$. 证明: ψ_1^Q 是 Q 的两个 1 次表示的直和;

(2) 设 ψ_2 是 H 的 1 次复表示, 其中 $\psi_2(i) = i$, 证明: ψ_2^Q 是 Q 的 2 次不可约复表示. 从而 Q 的唯一的 2 次不可约复表示是单项表示.

解答

四元数群 Q 有 5 个共轭类:

$$\{1\}, \quad \{-1\}, \quad \{i, -i\}, \quad \{j, -j\}, \quad \{k, -k\}.$$

$H = \langle i \rangle$ 在 Q 中的左陪集分解式为

$$Q = H \cup jH.$$

(1) $\psi_1(i) = -1$, 因此

$$\mu_1(i) = -1, \qquad \mu_1(i^2) = 1, \qquad \mu_1(i^3) = -1.$$

由诱导特征标公式得

$$\begin{aligned}
\mu_1^Q(1) &= 2, \\
\mu_1^Q(-1) &= \mu_1(-1) + \mu_1(j^{-1}(-1)j) = 1 + 1 = 2, \\
\mu_1^Q(i) &= \mu_1(i) + \mu_1(j^{-1}ij) = -1 + \mu_1(-i) = -2, \\
\mu_1^Q(j) &= 0, \qquad \mu_1^Q(k) = \mu_1(-k) = 0.
\end{aligned}$$

从四元数群 Q 的复特征标表 (见习题 3.2 的第 1 题的第 (2) 小题) 得

$$\mu_1^Q = \chi_1 + \chi_3.$$

因此 $\psi_1^Q \simeq \varphi_1 \oplus \varphi_3$.
(2) $\psi_2(i) = i$, 因此

$$\mu_2(i) = i, \quad \mu_2(-1) = \mu_2(i^2) = -1, \quad \mu_2(-i) = \mu_2(i^3) = -i.$$

于是

$$\begin{aligned} &\mu_2^Q(1) = 2, && \mu_2^Q(-1) = -2, \\ &\mu_2^Q(i) = i + \mu_2(-i) = 0, && \mu_2^Q(j) = 0, \quad \mu_2^Q(k) = 0. \end{aligned}$$

由此看出 μ_2^Q 等于 Q 的 2 次不可约特征标. 因此

$$\psi_2^Q \simeq \varphi_4,$$

是 Q 的 2 次不可约复表示.

5.2.2 交错群的三次不可约表示

习题 5.2 第 2 题

设 $G = \mathrm{A}_4$,

$$H = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

设 ψ 是 H 的任一非平凡的 1 次复表示. 证明: ψ^G 是 G 的 3 次不可约复表示, 从而 G 的唯一的 3 次不可约复表示是单项表示.

解答

$G = \mathrm{A}_4$ 有 4 个共轭类, 其代表元素为

$$(1), \quad (12)(34), \quad (123), \quad (132).$$

H 在 G 中的左陪集分解式为

$$G = H \cup (123)H \cup (132)H.$$

取 H 的一个非平凡的 1 次复表示 ψ, 它提供的特征标 μ 为

$$\mu((1)) = 1, \quad \mu((12)(34)) = -1, \quad \mu((13)(24)) = 1, \quad \mu((14)(23)) = -1.$$

于是

$$\mu^G((1)) = 3,$$

且

$$\begin{aligned}\mu^G((12)(34)) &= \mu((12)(34)) + \mu((123)^{-1}(12)(34)(123)) \\ &\quad + \mu((132)^{-1}(12)(34)(132)) \\ &= -1 + \mu((13)(24)) + \mu((14)(23)) = -1,\end{aligned}$$

而

$$\mu^G((123)) = 0, \qquad \mu^G((132)) = 0.$$

因此 $\mu^G = \chi_3$(见习题 3.2 第 1 题的第 (3) 小题). 从而 ψ^G 是 G 的 3 次不可约复表示.

5.3 Frobenius 互反律

5.3.1 Abel 群中特征标次数的整除性

习题 5.3 第 1 题

设 G 是有限 Abel 群, $H \lhd G$. χ 是 G 的复特征标. 证明: 如果对于 $g \notin H$, 有 $\chi(g) = 0$, 那么 $[G : H] \mid \chi(1)$.

解答

设 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ 是 H 的全部不同不可约复特征标. 根据本节命题 1, 对于每一个 μ_i, 存在 G 的不可约复特征标 χ_i, 使得 $\mu_i = \chi_i|_H$. 设

$$\chi|_H = \sum_{j=1}^{s} m_j \mu_j.$$

则

$$\chi(1) = \sum_{j=1}^{s} m_j \mu_j(1) = \sum_{j=1}^{s} m_j.$$

由于对于任意 $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, 有

$$\begin{aligned}(\chi, \chi_i)_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi_i(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in H} \chi(h)\overline{\chi_i(h)} \\ &= \frac{|H|}{|G|}(\chi|_H, \chi_i|_H)_H = \frac{1}{[G : H]}(\chi|_H, \mu_i)_H \\ &= \frac{1}{[G : H]} \left(\sum_{j=1}^{s} m_j \mu_j, \mu_i \right)_H = \frac{m_i}{[G : H]},\end{aligned}$$

所以 $[G:H] \mid m_i,\ i=1,2,\ldots,s.$ 从而 $[G:H] \mid \chi(1).$

5.3.2 对称群S_4的特征标表

习题 5.3 第 2 题

设 $G=\mathrm{S}_4.$ 记

$$N=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}.$$

显然 $N \lhd \mathrm{S}_4.$ 令 $H=\langle(12)\rangle N.$

(1) 证明: $H \cong D_4$, 其中 D_4 是 8 阶二面体群;

(2) 证明: H 的某个 1 次复特征标的诱导特征标是 S_4 的 3 次不可约复特征标;

(3) 证明: A_4 的非平凡的 1 次复特征标的诱导特征标是 S_4 的 2 次不可约复特征标;

(4) 求 S_4 的复特征标表.

解答

(1) 由于

$$(12)(13)(24)=(1324),$$

因此 H 有 4 阶元素. 设

$$a=(1324), \qquad b=(13)(24),$$

则

$$bab^{-1}=(13)(24)(1324)(13)(24)=(3142)=a^{-1}.$$

于是

$$H=\langle a,b \mid a^4=b^2=(1),\ bab^{-1}=a^{-1}\rangle.$$

因此 $H \cong D_4.$

(2) 由于 $H \cong D_4$, 因此 H 有 5 个共轭类:

$$\{(1)\},\quad \{a^2\},\quad \{a,a^3\},\quad \{b,a^2b\},\quad \{ab,a^3b\}.$$

取 H 的一个 1 次复特征标 μ_1, 使得

$$\mu_1((1))=1,\quad \mu_1(a)=1,\quad \mu_1(a^2)=1,\quad \mu_1(b)=-1,\quad \mu_1(ab)=-1.$$

H 在 S_4 中的左陪集分解式为

$$\mathrm{S}_4=H\cup(13)H\cup(14)H.$$

S_4 的共轭类有 5 个, 其代表元素分别为

$$(1),\quad (12),\quad (12)(34),\quad (123),\quad (1234),$$

各个共轭类的元素个数依次为 $1,6,3,8,6$. 由诱导特征标公式得

$$\mu_1^G((1))=3,\qquad \mu_1^G((12))=-1,\qquad \mu_1^G((12)(34))=-1,$$

$$\mu_1^G((123))=0,\qquad \mu_1^G((1234))=1.$$

于是

$$(\mu_1^G,\mu_1^G)_G=\frac{1}{24}\left[3^2+6(-1)^2+3(-1)^2+6\cdot 1^2\right]=1.$$

因此 μ_1^G 是 S_4 的 3 次不可约复特征标.

(3) 取 A_4 的一个非平凡 1 次复特征标 μ_2, 其中

$$\mu_2((1))=1,\quad \mu_2((12)(34))=1,\quad \mu_2((123))=\omega,\quad \mu_2((132))=\omega^2.$$

A_4 在 S_4 中的左陪集分解式为

$$\mathrm{S}_4=\mathrm{A}_4\cup(12)\mathrm{A}_4.$$

由于 $\mathrm{A}_4\lhd\mathrm{S}_4$, 因此对于 $\sigma\notin\mathrm{A}_4$, $\mu_2^G(\sigma)=0$. 从而

$$\mu_2^G((12))=0,\qquad \mu_2^G((12)(34))=2,$$
$$\mu_2^G((123))=\omega+\omega^2=-1,\qquad \mu_2^G((1234))=0.$$

因此

$$(\mu_2^G,\mu_2^G)_G=\frac{1}{24}\left[2^2+3\cdot 2^2+8\cdot(-1)^2\right]=1,$$

所以 μ_2^G 是 S_4 的一个 2 次不可约复特征标.

(4) S_4 有 5 个不可约复表示. 由于 $\mathrm{S}_4'=\mathrm{A}_4$, 因此 S_4 恰有两个 1 次表示: 主表示 φ_0 和符号表示 φ_1. 上面求出了 S_4 的一个 3 次不可约复特征标和一个 2 次不可约复特征标. 由于

$$|\mathrm{S}_4|=24=1^2+1^2+2^2+3^2+3^2,$$

因此 S_4 还有一个 3 次不可约复特征标. 由 S_4 的标准置换表示和第二正交关系可得特

征标表

	(1)	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
χ_0	1	1	1	1	1
χ_1	1	-1	1	1	-1
χ_2	2	0	2	-1	0
χ_3	3	-1	-1	0	1
χ_4	3	1	-1	0	-1

5.3.3 诱导特征标在共轭类上的计算

习题 5.3 第 3 题

设 G 是有限群, $H < G$, μ 是 H 的一个复特征标, C 是 G 的一个共轭类. 证明:

(1) 若 $C \cap H = \varnothing$, 则对于 $g \in C$, 有 $\mu^G(g) = 0$;

(2) 若 $C \cap H \neq \varnothing$, 显然 $C \cap H$ 是 H 的若干个共轭类的并集, 设 $C \cap H$ 包含的 H 的共轭类的代表系是 $h_1, \ldots, h_r$, 则对于 $g \in C$, 有

$$\mu^G(g) = \frac{|G|}{|C|} \sum_{i=1}^{r} \frac{\mu(h_i)}{|C_H(h_i)|},$$

其中 $C_H(h_i)$ 是 h_i 在 H 里的中心化子, $|C_H(h_i)|$ 等于 $|H|$ 除以 h_i 在 H 中的共轭类的元素个数.

解答

(1) 设 $C \cap H = \varnothing$. 对于 $g \in C$, 任意 $a \in G$, 都有 $a^{-1}ga \in C$, 从而 $a^{-1}ga \notin H$. 因此由诱导特征标公式

$$\mu^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{a \in G} \mu(a^{-1}ga) = 0.$$

(2) 设 $C \cap H \neq \varnothing$, 取 $g \in C$. 记

$$C_G(g) = \{a \in G \mid aga^{-1} = g\}.$$

根据共轭类公式, $|C| = [G : C_G(g)]$. 对于 $x, y \in G$, 有

$$x^{-1}gx = y^{-1}gy \Longleftrightarrow yx^{-1}gxy^{-1} = g \Longleftrightarrow yx^{-1} \in C_G(g).$$

因此 G 中使 $x^{-1}gx$ 取定值的 x 有 $|C_G(g)|$ 个. 把 H 中包含 h_i 的共轭类记作 B_i,

$i=1,2,\dots,r$. 则

$$|B_i|=\frac{|H|}{|C_H(h_i)|}.$$

由诱导特征标公式, 按照 H 的共轭类分组求和, 得

$$\begin{aligned}\mu^G(g)&=\frac{1}{|H|}\sum_{a\in G}\mu(a^{-1}ga)\\&=\frac{|C_G(g)|}{|H|}\sum_{i=1}^{r}\sum_{z\in B_i}\mu(z)\\&=\frac{|C_G(g)|}{|H|}\sum_{i=1}^{r}\mu(h_i)|B_i|\\&=|C_G(g)|\sum_{i=1}^{r}\frac{\mu(h_i)}{|C_H(h_i)|}\\&=\frac{|G|}{|C|}\sum_{i=1}^{r}\frac{\mu(h_i)}{|C_H(h_i)|}.\end{aligned}$$

5.3.4 交错群A_5的特征标表

习题 5.3 第 4 题

求交错群 A_5 的复特征标表.

解答

交错群 A_5 有 5 个共轭类 C_1,C_2,C_3,C_4,C_5, 其代表元素为

$$(1),\quad (12)(34),\quad (123),\quad (12345),\quad (13524),$$

各个共轭类的元素个数依次为

$$1,\quad 15,\quad 20,\quad 12,\quad 12.$$

由于 A_5 是双传递置换群, 因此 A_5 有一个 4 次不可约表示 ψ, 其特征标 χ_ψ 在上述 5 个共轭类上的取值为

$$(4,0,1,-1,-1).$$

把 A_4 看成 A_5 的子群, 记 $G=\mathrm{A}_5$. 取 A_4 的一个非平凡 1 次复特征标 ν, 其中

$$\nu((12)(34))=1,\quad \nu((123))=\omega,\quad \nu((132))=\omega^2.$$

由于 $[\mathrm{A}_5:\mathrm{A}_4]=60/12=5$, 因此 $\nu^G(1)=5$. 又

$$C_2\cap\mathrm{A}_4=\{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\},$$

故

$$\nu^G((12)(34))=\frac{60}{15}\frac{\nu((12)(34))}{4}=1.$$

由于 $C_3\cap\mathrm{A}_4$ 是 A_4 的两个共轭类的并集, 因此

$$\nu^G((123))=\frac{60}{20}\left[\frac{\nu((123))}{3}+\frac{\nu((132))}{3}\right]=\omega+\omega^2=-1.$$

又因为 $C_4\cap\mathrm{A}_4=C_5\cap\mathrm{A}_4=\varnothing$, 所以

$$\nu^G((12345))=\nu^G((13524))=0.$$

于是

$$(\nu^G,\nu^G)_G=\frac{1}{60}\left[5^2+15\cdot1^2+20\cdot(-1)^2\right]=1,$$

因此 ν^G 是 G 的不可约复特征标.
取 $H=\langle(12345)\rangle$. 取 H 的一个非平凡 1 次复特征标 μ, 其中

$$\mu((12345))=\varepsilon,\quad \mu((13524))=\varepsilon^2,\quad \mu((14253))=\varepsilon^3,\quad \mu((15432))=\varepsilon^4,\qquad \varepsilon=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{5}}.$$

由于 $[\mathrm{A}_5:H]=12$, 有 $\mu^G(1)=12$. 又 $C_2\cap H=C_3\cap H=\varnothing$, 因此

$$\mu^G((12)(34))=\mu^G((123))=0.$$

容易求出

$$C_4\cap H=\{(12345),(15432)\},\qquad C_5\cap H=\{(13524),(14253)\}.$$

于是

$$\mu^G((12345))=\frac{60}{12}\left[\frac{\mu((12345))}{5}+\frac{\mu((15432))}{5}\right]=\varepsilon+\varepsilon^4,$$
$$\mu^G((13524))=\frac{60}{12}\left[\frac{\mu((13524))}{5}+\frac{\mu((14253))}{5}\right]=\varepsilon^2+\varepsilon^3.$$

由 Frobenius 互反律,

$$(\mu^G,\chi_0)_G=0,\qquad (\mu^G,\chi_\psi)_G=1,\qquad (\mu^G,\nu^G)_G=1.$$

因此 $\mu^G-\chi_\psi-\nu^G$ 是 G 的一个复特征标, 记作 χ_1. 其次数和在各共轭类上的取值为

$$\begin{aligned}\chi_1(1)&=12-4-5=3,\\ \chi_1((12)(34))&=0-0-1=-1,\qquad \chi_1((123))=0-1-(-1)=0,\\ \chi_1((12345))&=(\varepsilon+\varepsilon^4)-(-1)-0=1+\varepsilon+\varepsilon^4,\\ \chi_1((13524))&=(\varepsilon^2+\varepsilon^3)-(-1)-0=1+\varepsilon^2+\varepsilon^3.\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}(\chi_1,\chi_1)_G=\frac{1}{60}\Big[&3^2+15(-1)^2\\ &+12(1+\varepsilon+\varepsilon^4)(1+\varepsilon^4+\varepsilon)\\ &+12(1+\varepsilon^2+\varepsilon^3)(1+\varepsilon^3+\varepsilon^2)\Big]=1.\end{aligned}$$

因此 χ_1 是 G 的 3 次不可约复特征标. 由于

$$60=1^2+3^2+4^2+5^2+3^2,$$

G 还有一个 3 次不可约复特征标, 记作 χ_2. 于是 A_5 的复特征标表为

	(1)	$(12)(34)$	(123)	(12345)	(13524)
χ_0	1	1	1	1	1
χ_1	3	-1	0	$1+\varepsilon+\varepsilon^4$	$1+\varepsilon^2+\varepsilon^3$
χ_2	3	-1	0	$1+\varepsilon^2+\varepsilon^3$	$1+\varepsilon+\varepsilon^4$
χ_3	4	0	1	-1	-1
χ_4	5	1	-1	0	0

其中

$$1+\varepsilon+\varepsilon^4=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\qquad 1+\varepsilon^2+\varepsilon^3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

5.4 诱导特征标不可约的判定

5.4.1 双陪集与主特征标内积

习题 5.4 第 1 题

设 $\{g_1,g_2,\dots,g_t\}$ 是 (L,H) 在 G 里的双陪集代表系, 令

$$L_i=L\cap g_iHg_i^{-1},\qquad i=1,2,\dots,t.$$

对任意 $y \in g_i H g_i^{-1}$, 有

$$1_H^{(i)}(y) = 1_H(g_i^{-1} y g_i) = 1,$$

因此 $1_H^{(i)} = 1_{g_i H g_i^{-1}}$, 从而 $1_H^{(i)}|_{L_i} = 1_{L_i}$. 考虑复数域, 根据 Mackey 子群定理得

$$\left((1_L)^G, (1_H)^G\right)_G = \sum_{i=1}^{t} \left(1_L|_{L_i}, 1_H^{(i)}|_{L_i}\right)_{L_i} = \sum_{i=1}^{t} (1_{L_i}, 1_{L_i})_{L_i} = t.$$

解答

根据 Mackey 子群定理,

$$\begin{aligned}\left((1_L)^G, (1_H)^G\right)_G &= \sum_{i=1}^{t} \left(1_L|_{L_i}, 1_H^{(i)}|_{L_i}\right)_{L_i} \\ &= \sum_{i=1}^{t} (1_{L_i}, 1_{L_i})_{L_i} = \sum_{i=1}^{t} 1 = t.\end{aligned}$$

5.4.2 双边陪集与轨道数

习题 5.4 第 2 题

设 L 和 H 都是有限群 G 的子群, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ 是 G 的所有不等价的不可约复表示. 设 1_L 在 $\varphi_i|_L$ 中的重数为 a_i, 1_H 在 $\varphi_i|_H$ 中的重数为 b_i. 把 H 在 G 中的左陪集组成的集合记作 G/H, 对于 $y \in L, gH \in G/H$, 规定

$$y(gH) := (yg)H.$$

这给出了 L 在 G/H 上的一个作用. 证明: 这个作用将 G/H 划分成的轨道的条数 r 等于

$$\sum_{i=1}^{s} a_i b_i.$$

解答

由 L 在 G/H 上的给定的作用得到的 L 在复数域上的置换表示记作 ψ. 从习题 5.1 的第 3 题得

$$\psi \simeq (1_H)^G|_L.$$

根据第三章 §2 的推论 4, r 等于 1_L 在 ψ 中的重数, 即

$$r = (1_L, \chi_\psi)_L = \left(1_L, (1_H)^G|_L\right)_L = \left((1_L)^G, (1_H)^G\right)_G.$$

记 φ_i 提供的特征标为 χ_i. 另一方面, 由 Frobenius 互反律,

$$(1_L)^G = \sum_{i=1}^{s} \big((1_L)^G, \chi_i\big)_G \chi_i = \sum_{i=1}^{s} (1_L, \chi_i|_L)_L \chi_i = \sum_{i=1}^{s} a_i \chi_i,$$

同理

$$(1_H)^G = \sum_{i=1}^{s} b_i \chi_i.$$

因此

$$r = \left(\sum_{i=1}^{s} a_i \chi_i, \sum_{j=1}^{s} b_j \chi_j \right)_G = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} a_i b_j (\chi_i, \chi_j)_G = \sum_{i=1}^{s} a_i b_i.$$

这里 Frobenius 互反律所对应的重数关系可表示为交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_G\big((1_L)^G, \varphi_i\big) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_L\big(1_L, \varphi_i|_L\big) \\ {\scriptstyle \dim}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \dim} \\ a_i & = & a_i \end{array}$$

5.4.3 两个传递作用的轨道对偶

习题 5.4 第 3 题

设 G 是有限群, G 分别传递地作用在有限集合 Ω_1 和 Ω_2 上. 设 $x_i \in \Omega_i$, 把 x_i 的稳定子群 G_{x_i} 记作 H_i, 设 η_i 是 G 在 Ω_i 上作用引起的置换特征标, $i = 1, 2$. 证明: H_1 在 Ω_2 上作用的轨道条数 r_1 等于 H_2 在 Ω_1 上作用的轨道条数 r_2, 并且

$$r_1 = r_2 = (\eta_1, \eta_2)_G.$$

解答

由于 G 在 Ω_i 上的作用传递, 根据 [24] 的习题 1.5 第 29 题得, G 在 Ω_i 上的作用等价于 G 在左商集 G/G_{x_i} 上的左平移作用, 于是 G 在 G/G_{x_i} 上的左平移作用引起的置换特征标也是 η_i, $i = 1, 2$. 根据习题 5.1 的第 3 题得

$$\eta_i = (1_{H_i})^G, \qquad i = 1, 2.$$

根据第三章 §2 的推论 4 得

$$\begin{aligned} r_1 &= (1_{H_1}, \eta_2|_{H_1})_{H_1} = \big(1_{H_1}, (1_{H_2})^G|_{H_1}\big)_{H_1} \\ &= \big((1_{H_1})^G, (1_{H_2})^G\big)_G = (\eta_1, \eta_2)_G. \end{aligned}$$

同理可得

$$r_2 = (\eta_1, \eta_2)_G.$$

5.4.4 稳定子群轨道数

习题 5.4 第 4 题

设有有限群 G 传递地作用在有限集合 Ω 上, 它引起的复数域上的置换表示记作 φ. 证明: 对于任意 $x \in \Omega$, x 的稳定子群 G_x 在 Ω 上作用的轨道条数

$$r(x) = (\chi_\varphi, \chi_\varphi)_G,$$

其中 χ_φ 是 φ 提供的特征标.

解答

由于 G 在 Ω 上的作用传递, 因此 G 在 Ω 上的作用等价于 G 在 G/G_x 上的左平移作用. 于是 G 在 G/G_x 上的左平移作用引起的复置换表示也是 φ. 从而

$$\varphi \simeq (1_{G_x})^G.$$

因此 G_x 在 Ω 上作用的轨道条数 $r(x)$ 为

$$\begin{aligned} r(x) &= (1_{G_x}, \chi_\varphi|_{G_x})_{G_x} = \left((1_{G_x})^G, \chi_\varphi\right)_G \\ &= (\chi_\varphi, \chi_\varphi)_G. \end{aligned}$$

5.4.5 不动点平方和公式

习题 5.4 第 5 题

设有有限群 G 传递地作用在有限集合 Ω 上. 证明: 对于任意 $x \in \Omega$, G_x 在 Ω 上作用的轨道条数 $r(x)$ 为

$$r(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|^2,$$

其中 $F(g)$ 是 g 的不动点集, 即

$$F(g) := \{x \in \Omega \mid gx = x\}.$$

解答

G 在 Ω 上的作用引起的复置换表示记作 φ, 其特征标记作 χ_φ. 根据第 4 题的结论和第三章 §2 的命题 3, 得

$$\begin{aligned} r(x) &= (\chi_\varphi, \chi_\varphi)_G \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\varphi(g)\overline{\chi_\varphi(g)} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}F(g)\overline{F(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|F(g)|^2. \end{aligned}$$

5.4.6 一般线性群的 Borel 子群

习题 5.4 第 6 题

设 G 是域 $\mathrm{GF}(q)$ 上的 2 级一般线性群 $\mathrm{GL}(2,q)$. 考虑它的下述子群 H:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b & a_2 \end{pmatrix} \middle| \, a_i \in \mathrm{GF}(q)^*,\ i = 1,2,\ b \in \mathrm{GF}(q) \right\}.$$

循环群 $\mathrm{GF}(q)^*$ 的所有不可约复表示记作 $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{q-1}$. ψ_j 提供的特征标记作 μ_j, $j = 1, 2, \ldots, q-1$. 规定

$$\varphi_{ij} : \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b & a_2 \end{pmatrix} \longmapsto \psi_i(a_1) \otimes \psi_j(a_2),$$

其中 $i = 1, 2, \ldots, q-1$; $j = 1, 2, \ldots, q-1$. 证明:

(1) φ_{ij} 是 H 的一个复表示, 且次数等于 1;

(2) 把 φ_{ij} 提供的特征标记作 χ_{ij}, 则

$$\chi_{ij}\left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b & a_2 \end{pmatrix}\right] = \mu_i(a_1)\mu_j(a_2);$$

(3) 当 $i \neq j$ 时, χ_{ij}^G 是 G 的 $q+1$ 次不可约特征标;

(4) χ_{ii}^G 可约, $i = 1, 2, \ldots, q-1$.

解答

(1) 映射

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b & a_2 \end{pmatrix} \longmapsto (a_1, a_2)$$

是 H 到 $\mathrm{GF}(q)^* \times \mathrm{GF}(q)^*$ 的一个同态. 因此 φ_{ij} 是这个同态与表示 $\psi_i \otimes \psi_j$ 的合成, 是 H 的一个复表示. 由于 ψ_i, ψ_j 都是 1 次的, 因此 φ_{ij} 的次数等于 1.

(2) 由于 φ_{ij} 是 1 次表示, 且

$$\chi_{ij} = \mu_i \otimes \mu_j,$$

所以

$$\chi_{ij}\left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b & a_2 \end{pmatrix}\right] = \mu_i(a_1)\mu_j(a_2).$$

(3) 给定 $g = (c_{ij}) \in G\backslash H$, 对于 $y = (y_{ij}) \in H_g := H \cap gHg^{-1}$, 有

$$\chi_{ij}^g(y) = \chi_{ij}(g^{-1}yg).$$

由于当 $i \neq j$ 时 $\mu_i \neq \mu_j$, 因此存在 $\rho^m \in \mathrm{GF}(q)^*$ 使得

$$\mu_i(\rho^m) \neq \mu_j(\rho^m),$$

其中 ρ 是 $\mathrm{GF}(q)^*$ 的生成元. 取

$$y = \begin{pmatrix} \rho^m & 0 \\ \dfrac{c_{22}}{c_{12}}(\rho^m - 1) & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$g^{-1}yg = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{c_{11}}{c_{12}}(\rho^m - 1) & \rho^m \end{pmatrix}.$$

从而 $y \in H \cap gHg^{-1} = H_g$, 且

$$\chi_{ij}^g(y) = \mu_i(1)\mu_j(\rho^m) = \mu_j(\rho^m),$$

而

$$\chi_{ij}(y) = \mu_i(\rho^m)\mu_j(1) = \mu_i(\rho^m) \neq \mu_j(\rho^m).$$

因此 $\chi_{ij}^g \neq \chi_{ij}$. 根据本节推论 1 得 χ_{ij}^G 不可约. 又

$$\deg \chi_{ij}^G = (\deg \varphi_{ij})[G:H] = \frac{(q^2-1)(q^2-q)}{(q-1)^2 q} = q+1.$$

(4) 取

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \backslash H.$$

对于

$$y = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \in H,$$

有

$$y \in gHg^{-1} \Longleftrightarrow y_{21} = y_{11} - y_{22}.$$

并且对这样的 y,

$$g^{-1}yg = \begin{pmatrix} y_{22} & 0 \\ y_{11}-y_{22} & y_{11} \end{pmatrix}.$$

因此

$$\chi_{ii}^g(y) = \chi_{ii}(g^{-1}yg) = \mu_i(y_{22})\mu_i(y_{11}) = \chi_{ii}(y).$$

所以 $\chi_{ii}^g = \chi_{ii}$. 根据本节推论 1 得 χ_{ii}^G 可约.

5.4.7 Brauer 的特征标表矩阵

习题 5.4 第 7 题

（Brauer）设 G 是有限群, 把 G 的所有共轭类 $C_1, C_2, \ldots, C_s$ 组成的集合记作 Ω, g_i 是 C_i 的一个代表元素, $i = 1, 2, \ldots, s$. 设 $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_s$ 是 G 的所有不相等的不可约复特征标, 它们组成的集合记作 $\mathrm{Irr}(G)$. 设有群 A 在 Ω 上有一个作用, 并且 A 在 $\mathrm{Irr}(G)$ 上也有一个作用, 使得

$$(a\chi_i)(aC_j) = \chi_i(g_j), \qquad \forall a \in A,\ 1 \leq i, j \leq s.$$

证明:

(1) A 中每一个元素 a 在 Ω 中的不动点个数等于 a 在 $\mathrm{Irr}(G)$ 中的不动点个数;

(2) Ω 的 A-轨道条数等于 $\mathrm{Irr}(G)$ 的 A-轨道条数.

解答

(1) 把 G 的复特征标表记作 T, 则 T 是可逆矩阵. a 在 Ω 上的作用引起 T 的列的置换, 相应的置换矩阵记作 Q; a 在 $\mathrm{Irr}(G)$ 上的作用引起 T 的行的置换, 相应的置换矩阵记作 P. 由于

$$(a\chi_i)(aC_j) = \chi_i(g_j), \qquad 1 \leq i, j \leq s,$$

因此

$$PTQ = T.$$

从而

$$T^{-1}PT = Q^{-1}.$$

由于 Q 是置换矩阵, $Q^{-1} = Q'$, 所以

$$\mathrm{tr}(P) = \mathrm{tr}(T^{-1}PT) = \mathrm{tr}(Q') = \mathrm{tr}(Q).$$

而 $\mathrm{tr}(P)$ 等于 a 在 $\mathrm{Irr}(G)$ 中的不动点个数, $\mathrm{tr}(Q)$ 等于 a 在 Ω 中的不动点个数. 因此两者相等.

(2) 根据 Burnside 引理, Ω 的 A-轨道条数为

$$\frac{1}{|A|}\sum_{a\in A}|F_1(a)|,$$

其中 $F_1(a)$ 是 a 在 Ω 中的不动点集. 同理, $\mathrm{Irr}(G)$ 的 A-轨道条数为

$$\frac{1}{|A|}\sum_{a\in A}|F_2(a)|,$$

其中 $F_2(a)$ 是 a 在 $\mathrm{Irr}(G)$ 中的不动点集. 根据第 (1) 小题, $|F_1(a)| = |F_2(a)|$, 对所有 $a \in A$ 成立. 因此两种轨道条数相等.

5.4.8 正规子群的共轭类与特征标

习题 5.4 第 8 题

设 G 是有限群, $N \lhd G$, 把 N 的所有共轭类 $C_1, C_2, \ldots, C_t$ 组成的集合记作 Ω. 任给 $g \in G$, 规定

$$gC_j := gC_jg^{-1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, t,$$

这给出了 G 在 Ω 上的一个作用. 对于 $\mu_i \in \mathrm{Irr}(N)$, 根据第一章 §5 的命题 4 得 $\mu_i^g \in \mathrm{Irr}(N)$, 其中 $\mathrm{Irr}(N)$ 是 N 的所有不可约复特征标组成的集合. 规定

$$g\mu_i := \mu_i^g, \qquad i = 1, 2, \ldots, t,$$

这给出了 G 在 $\mathrm{Irr}(N)$ 上的一个作用, 证明:

(1) G 中每一个元素在 Ω 中的不动点个数等于 g 在 $\mathrm{Irr}(N)$ 中的不动点个数;

(2) Ω 的 G-轨道条数等于 $\mathrm{Irr}(N)$ 的 G-轨道条数.

解答

设 h_j 是 C_j 的一个代表元素, $j=1,2,\ldots,t$. 则

$$(g\mu_i)(gC_j)=\mu_i^g(gh_jg^{-1})=\mu_i\left[g^{-1}(gh_jg^{-1})g\right]=\mu_i(h_j).$$

因此习题 5.4 第 7 题的条件成立. 由第 7 题立即得到本题两个小题的结论.

5.4.9 固定点条件的等价性

习题 5.4 第 9 题

设 G 是有限群, $N\lhd G$, Ω 是 N 的所有共轭类组成的集合. G 在 Ω 上的作用和 G 在 $\mathrm{Irr}(N)$ 上的作用同第 8 题. 证明下列三个命题等价:

(i) $G\backslash N$ 中每一个元素 g 在 Ω 中只固定一个点;

(ii) $G\backslash N$ 中每一个元素 g 在 $\mathrm{Irr}(N)$ 中只固定一个点;

(iii) 对于任意 $y\in N\backslash\{e\}$, 有 $C_G(y)\subseteq N$, 其中 e 是 G 的单位元.

解答

由第 8 题的结论立即得到命题 (i) 与 (ii) 等价.

(i)⇒(iii) 取 $y\in N\backslash\{e\}$, 设 $y\in C_l$. 取 $g\in G\backslash N$. 由 (i) 知道, g 在 Ω 中只固定一个点, 显然 g 固定的这个点是 $\{e\}$, 因此

$$gC_l=gC_lg^{-1}\neq C_l.$$

从而 $gyg^{-1}\neq y$, 即 $g\notin C_G(y)$. 因此 $C_G(y)\subseteq N$.

(iii)⇒(i) 取 $g\in G\backslash N$. 假如 g 在 Ω 中还有第二个不动点 C_m, 则取 $x\in C_m$, 有 $gxg^{-1}\in C_m$. 由于 C_m 是 N 的一个共轭类, 存在 $a\in N$, 使得

$$x=a(gxg^{-1})a^{-1}.$$

于是 $ag\in C_G(x)$. 由 (iii) 知 $C_G(x)\subseteq N$, 从而 $ag\in N$, 因此 $g\in N$, 矛盾. 所以 g 在 Ω 中只有一个不动点.

5.4.10 Frobenius 群的诱导特征标

习题 5.4 第 10 题

设 G 是有限群, $N \lhd G$. 如果对于任意 $y \in N\backslash\{e\}$, 有 $C_G(y) \subseteq N$, 证明:

(1) 对于 N 的每一个不可约复特征标 $\mu \neq 1_N$, 有 μ^G 不可约, 并且 $N \nsubseteq \mathrm{Ker}(\mu^G)$;

(2) 若 χ 是 G 的不可约复特征标, 且 $\mathrm{Ker}\,\chi \not\supseteq N$, 则存在 N 的不可约复特征标 $\mu \neq 1_N$, 使得 $\chi = \mu^G$.

解答

(1) 根据第 9 题的结论, $G\backslash N$ 中每一个元素 g 在 $\mathrm{Irr}(N)$ 中只固定一个点. 因此对于任意 $\mu \in \mathrm{Irr}(N)$, $\mu \neq 1_N$, 有

$$\mu^g \neq \mu, \qquad g \in G\backslash N.$$

根据本节推论 2 及其注记, μ^G 不可约.
假如 $N \subseteq \mathrm{Ker}(\mu^G)$, 则对任意 $a \in N$ 有

$$\mu^G(a) = \mu^G(1).$$

记 $\mu^G(1) = m$, 设 $g_1 = e, g_2, \ldots, g_r$ 是 N 在 G 中的陪集代表系. 根据 Mackey 子群定理,

$$\mu^G|_N = \sum_{i=1}^{r} \mu^{(i)} = \sum_{i=1}^{r} \mu^{g_i}.$$

由于 $\mu \neq 1_N$, 且 $\mu^{g_i} \neq \mu$ $(i = 2, 3, \ldots, r)$, 所以

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \mu^{(i)}, \mu\right)_N = 1,$$

而另一方面由 $N \subseteq \mathrm{Ker}(\mu^G)$,

$$\mu^G|_N = m1_N, \qquad m = r\mu(1),$$

从而

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \mu^{(i)}, \mu\right)_N = (r\mu(1)1_N, \mu)_N = 0,$$

矛盾. 因此 $N \nsubseteq \mathrm{Ker}(\mu^G)$.
(2) 由于 $\mathrm{Ker}\,\chi \not\supseteq N$, 存在 $y_0 \in N$ 使得 $\chi(y_0) \neq \chi(1)$, 从而 $\chi|_N \neq \chi(1)1_N$. 因此 $\chi|_N$ 包含 N 的一个非主不可约复特征标 $\mu \neq 1_N$. 于是由第 (1) 小题, μ^G 不可约, 并且由 Frobenius 互反律

$$(\chi, \mu^G)_G = (\chi|_N, \mu)_N > 0.$$

所以 $\chi = \mu^G$.

5.4.11 Clifford 定理

习题 5.4 第 11 题

（Clifford）设 G 是有限群, $N \lhd G$. 设 χ 是 G 的不可约复特征标, μ 是 $\chi|_N$ 的一个不可约成分, μ 在 $\chi|_N$ 中的重数记作 m. G 在 $\mathrm{Irr}(N)$ 上有一个作用: $g\mu_i = \mu_i^g$, μ 在这个作用下的稳定子群记作 G_μ. 证明:

(1) 如果 $G_\mu \neq G$, 那么存在 G_μ 的一个不可约复特征标 ν, 使得 $\chi = \nu^G$;

(2) 如果 $G_\mu = G$, 那么 $\chi|_N = m\mu$.

（注第 11 题称为 Clifford 定理, 它表明: 若有限群 G 有非平凡的正规子群 N, 则 G 的任一不可约复特征标 χ 或者可以由 G 的真子群的一个不可约复特征标诱导出, 或者 χ 在 N 上的限制是 N 的某个不可约复特征标的倍数. 下面的第 12 题给出了一类特殊情形.）

解答

设 $\{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ 是 G_μ 在 G 中的左陪集代表系. 显然 $N \subseteq G_\mu$. 设 $\{y_1, y_2, \ldots, y_l\}$ 是 N 在 G_μ 中的陪集代表系, 则 $\{g_1y_1, g_1y_2, \ldots, g_ty_l\}$ 是 N 在 G 中的陪集代表系. 运用 Mackey 子群定理得

$$\begin{aligned}\mu^G|_N &= \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{l}\mu^{g_iy_j} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{l}(\mu^{y_j})^{g_i} \\ &= \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{l}\mu^{g_i} = l\sum_{i=1}^{t}\mu^{g_i} \qquad (1).\end{aligned}$$

因为 $(\mu^G, \chi)_G = (\mu, \chi|_N)_N > 0$, 所以 χ 是 μ^G 的不可约成分. 于是 $\chi|_N$ 的不可约成分只能是

$$\mu^{g_1}, \mu^{g_2}, \ldots, \mu^{g_t}.$$

由 (1) 式可知

$$\chi|_N = m\sum_{i=1}^{t}\mu^{g_i}. \qquad (2)$$

如果 $G_\mu = G$, 则 $t = 1$, 由 (2) 式立即得到

$$\chi|_N = m\mu,$$

这就证明了第 (2) 小题.

下面设 $G_\mu \neq G$. 再设

$$\mathrm{Irr}(G_\mu) = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s\},$$

并且

$$\chi|_{G_\mu} = l_1\nu_1 + l_2\nu_2 + \cdots + l_s\nu_s, \qquad l_i \geq 0.$$

不妨设当 $1 \leq i \leq r$ 时,

$$(\nu_i|_N, \mu)_N > 0,$$

而对于 $r+1 \leq j \leq s$, 有 $(\nu_j|_N, \mu)_N = 0$. 令

$$\nu = l_1\nu_1 + l_2\nu_2 + \cdots + l_r\nu_r. \tag{3}$$

因为 $N \lhd G_\mu$, 对 G_μ 和 ν_i $(1 \leq i \leq r)$ 应用上面的结论, 可得

$$\nu_i|_N = m_i\mu.$$

因此

$$\nu|_N = m'\mu, \qquad m' = \sum_{i=1}^{r} l_i m_i.$$

另一方面,

$$m = (\chi|_N, \mu)_N = \sum_{i=1}^{s} l_i(\nu_i|_N, \mu)_N = \sum_{i=1}^{r} l_i m_i = m',$$

所以 $\nu|_N = m\mu$. 现在证明 ν 不可约并且 $\nu^G = \chi$. 有

$$\begin{aligned}(\nu^G, \chi)_G &= (\nu, \chi|_{G_\mu})_{G_\mu} \\ &= \left(\nu, \nu + \sum_{j=r+1}^{s} l_j\nu_j\right)_{G_\mu} \\ &= (\nu, \nu)_{G_\mu}.\end{aligned}$$

于是可设

$$\nu^G = (\nu, \nu)_{G_\mu}\chi + \eta,$$

其中 $\eta = 0$, 或者 η 是 G 的特征标. 从而

$$\nu^G(1) = (\nu, \nu)_{G_\mu}\chi(1) + \eta(1) \geq (\nu, \nu)_{G_\mu}\chi(1). \tag{4}$$

由 (2) 式得

$$\chi(1) = m\mu(1)[G : G_\mu]. \tag{5}$$

又因为 $\nu|_N = m\mu$, 所以 $\nu(1) = m\mu(1)$. 因而

$$\chi(1) = [G : G_\mu]\nu(1).$$

另一方面 $\nu^G(1) = [G : G_\mu]\nu(1)$, 与 (4) 式合起来得

$$[G : G_\mu]\nu(1) \geq (\nu, \nu)_{G_\mu}[G : G_\mu]\nu(1).$$

因此 $(\nu, \nu)_{G_\mu} = 1$, ν 不可约, 且 (4) 式等号成立, 即

$$\chi = \nu^G.$$

这就证明了第 (1) 小题.

5.4.12 Blichfeldt 定理

习题 5.4 第 12 题

（Blichfeldt 定理）设有限群 G 有一个 Abel 正规子群 N, 且 $N \nsubseteq Z(G)$. 若 χ 是 G 的忠实的不可约复特征标, 则 χ 能够由 G 的某个真子群的一个不可约复特征标诱导出.

解答

设 μ 是 $\chi|_N$ 的一个不可约成分. 根据第 11 题, 只需证明 $G_\mu \neq G$. 假如 $G_\mu = G$, 则

$$\chi|_N = m\mu.$$

由于 N 是 Abel 群, μ 的次数为 1. 设 χ 是 G 的表示 (φ, V) 提供的特征标. 仍用 μ 作为 μ 所提供的 N 的表示记号, 则 $\varphi|_N \simeq \mu \oplus \cdots \oplus \mu$. 于是对每一个 $h \in N$, 有

$$\varphi(h) = \mu(h)1_V,$$

从而 $\varphi(h) \in Z(\mathrm{GL}(V))$. 由于 φ 是忠实的, 因此 $h \in Z(G)$, 这说明 $N \subseteq Z(G)$, 与题设矛盾. 所以 $G_\mu \neq G$. 由第 11 题第 (1) 小题, χ 能够由 G_μ 的一个不可约复特征标诱导出, 且 G_μ 是 G 的真子群.

5.4.13 Ito 定理

习题 5.4 第 13 题

（Ito）设有限群 G 有一个正规子群 N, χ 是 G 的一个不可约复特征标, 如果 $\chi|_N$ 包含 N 的 1 次特征标, 那么 χ 的次数能整除 $[G : N]$.

解答

设 μ 是 $\chi|_N$ 所包含的 N 的 1 次特征标.
情形 1 $G_\mu = G$. 此时有

$$\chi|_N = m\mu.$$

设 χ 是 G 的表示 (φ, V) 提供的特征标, 则对于每一个 $h \in N$,

$$\varphi(h) = \mu(h)1_V.$$

从而 $|\chi(h)| = \chi(1)$, 这表明 $N \subseteq Z(\chi)$. 根据习题 4.4 第 1 题知

$$\chi(1) \mid [G : Z(\chi)].$$

因为

$$[G : N] = [G : Z(\chi)][Z(\chi) : N],$$

所以 $\chi(1) \mid [G : N]$.
情形 2 $G_\mu \neq G$. 此时存在 G_μ 的一个不可约复特征标 ν, 使得 $\chi = \nu^G$, 并且从第 11 题的证明过程中知道

$$\nu|_N = l\mu.$$

于是与情形 1 类似可得

$$\nu(1) \mid [G_\mu : N].$$

又

$$\chi(1) = [G : G_\mu]\nu(1), \qquad [G : N] = [G : G_\mu][G_\mu : N],$$

因此

$$\chi(1) \mid [G : N].$$

5.4.14 Abel 正规子群与表示次数

习题 5.4 第 14 题

如果有限群 G 有一个 Abel 正规子群 N, 那么 G 的每一个不可约复特征标的次数整除 $[G : N]$.

解答

从第 13 题立即得到.

6

无限群的线性表示

6.1 拓扑群、紧群

6.1.1 平移与逆运算保持闭性

习题 6.3 第 1 题

设 G 是拓扑群, F 是 G 的闭集, 证明: 对于任意 $a \in G$, Fa, aF, F^{-1} 都是闭集, 其中

$$F^{-1} = \{b^{-1} \mid b \in F\}.$$

解答

$aF = L_a(F)$. 由于 L_a 是拓扑空间 G 到自身的同胚, 因此 L_a^{-1} 是连续映射. 从而由 $L_a^{-1}(aF) = F$ 是闭集得出 aF 是闭集. 类似地, 右平移 R_a 也是 G 到自身的同胚, 因此 $Fa = R_a(F)$ 是闭集. 求逆运算 ν 是 G 到自身的连续映射, 由于 $\nu^2 = 1_G$, 因此 $\nu^{-1} = \nu$. 从而 ν^{-1} 也是 G 到自身的连续映射, 因此由 F 是闭集可得 F^{-1} 是闭集.

6.1.2 平移与逆运算保持开性

习题 6.3 第 2 题

设 G 是拓扑群, U 是 G 的开集, 证明: 对于 G 的任意子集 P, 都有 UP, PU, U^{-1} 是开集.

解答

$$PU = \bigcup_{b \in P} bU.$$

由于左平移 L_b 是 G 到自身的同胚, 因此从 U 是开集得出 bU 是开集, 于是 PU 是开集. 同理可证 UP 是开集. 由于 ν^{-1} 是 G 到自身的连续映射, 因此从 U 是开集得出 U^{-1} 也是开集.

6.1.3 乘积集闭包的包含关系

习题 6.3 第 3 题

设 G 是拓扑群, A, B 是 G 的子集, 证明:

$$\overline{A}\,\overline{B} \subseteq \overline{AB}.$$

解答

任取 $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$, 设 W 是 xy 的任一邻域. 由于 G 的乘法运算是连续映射, 因此存在 x 的邻域 V_1 与 y 的邻域 V_2, 使得 $V_1V_2 \subseteq W$. 由于 $x \in \overline{A}$, $V_1 \cap A \neq \varnothing$. 于是有 $a \in V_1 \cap A$. 同理有 $b \in V_2 \cap B$. 于是 $ab \in W \cap AB$. 从而 $xy \in \overline{AB}$.

6.1.4 闭包子群与正规子群

习题 6.3 第 4 题

设 G 为拓扑群. 证明: 若 H 为群 G 的子群, 则 $\overline{H}$ 也是群 G 的子群; 若 N 是群 G 的正规子群, 则 $\overline{N}$ 也是群 G 的正规子群.

解答

任取 $a, b \in \overline{H}$. 设 W 是 ab^{-1} 的任一邻域. 由于 G 的乘法和求逆都是连续映射, 因此存在 a 的邻域 V_1 与 b 的邻域 V_2, 使得 $V_1V_2^{-1} \subseteq W$. 由于 $a \in \overline{H}$, $V_1 \cap H \neq \varnothing$. 同理 $V_2 \cap H \neq \varnothing$. 于是有 $c \in V_1 \cap H$, $d \in V_2 \cap H$. 从而 $cd^{-1} \in W \cap H$. 因此 $ab^{-1} \in \overline{H}$, 从而 $\overline{H}$ 是 G 的子群.

设 $N \lhd G$. 由上面的结论得, $\overline{N}$ 是 G 的子群. 任意取定 $g \in G$, 任取 $x \in \overline{N}$, 设 W 是 gxg^{-1} 的任一邻域. 由于 G 的乘法和求逆都是连续映射, 因此存在 g 的邻域 V_1, V_2 和 x 的邻域 U, 使得

$$V_1UV_2^{-1} \subseteq W.$$

由于 $x \in \overline{N}$, $U \cap N \neq \varnothing$, 从而有 $a \in U \cap N$. 于是 $gag^{-1} \in V_1UV_2^{-1}$, 又 $gag^{-1} \in N$. 因此 $gxg^{-1} \in \overline{N}$. 于是 $\overline{N} \lhd G$.

6.1.5 紧致离散群的有限性

习题 6.3 第 5 题

群 G 配备离散拓扑所成的拓扑称为离散群. 证明紧致离散群一定是有限群.

解答

设 $G=\{g_i \mid i\in I\}$. 取 G 的一个开覆盖 $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}=\Big\{\{g_i\} \mid i\in I\Big\}.$$

由于 G 是紧致的, 因此 $\mathcal{F}$ 有一个有限子族 $\mathcal{F}_1$ 覆盖 G, 其中

$$\mathcal{F}_1=\Big\{\{g_{j_1}\},\{g_{j_2}\},\ldots,\{g_{j_m}\}\Big\}.$$

于是 G 是有限群.

6.1.6 离散子群的互不相交平移邻域

习题 6.3 第 6 题

设 H 为拓扑群 G 的离散子群 (即 H 为群 G 的子群, 并且当给予子空间拓扑时, H 是离散空间), 找出 G 的单位元 e 在 G 内的一个邻域 N, 使得平移像 $hN=L_h(N)$, $h\in H$, 互不相交.

解答

由于 H 是离散空间, 因此 $\{e\}$ 是 H 的一个开集. 根据子空间拓扑的定义, $\{e\}$ 是 G 的一个开集 N 与 H 的交集, 即 $N\cap H=\{e\}$. 于是 $e\in N$, 根据邻域的定义得, N 是 e 在 G 内的一个邻域. 由于左平移是 G 到自身的一个同胚, 因此对于 $h\in H$, 有 hN 是 h 在 G 内的一个邻域. 由于 $N\cap H=\{e\}$, 因此 hN 只含有 H 的一个元素 h.
NN^{-1} 仍是 G 的开集, 且 $e\in NN^{-1}$. 选取 G 的满足 $N\cap H=\{e\}$ 的开集 N, 使得 NN^{-1} 只含有 H 的一个元素 e. 假如对于 $h_1,h_2\in H$, 且 $h_1\neq h_2$, 有 h_1N 与 h_2N 的交集不是空集, 则存在 $a\in h_1N$ 且 $a\in h_2N$, 于是有 $n_1,n_2\in N$, 使得 $h_1n_1=a=h_2n_2$. 从而

$$n_1n_2^{-1}=h_1^{-1}h_2\in H.$$

又 $n_1n_2^{-1}\in NN^{-1}$. 由于 NN^{-1} 只含有 H 的一个元素 e, 因此 $n_1n_2^{-1}=e$. 由此推出 $h_1=h_2$, 矛盾. 因此当 $h_1\neq h_2$ 时, $h_1N\cap h_2N=\varnothing$.

6.1.7 紧致集与离散子群的交有限

习题 6.3 第 7 题

若 K 为拓扑群 G 的紧致子集, H 为 G 的离散子群, 证明 $H\cap K$ 为有限集.

解答

由于 H 是 G 的离散子群, 因此对于 $b_i \in K \cap H$, 有 $\{b_i\}$ 是 H 的开集. 由于 H 的拓扑是 G 的子空间拓扑, 因此存在 G 的开集 V_i 使得

$$V_i \cap H = \{b_i\}.$$

把 $K \cap H$ 的元素记成 b_i, 其中 $i \in I$, 即 $K \cap H = \{b_i \mid i \in I\}$. 取 K 的一个开覆盖 $\mathcal{F}$, 使得 $\mathcal{F}$ 在 $K \cap H$ 上的限制为 $\{V_i \mid i \in I\}$. 由于 K 是紧致子集, 因此对于 $\mathcal{F}$ 有一个有限子覆盖 $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_1$ 在 $K \cap H$ 上的限制为 $\{V_{j_1}, V_{j_2}, \ldots, V_{j_m}\}$, 从而 $K \cap H$ 是有限集.

6.1.8 圆周群的离散子群

习题 6.3 第 8 题

证明: 1 维球面 S^1 的任何非平凡的离散子群是有限循环群.

解答

在紧群的例子中已证 S^1 是紧群. 任取 S^1 的一个非平凡离散子群 H, 根据第 7 题得, $S^1 \cap H = H$ 是有限集, 从而 H 是有限群. 由于 H 也是复数域 $\mathbb{C}$ 的乘法群 $\mathbb{C}^*$ 的一个子群, 可以证明任一域 F 的乘法群 F^* 的有限子群一定是循环群 (证明方法类似于 [24] 第 37 页的定理 12 的证明), 因此 H 是循环群.

6.1.9 实数加群的离散子群

习题 6.3 第 9 题

证明: $\mathbb{R}$ (群运算为加法) 的任何非平凡的离散子群是无限循环群.

解答

任取拓扑群 $\mathbb{R}$ 的一个非平凡离散子群 H. 由于 H 是离散空间, 因此对于 $h \in H$, 有 $\{h\}$ 是 H 的开集, 从而存在开区间 (a, b), 使得 $(a, b) \cap H = \{h\}$. 于是设 $H = \{h_i \mid i \in I\}$, 其中 I 是指标集, 则有开区间族 $\{(a_i, b_i) \mid i \in I\}$, 使得 $(a_i, b_i) \cap H = \{h_i\}$, $i \in I$.
设 h_1 是 H 中绝对值最小的非零数, 并取 $h_1 > 0$. 令

$$K = \{kh_1 \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

则 K 是 H 的循环子群. 假如 $K \neq H$, 则在 $H \setminus K$ 中任取一个元素 x. 我们断言对任意 $kh_1 \in K$, 有 $|x - kh_1| \geq h_1$. 假如有 $l \in \mathbb{Z}$ 使得 $|x - lh_1| < h_1$, 由于 $x - lh_1 \in H$, 且 $x - lh_1 \neq 0$, 这与 h_1 的选择矛盾.
取整数 m 使得 $mh_1 < x < (m+1)h_1$, 则 $|x - mh_1| < h_1$, 与上面的断言矛盾. 因此

$K = H$. 由于 $h_1 \neq 0$, K 含有无穷多个不同元素, 所以 H 是无限循环群.

6.1.10 一般线性群不连通

习题 6.3 第 10 题

证明: 拓扑群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 不连通.

解答

令

$$M_1 = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}, \qquad M_2 = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(B) < 0\}.$$

M_1 在映射 det 下的像是 $(0, +\infty)$, M_2 在 det 下的像是 $(-\infty, 0)$. $(0, +\infty)$ 和 $(-\infty, 0)$ 都是 $\mathbb{R}$ 的开集, 因为 det 是连续映射, M_1 和 M_2 也都是开集. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = M_1 \cup M_2$, 且 $M_1 \cap M_2 = \varnothing$. 因此 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 不连通.

6.1.11 正交群不连通

习题 6.3 第 11 题

证明: 拓扑群 $O(n)$ 不连通.

解答

令

$$M_1 = \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = -1\},$$

则 $\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \cup M_1$, $\mathrm{SO}(n) \cap M_1 = \varnothing$. 已证 $\mathrm{SO}(n)$ 是 $\mathrm{O}(n)$ 的闭集, 同理可证 M_1 是 $\mathrm{O}(n)$ 的闭集. 因此 $\mathrm{O}(n)$ 可表示成两个不相交的非空闭集的并, 所以它不连通.

6.1.12 正交群的离散子群

习题 6.3 第 12 题

证明: 拓扑群 $O(2)$ 的非平凡离散子群或为有限循环群, 或为二面体群.

解答

任取 $\mathrm{O}(2)$ 的一个非平凡离散子群 H. 由于 $\mathrm{O}(2)$ 是紧群, 且 $H = \mathrm{O}(2) \cap H$, 根据第 7 题得, H 为有限群.

情形 1 $H \subseteq \mathrm{SO}(2)$. 拓扑群 $\mathrm{SO}(2) \cong S^1$, 用第 8 题的结论, H 为有限循环群.

情形 2 $H \not\subseteq \mathrm{SO}(2)$. 取 $B \in H$ 且 $\det(B) = -1$, 则

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

从而 $B^2 = I$. 对于 $A \in H$ 且 $\det(A) = 1$, 有

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

直接计算得 $BAB^{-1} = A^{-1}$. 由于 $A, A^2, \ldots$ 都属于 H, 且 H 是有限群, 因此必有 $i < j$, 使得 $A^i = A^j$. 从而 $A^{j-i} = I$. 设 n 是使 $A^n = I$ 成立的最小正整数, 则 n 是 A 的阶. 由于 H 是有限群, 因此可以取 A 为 H 里的旋转中阶最大的元素, 且设 A 的阶为 n. 令

$$K = \langle A, B \mid A^n = B^2 = I,\ BAB^{-1} = A^{-1} \rangle,$$

则 $K \subseteq H$. 由于 H 里的所有旋转组成的子集 H_1 对乘法封闭, 对求逆封闭, 因此 H_1 是 H 的子群, 且 H_1 是 $\mathrm{SO}(2)$ 的子群, 根据第 8 题结论, H_1 是循环群. 由于 $A \in H_1$, 且 A 是阶最大的旋转, 因此 $H_1 = \langle A \rangle$. 从而 H 里所有旋转为 $I, A, \ldots, A^{n-1}$. 这些恰好是 K 里的所有旋转.
取 H 里一个反射 C (即 $\det(C) = -1$), 则 CB 是 H 里的旋转. 从而 $CB = A^i$ 对于某个 i $(0 \le i < n)$. 于是 $C = A^i B^{-1} \in K$, 由此得出 $H = K$, 即 H 是二面体群.

6.1.13 开子群是闭子群

习题 6.3 第 13 题

设 G 是拓扑群, H 是群 G 的子群. 证明: 如果 H 是空间 G 的开集, 那么 H 一定是闭集.

解答

设 H 是群 G 的子群, 且 H 是开子集. 有

$$G \setminus H = \bigcup_{b \notin H} bH.$$

由第 2 题得, bH 都是开集, 从而 $G \setminus H$ 是开集. 因此 H 是闭集.

6.1.14 有限指数闭子群是开子群

习题 6.3 第 14 题

设 G 是拓扑群, H 是群 G 的有限指数的子群. 证明: 如果 H 是空间 G 的闭集, 那么 H 是开集.

解答

设 H 是群 G 的子群, $[G:H]=r$, 且 H 是 G 的闭集, 则

$$G\setminus H=b_2H\cup\cdots\cup b_rH,$$

其中 $b_i\notin H$, $i=2,\ldots,r$. 根据第 1 题, b_iH 都是闭集, $2\leq i\leq r$. 因此 $G\setminus H$ 是闭集, 从而 H 是开集.

6.1.15 含单位元邻域的子群

习题 6.3 第 15 题

设 G 是拓扑群, H 是群 G 的子群. 证明: 如果 H 包含的单位元 e 的一个邻域, 那么 H 是开集.

解答

设群 G 的子群 H 包含 G 的单位元 e 的一个邻域, 则 H 必包含一个含有单位元 e 的开集 U. 显然有 $H=UH$. 根据第 2 题, UH 是开集, 即 H 是开集.

6.2 拓扑群的线性表示

6.2.1 一般线性群在矩阵空间上的共轭表示

习题 6.4 第 1 题

设 $G=\mathrm{GL}_n(K)$, $V=\mathrm{M}_n(K)$, φ 定义如下:

$$\varphi(A)X=AXA^{-1},\qquad A\in\mathrm{GL}_n(K),\ X\in\mathrm{M}_n(K).$$

证明: φ 是拓扑群 $\mathrm{GL}(n,K)$ 的 n^2 次连续表示.

解答

类似于本节例 2 的证法.

6.2.2 子表示的连续性

习题 6.4 第 2 题

证明: 拓扑群 G 的 K-表示 (φ, V) 的子表示是连续的.

解答

设拓扑群 G 的 K-表示 (φ, V) 的子表示 φ_U 的矩阵表示为 Φ_U, 则 $\Phi_U(g)$ 是 $\Phi(g)$ 的子矩阵, $\forall g \in G$. 因此从“Φ 的矩阵元素是 G 上的连续函数”立即得出: Φ_U 的矩阵元素是 G 上的连续函数. 从而子表示 φ_U 是连续的.

6.3 紧群上的不变积分

6.3.1 紧群直积上的逐次积分

习题 6.5 第 1 题

设 G 与 H 为两个紧群, P 为它们的直积, f 为两个变量 $x \in G$ 与 $y \in H$ 的连续复值函数, $f(x,y) = f_1(x,y) + \mathrm{i} f_2(x,y)$, 其中 $f_1(x,y)$ 与 $f_2(x,y)$ 是两个变量的连续实值函数. 当 y 固定时, 可以有积分

$$\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x = g(y).$$

证明:

(1) $g(y)$ 是 H 上的连续复值函数;

(2)

$$\int_H \left[\int_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_G \left[\int_H f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_P f(z)\,\mathrm{d}z,$$

把这个积分记作

$$\int_{G\times H} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解答

(1) 类似于本节引理 7 的证明.

(2) 利用本节定理 2 的结论.

6.4 紧群的线性表示

6.4.1 实数加群的 1 次表示

习题 6.6 第 1 题

对于拓扑群 $(\mathbb{R},+)$, 任意给定一个复数 a, 令

$$\varphi_a(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}at},\qquad t\in\mathbb{R}.$$

(1) 说明 φ_a 是拓扑群 $(\mathbb{R},+)$ 的一个 1 次表示;

(2) 证明: φ_a 是酉表示当且仅当 $a\in\mathbb{R}$;

(3) 说明拓扑群 $(\mathbb{R},+)$ 的每个 1 次酉表示都有 φ_a 的形式, 其中 $a\in\mathbb{R}$.

解答

(1) 在第一章 §2 的例 2 已证明 φ_a 是群 $(\mathbb{R},+)$ 的一个 1 次表示. 由于 φ_a 的矩阵元素 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续复值函数, 因此 φ_a 是拓扑群 $(\mathbb{R},+)$ 的一个 1 次表示.

(2) 设 $a=a_1+\mathrm{i}a_2$, 则

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}a_1t-a_2t}.$$

从 φ_a 是酉表示当且仅当以下式成立:

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}\right|=1,\ \forall t\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-a_2t}=1,\ \forall t\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow a_2=0\Longleftrightarrow a\in\mathbb{R}.$$

因此 φ_a 是酉表示当且仅当 $a\in\mathbb{R}$.

(3) 设 ψ 是拓扑群 $(\mathbb{R},+)$ 的任一 1 次酉表示, 则 $\forall t\in\mathbb{R}$, 有 $\psi(t)\in\mathbb{C}$ 且 $|\psi(t)|=1$. 由于模为 1 的复数可写成 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 这种形式, 其中 $\theta\in\mathbb{R}$. 因此 $\psi(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta t}$, 即 $\psi=\varphi_\theta$.

6.4.2 实数加群与圆周群的表示

习题 6.6 第 2 题

给了拓扑群 $(\mathbb{R},+)$ 到拓扑群 $\mathrm{SO}(2)$ 的一个映射

$$f:t\longmapsto\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}.$$

(1) 证明: f 是拓扑群 $(\mathbb{R},+)$ 到拓扑群 $\mathrm{SO}(2)$ 上的同态, 并且

$$\mathrm{Ker}\,f=\{2\pi m\mid m\in\mathbb{Z}\},\qquad \mathrm{SO}(2)\cong\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

(2) 证明: 紧群 $\mathrm{SO}(2)$ 的每一个有限维不可约表示是 1 次的.

(3) 设 φ 是紧群 SO(2) 的一个不可约表示, 令

$$\tilde{\varphi}(t+2\pi m)=\varphi\left(\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\right),\qquad 0\le t<2\pi,\ m\in\mathbb{Z}.$$

证明: $\tilde{\varphi}$ 是拓扑群 $(\mathbb{R},+)$ 的一个不可约表示, 并且 $\tilde{\varphi}(2\pi)=\tilde{\varphi}(0)=1$.
反之, 设 $\tilde{\varphi}$ 是拓扑群 $(\mathbb{R},+)$ 的不可约表示并且满足 $\tilde{\varphi}(2\pi m)=1,\ \forall m\in\mathbb{Z}$. 令

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\right)=\tilde{\varphi}(t),\qquad 0\le t<2\pi.$$

说明 φ 是 SO(2) 的一个不可约表示.
上述说明紧群 SO(2) 的不可约表示组成的集合与拓扑群 $(\mathbb{R},t)$ 的满足“$\tilde{\varphi}(2\pi m)=1$ 对一切 $m\in\mathbb{Z}$”的不可约表示 $\tilde{\varphi}$ 组成的集合之间有一一对应.

(4) 证明: SO(2) 的每一个不可约表示具有形式

$$\varphi_n\left(\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt},\qquad 0\le t\le 2\pi,\ n\in\mathbb{Z}.$$

(5) 证明:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}lt}}\,\mathrm{d}t=\delta_{kl}.$$

解答

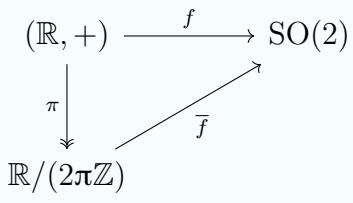
(1) 在第一章 §2 的例 3 已证 f 是拓扑群 $(\mathbb{R},+)$ 到拓扑群 SO(2) 的一个同态. 显然 f 是满射, 由于 f 的矩阵元素 $\cos t,\sin t$ 都是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 因此 f 是拓扑群 $(\mathbb{R},+)$ 到拓扑群 SO(2) 的一个满同态. 易验证

$$\operatorname{Ker} f=\{2\pi m\mid m\in\mathbb{Z}\}.$$

从而

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\cong\mathrm{SO}(2).$$

若记 $\pi(t)=t+2\pi\mathbb{Z}$, 则这一商群关系可表示为



其中 $\overline{f}$ 是由 f 诱导的同构.

(2) 由于商群 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 的不可约表示组成的集合与 $(\mathbb{R},+)$ 的其核包含 $2\pi\mathbb{Z}$ 的不可约表示组成的集合有一一对应, 而 $(\mathbb{R},+)$ 的有限维不可约表示都是 1 次的, 因此 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 的有限维不可约表示都是 1 次的. 所以 $\mathrm{SO}(2)$ 的每一个有限维不可约表示都是 1 次的.

(3) 设 φ 是紧群 $\mathrm{SO}(2)$ 的一个不可约表示, 由于 $\mathrm{SO}(2)\cong\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, 因此 φ 的提升 $\widetilde{\varphi}$ 给出了 $(\mathbb{R},+)$ 的不可约表示. 显然 $\widetilde{\varphi}$ 也是酉表示, 且 $\widetilde{\varphi}(2\pi)=\widetilde{\varphi}(0)=1$.
反之, 设 $\widetilde{\varphi}$ 是拓扑群 $(\mathbb{R},+)$ 的不可约表示并且满足 $\widetilde{\varphi}(2\pi m)=1,\ \forall m\in\mathbb{Z}$, 则 $\operatorname{Ker}\widetilde{\varphi}\supseteq 2\pi\mathbb{Z}$. 于是 $\widetilde{\varphi}$ 通过 $2\pi\mathbb{Z}$ 的分解可得 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 的一个不可约表示, 进而得到 $\mathrm{SO}(2)$ 的一个不可约表示 φ:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\right)=\widetilde{\varphi}(t),\qquad 0\le t<2\pi.$$

(4) 由本题第 (3) 小题和第 1 题的第 (3) 小题得: $\mathrm{SO}(2)$ 的每一个不可约表示 φ 为

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\right)=\widetilde{\varphi}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta t},\qquad 0\le t<2\pi,$$

其中 $\widetilde{\varphi}(2\pi m)=1,\ \forall m\in\mathbb{Z}$. 设 $n\le\theta<n+1$, n 是某个整数, 则 $\theta=n+r$, 其中 $0\le r<1$. 于是 θ 应满足

$$1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(2\pi m)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nm}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi rm}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi rm},\qquad \forall m\in\mathbb{Z}.$$

由此推出 $r=0$, 即 $\theta=n$. 于是 $\mathrm{SO}(2)$ 的每个不可约表示具有形式

$$\varphi_n\left(\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt},\qquad 0\le t<2\pi,$$

其中 $n\in\mathbb{Z}$.

(5) 拓扑群 $\mathrm{SO}(2)\cong S^1$, 根据本章 §5 的例 2 知道 S^1 上的不变积分由下式定义:

$$\int_{S^1}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

设 φ_k,φ_l 都是 $\mathrm{SO}(2)$ 的不可约表示, 则根据第 (4) 小题和紧群的不可约表示提供的特征标的正交关系得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}lt}}\,\mathrm{d}t=\delta_{kl}.$$

6.4.3 表示逆元与特征标的共轭

习题 6.6 第 3 题

如果 Φ 是群 G 的酉表示, 它提供的特征标记作 χ, 则对于任意 $g \in G$ 有

$$\Phi(g^{-1}) = \Phi(g)^*,$$

其中 $\Phi(g)^*$ 是 $\Phi(g)$ 的伴随变换; 并且当 Φ 是有限维表示时,

$$\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}.$$

解答

由于

$$\Phi(e) = \Phi(gg^{-1}) = \Phi(g)\Phi(g^{-1}),$$

且 $\Phi(e)$ 是恒等变换, 因此 $\Phi(g^{-1}) = \Phi(g)^{-1}$. 若 Φ 是酉表示, 则 $\Phi(g)^{-1} = \Phi(g)^*$, 从而得到第一式. 当 Φ 是有限维表示时, 设 $\Phi(g)$ 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. 由于 $\Phi(g)$ 是酉变换, λ_i 的模为 1, 因而 $\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}$. 于是

$$\begin{aligned}\chi(g^{-1}) &= \operatorname{tr}\left(\Phi(g^{-1})\right) = \operatorname{tr}\left(\Phi(g)^{-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \overline{\chi(g)}.\end{aligned}$$

6.4.4 两个内积的比较变换

习题 6.6 第 4 题

设 f 和 f_0 是有限维复线性空间 V 的两个内积, 则存在 V 上的唯一的一个线性变换 σ 使得

$$f(\alpha, \beta) = f_0(\sigma\alpha, \beta)$$

对一切 $\alpha, \beta \in V$ 成立.

解答

设 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 是 V 关于内积 f_0 的一个标准正交基. 令

$$A = (f(\eta_i, \eta_j)).$$

设 σ 是 V 上的一个线性变换, 它在 $[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n]$ 下的矩阵为 A', 则

$$f_0(\sigma\eta_i, \eta_j) = f_0\left(\sum_{k=1}^{n} f(\eta_i, \eta_k)\eta_k, \eta_j\right) = f(\eta_i, \eta_j),$$

从而对任意 $\alpha, \beta \in V$, 有

$$f_0(\sigma\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta).$$

假如还有 V 上的一个线性变换 τ 使得

$$f_0(\tau\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta),$$

对一切 $\alpha, \beta \in V$ 成立, 则

$$f_0(\sigma\alpha, \beta) = f_0(\tau\alpha, \beta),$$

即

$$f_0((\sigma - \tau)\alpha, \beta) = 0.$$

对一切 $\alpha, \beta \in V$ 都成立, 由此推出 $\sigma = \tau$.

6.4.5 不可约表示上的不变内积

习题 6.6 第 5 题

设 (φ, V) 是群 G 的有限维不可约表示, 则 V 的 G 不变内积在相差一个常数因子的意义上是唯一的.

解答

设 f_0 和 f 是 V 的两个 G 不变内积, 则对一切 $g \in G$, 对于内积 f_0 和 f 而言, $\varphi(g)$ 都是酉变换. 根据第 4 题, 存在 V 上唯一的一个线性变换 σ, 使得

$$f(\alpha, \beta) = f_0(\sigma\alpha, \beta), \qquad \forall \alpha, \beta \in V.$$

给定 $g \in G$, 对任意 $\alpha, \beta \in V$, 有

$$\begin{aligned} f_0\Big(\varphi(g^{-1})\sigma\varphi(g)\alpha, \beta\Big) &= f_0\Big(\sigma\varphi(g)\alpha, \varphi(g)\beta\Big) \\ &= f\Big(\varphi(g)\alpha, \varphi(g)\beta\Big) \\ &= f(\alpha, \beta) = f_0(\sigma\alpha, \beta). \end{aligned}$$

于是

$$\varphi(g)^{-1}\sigma\varphi(g) = \sigma, \qquad \forall g \in G.$$

由 Schur 引理得, $\sigma = c1_V$ 对于某个复数 c, 从而 $f = cf_0$.

6.4.6 整数子群商群的不可约表示

习题 6.6 第 6 题

设 $G^* = (\mathbb{R}, +)$, N 为所有整数形成的子群, 令 $G = G^*/N$,

$$\overline{\varphi}_n(t+N) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

证明: $\{\overline{\varphi}_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 是 G 的全部不可约表示.

解答

根据第 1 题的第 (3) 小题, 拓扑群 $G^* = (\mathbb{R}, +)$ 的每个不可约表示形如

$$\varphi_a(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}at}, \qquad t \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}.$$

若 $\operatorname{Ker}\varphi_a \supseteq N$, 则 φ_a 对 N 分解可得到商群 G^*/N 的不可约表示 $\overline{\varphi}_a$. 设 $2\pi n \leq a < 2\pi(n+1)$, 对于某个整数 n, 则 $a = 2\pi n + r$, $0 \leq r < 2\pi$, 且

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}at} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi n + r)t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt}\mathrm{e}^{\mathrm{i}rt}.$$

又

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}\varphi_a \supseteq N &\iff \varphi_a(m) = 1,\ \forall m \in \mathbb{Z} \\
&\iff 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}am} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nm}\mathrm{e}^{\mathrm{i}rm} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}rm},\ \forall m \in \mathbb{Z} \\
&\iff r = 0 \iff a = 2\pi n.
\end{aligned}$$

记

$$\varphi_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

这些是 G^* 的其核包含 N 的全部不可约表示, 它们对 N 分解便得到 $G = G^*/N$ 的全部不可约表示:

$$\overline{\varphi}_n(t+N) = \varphi_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$