梁灿彬 Lie 群和 Lie 代数讲义-原文

Lie Groups and Lie Algebras: Group Theory, One-Parameter Subgroups and the Lorentz Algebra

附录 G Lie 群和 Lie 代数

RongYu

微分几何讲义系列

2026.8.7

目录

导言 3

I 群与 Lie 群 4

G.1 群论初步 5

G.2 Lie 群 8

II Lie 代数与单参子群 11

G.3 Lie 代数 12

G.4 单参子群和指数映射 15

III 常用 Lie 群及其 Lie 代数 19

G.5 常用 Lie 群及其 Lie 代数 20

G.5.1 GL(m) 群 (一般线性群, general linear group) 20

G.5.2 O(m) 群 (正交群, orthogonal group) 23

G.5.3 O(1, 3) 群 (Lorentz 群) 26

G.5.4 U(m) 群 (酉群) 29

G.5.5 E(m) 群 (欧氏群) 34

G.5.6 Poincaré 群 34

IV 结构常数, Lie 变换群与伴随表示 36

G.6 Lie 代数的结构常数 37

G.7 Lie 变换群和 Killing 矢量场 44

G.8 伴随表示和 Killing 型 [选读] 49

V 固有 Lorentz 群与 Lorentz 代数 54

G.9 固有 Lorentz 群和 Lorentz 代数 55

G.9.1 固有 Lorentz 变换和固有 Lorentz 群 55

G.9.2 Lorentz 代数 63

G.9.3 用 Killing 矢量场讨论 Lorentz 代数 66

G.9.4 Lorentz 群的应用——Thomas 进动 [选读] 71

习题 79

中册符号一览表 81

参考文献 82

导言

本讲整理自梁灿彬《微分几何入门与广义相对论》附录 G, 属于微分几何讲义系列. Lie 群是兼为微分流形的群, 既是群又是流形, 兼具代数与几何两种结构, 因而可用流形的几何语言加以研究. 本附录从群论初步出发, 依次引入 Lie 群, Lie 代数, 单参子群与指数映射, 然后介绍常用矩阵 Lie 群及其 Lie 代数, Lie 代数的结构张量与结构常数, Lie 变换群与 Killing 矢量场, 伴随表示与 Killing 型, 最后集中讨论固有 Lorentz 群与 Lorentz 代数, 及其在 Thomas 进动等物理问题中的应用.

Part I

群与 Lie 群

本部分从集合论层面的群出发, 在群上赋予微分流形结构即得 Lie 群. Lie 群的双重身份使得左平移成为其基本工具: 由左平移诱导的左不变矢量场把 Lie 群与其恒等元处的切空间联系起来, 这是后面建立 Lie 代数的出发点.

内容概要

- 掌握群, 子群, 同态, 同构, 陪集, 正规子群, 直积群与半直积群等基本概念.
- 理解 Lie 群的定义与 Lie 群同态, Lie 子群, 左平移等概念.
- 掌握左不变矢量场的定义与等价表述, 及其与恒等元处切空间的同构.

G.1

群论初步

定义 1

集合 G 配以满足以下条件的映射 $G\times G\to G$ (叫群乘法) 称为群 (group):

(a) $(g_1g_2)g_3=g_1(g_2g_3)$, $\forall g_1,g_2,g_3\in G$;

(b) 恒等元 (identity element) $e\in G$ 使 $eg=ge=g$, $\forall g\in G$;

(c) $\forall g\in G$, $\exists$ 逆元 (inverse element) $g^{-1}\in G$ 使 $g^{-1}g=gg^{-1}=e$.

注 1 恒等元是唯一的, 任一群元的逆元也是唯一的.

定义 2

乘法满足交换律的群 (即 $gh=hg\quad\forall g,h\in G$) 称为阿贝尔群 (Abelian group). 只含有限个元素的群叫有限群 (finite group), 否则叫无限群 (infinite group). 群 G 的子集 H 称为 G 的子群 (subgroup), 若 H 用 G 的乘法为乘法也构成群.

定义 3

设 G 和 G' 是群. 映射 $\mu:G\to G'$ 叫同态 (homomorphism), 若

$$\mu(g_1g_2)=\mu(g_1)\mu(g_2),\quad \forall g_1,g_2\in G.$$

定理 G-1-1

同态映射 $\mu:G\to G'$ 有以下性质:

(a) 若 e,e' 各为 G,G' 的恒等元, 则 $\mu(e)=e'$.

(b) $\mu(g^{-1})=\mu(g)^{-1}$, $\forall g\in G$.

(c) $\mu(G)$ 是 G' 的子群, 当 G 是阿贝尔群时 $\mu(G)$ 是 G' 的阿贝尔子群.

Pf 练习. □

定义 4

一一到上的同态映射称为同构 (isomorphism). 当有可能与矢量空间之间的同构混淆时又明确地把群之间的同构称为群同构. 同构 $\mu:G\to G$ 称为群 G 上的自同构 (automorphism).

例 1

$\forall g\in G$, 可构造一个称为伴随同构 (adjoint isomorphism) 的自同构映射, 又称内自同

构 (inner automorphism), 记作 $I_g : G \to G$, 定义为

$$I_g(h) := ghg^{-1}, \quad \forall h \in G. \tag{G-1-1}$$

注 2 今后常把两个同构的群视作一样, 并用等号表示.

定义 5

群 G 和 G' (看作两个集合) 的卡氏积 $G \times G'$ (见 §1.1 定义 3) 按下列乘法

$$(g_1, g_1')(g_2, g_2') := (g_1 g_2, g_1' g_2'), \quad \forall g_1, g_2 \in G, g_1', g_2' \in G' \tag{G-1-2}$$

构成的群称为 G 和 G' 的直积群 (direct product group).

例 2

以加法为群乘法, 则 $\mathbb{R}$ 是群. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 配以由式(G-1-2) 定义的乘法就构成直积群, 而且此乘法正好是 $\mathbb{R}^2$ 上 (自然定义) 的加法.

定义 6

设 H 是群 G 的子群, $g \in G$, 则 $gH := \{gh \mid h \in H\}$ 称为 H 的含 g 的左陪集 (left coset). 类似地可定义右陪集.

注 3 若子群 H 的两个左陪集有交, 则两者必相等 (证明留作练习).

定义 7

群 G 的子群 H 称为正规 (normal) 子群或不变 (invariant) 子群, 若

$$ghg^{-1} \in H, \quad \forall g \in G, h \in H.$$

定义 8

设 G 是群, 则 $\mathscr{A}(G) = \{\mu : G \to G \mid \mu \text{ 为自同构映射}\}$ 以映射的复合为群乘法构成群, 称为群 G 的自同构群. "以映射的复合为乘法" 是指 $\forall \mu, \nu \in \mathscr{A}(G)$, 群乘积 $\mu\nu \in \mathscr{A}(G)$ 定义为 $(\mu\nu)(g) = \mu(\nu(g)) \quad \forall g \in G$.

定理 G-1-2

以 $\mathscr{A}_I(G)$ 代表 G 上全体内自同构映射的集合, 即

$$\mathscr{A}_I(G) = \{I_g : G \to G \mid g \in G\} \subset \mathscr{A}(G),$$

则 $\mathscr{A}_I(G)$ 是群 $\mathscr{A}(G)$ 的一个正规子群.

Pf 习题. □

定义 9

设 H 和 K 是群, 且存在同态映射 $\mu : K \to \mathscr{A}(H)$. $\forall k \in K$, 把 $\mu(k) \in \mathscr{A}(H)$ 简记作 μ_k, 则 $\tilde{G} = H \times K$ 配以由下式定义的群乘法

$$(h, k)(h', k') := (h\mu_k(h'), kk'), \quad \forall h, h' \in H, k, k' \in K$$

所构成的群称为 H 和 K 的半直积群, 记作 $G = H \otimes_s K$.

G.2

Lie 群

定义 1

若 G 既是 n 维 (实) 流形又是群, 其群乘映射 $G\times G\to G$ (请注意 $G\times G$ 也是流形) 和求逆元映射 $G\to G$ 都是 C^∞ 的, 则 G 叫 n 维 (实) Lie 群 (Lie group).[a]

[a]约定把有离散拓扑的可数群称为零维 Lie 群, 因为有限群的默认拓扑是离散拓扑, 所以有限群都可看作零维 Lie 群.

例 1

以加法为群乘法, 则 $\mathbb{R}$ 是 1 维 Lie 群.

例 2

$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}$ 的直积群 $\mathbb{R}^2$ 是 2 维 Lie 群. 推而广之, $\mathbb{R}^n$ 是 n 维 Lie 群.

例 3

设 $\phi:\mathbb{R}\times M\to M$ 是流形 M 上的任一单参微分同胚群 (见 §2.2 定义 13), 则 $\{\phi_t\mid t\in\mathbb{R}\}$ 是 1 维 Lie 群,[a] 同构于 $\mathbb{R}$.

[a]$\phi(t,p)=p\quad\forall p\in M,t\in\mathbb{R}$ 的情况可视为例外. 这是与 M 上的 0 矢量场对应的那个特殊的单参微分同胚群, 是只含恒等元的独点群, 可看作零维 Lie 群.

例 4

由第 4 章习题 5(c) 易证广义黎曼空间 (M,g_{ab}) 上的两个等度规映射的复合也是等度规映射, 因此 (M,g_{ab}) 上全体等度规映射的集合以复合映射为乘法构成群, 称为 (M,g_{ab}) 的等度规群. 还可验证等度规群是 Lie 群. Minkowski 时空的等度规群是 10 维 Lie 群, Schwarzschild 时空的等度规群是 4 维 Lie 群. 一般地, n 维广义黎曼空间 (M,g_{ab}) 的等度规群的维数 $m\leqslant n(n+1)/2$ (见定理 4-3-4). 但 (M,g_{ab}) 上全体微分同胚的集合则 "大" 到不能构成有限维群. 事实上, 它是一个无限维群.

注 1 本附录只限于讨论有限维 Lie 群, 虽然许多结论对无限维 Lie 群也适用.

以下如无特别声明, G 一律代表 Lie 群. Lie 群的双重身份 (既是群又是流形) 使得用几何语言研究 Lie 群成为可能. 群乘映射和求逆元映射的光滑性则使 Lie 群具有一系列好性质.

定义 2

Lie 群 G 和 G' 之间的 C^∞ 同态映射 $\mu:G\to G'$ 称为 Lie 群同态 (Lie-group homomorphism). Lie 群同态 μ 称为 Lie 群同构 (Lie-group isomorphism), 若 μ 为微分同

胚.

定义 3

Lie 群 G 的子集 H 称为 G 的 Lie 子群 (Lie subgroup), 若 H 既是 G 的子流形又是 G 的子群.

定义 4

$\forall g\in G$, 映射 $L_g: h\mapsto gh\quad \forall h\in G$ 叫做由 g 生成的左平移 (left translation).

注 2 ① 由 Lie 群定义中关于群乘映射和求逆元映射的 C^∞ 性可知左平移 $L_g: G\to G$ 是微分同胚映射. ② 易见 $L_{gh}=L_g\circ L_h$.

以下的讨论经常涉及 G 的一点的矢量和 G 的一个子集上的矢量场, 并要对两者作明确区分. 我们将用 $A,B,\cdots$ 代表一点的矢量, 用 $\bar A,\bar B,\cdots$ 代表矢量场, 用 $\bar A_g$ 代表矢量场 $\bar A$ 在点 $g\in G$ 的值. 为简化表达式, 本附录中所有矢量 (除少数情况外) 都不加抽象指标.

定义 5

G 上矢量场 $\bar A$ 叫左不变的 (left invariant), 若

$$L_{g*}\bar A=\bar A,\quad \forall g\in G, \tag{G-2-1}$$

其中 L_{g*} 是由左平移映射 $L_g: G\to G$ 诱导的推前映射 (见 §4.1).

注 3 ① 左不变矢量场必为 C^∞ 矢量场 [证明见 Spivak (1970) vol. I]; ② 不难看出左不变矢量场的定义式(G-2-1) 等价于

$$(L_{g*}\bar A)_{gh}=\bar A_{gh},\quad \forall g,h\in G. \tag{G-2-1$'$}$$

根据 §4.1, 当 $\phi: M\to N$ 是微分同胚时, ϕ_* 把 M 上矢量场 $\bar v$ 映为 N 上矢量场 $\phi_*\bar v$, 满足 $(\phi_*\bar v)_{\phi(p)}=\phi_*(\bar v|_p)\quad \forall p\in M$. 用于现在的情况, 令 $M=N=G,\phi=L_g,p=h,\bar v=\bar A$, 便得 $(L_{g*}\bar A)_{gh}=L_{g*}(\bar A_h)$. 于是式(G-2-1$'$) 又等价于

$$\bar A_{gh}=L_{g*}\bar A_h,\quad \forall g,h\in G. \tag{G-2-1$''$}$$

上式可作为左不变矢量场 $\bar A$ 的等价定义.

不难看出左不变矢量场之和以及左不变矢量场乘以常数仍为左不变矢量场, 故 $\mathscr{L}=\{\bar A\mid \bar A$ 为G 上的左不变矢量场$\}$ 是矢量空间.

定理 G-2-1

G 上全体左不变矢量场的集合 $\mathscr{L}$ 与 G 的恒等元 e 的切空间 V_e (作为两个矢量空间) 同构.

Pf $\forall A\in V_e$, 用下式定义 G 上的矢量场 $\bar A$:

$$\bar A_g:=L_{g*}A,\quad \forall g\in G.\quad (\text{注: 由此得}\bar A_e=A) \tag{G-2-2}$$

把上式的 g 改为 gh 得

$$\bar A_{gh}=L_{gh*}A=(L_g\circ L_h)_*A=(L_{g*}\circ L_{h*})A=L_{g*}(L_{h*}A)=L_{g*}\bar A_h,$$

说明 $\bar{A}$ 满足式(G-2-1″), 因而是左不变矢量场. 可见式(G-2-2) 定义了一个映射 $\eta : V_e \to \mathscr{L}$ (把 A 映为 $\bar{A}$). L_{g*} 的线性性保证 η 的线性性, 由 $\bar{A}_e = A$ 易见 η 是一一映射. 于是欲证 η 为同构只须证 η 为到上映射. $\forall \bar{A} \in \mathscr{L}$, 有 $\bar{A}_e \in V_e$. 把 $\bar{A}_e$ 按式(G-2-2) 决定的左不变矢量场记作 $\bar{B} \in \mathscr{L}$, 欲证 η 的到上性只须证 $\bar{B} = \bar{A}$ (亦即证明 $\bar{A} \in \mathscr{L}$ 由它在 e 点的值 $\bar{A}_e$ 唯一决定), 而这可由下式看出: $\bar{B}_g = L_{g*}\bar{A}_e = \bar{A}_{ge} = \bar{A}_g \quad \forall g \in G$, 其中第一步是 $\bar{B}$ 的定义, 第二步用到式(G-2-1″). □

Part II

Lie 代数与单参子群

本部分引入 Lie 括号与 Lie 代数, 证明左不变矢量场的集合构成 Lie 代数, 并把 Lie 群恒等元处的切空间赋予 Lie 括号结构, 从而得到 Lie 群 (抽象) 的 Lie 代数. 由 Lie 代数元生成的单参子群把代数的元与群上的曲线联系起来, 并由此建立指数映射.

内容概要

- 掌握 Lie 括号, Lie 代数, Lie 代数同态, Lie 子代数, 理想与商 Lie 代数等概念.
- 理解左不变矢量场构成 Lie 代数, 以及恒等元处切空间与 Lie 代数的同构.
- 掌握单参子群与指数映射, 理解左不变矢量场的完备性定理.

G.3

Lie 代数

在矢量空间 $\mathscr{V}$ 上定义某种称为 "乘法" 的映射就得到一个代数. 一种重要乘法叫 Lie 括号 (Lie bracket), 记作 $[,]:\mathscr{V}\times\mathscr{V}\to\mathscr{V}$, 它是满足以下两条件的双线性映射:

$$\text{(a)}\quad [A,B]=-[B,A],\quad \forall A,B\in\mathscr{V}, \tag{G-3-1}$$

$$\text{(b)}\quad [A,[B,C]]+[C,[A,B]]+[B,[C,A]]=0,\quad \forall A,B,C\in\mathscr{V}. \tag{G-3-2}$$

条件 (b) 称为 Jacobi 恒等式.

定义 1

定义了 Lie 括号的矢量空间称为 Lie 代数 (Lie algebra). 任意两个元素的 Lie 括号都为零的 Lie 代数称为阿贝尔 Lie 代数.

本附录只讨论有限维实矢量空间上的 Lie 代数 (实 Lie 代数), 虽然许多结论对无限维 (实或复) Lie 代数也适用.

例 1

把 $\mathbb{R}^3$ 看作 3 维矢量空间, 用下式定义 Lie 括号:

$$[\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}]:=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u},\quad \forall\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^3,$$

则 $\mathbb{R}^3$ 成为 Lie 代数. 作为习题, 请读者验证上述定义满足 Lie 括号的条件.

例 2

$\mathscr{M}=\{m\times m$ 矩阵$\}$ 显然为 m^2 维矢量空间. 用矩阵对易子定义 Lie 括号, 即

$$[A,B]:=AB-BA,\quad \forall A,B\in\mathscr{M},\quad (\text{其中}AB\text{是}A,B\text{的矩阵积}) \tag{G-3-3}$$

则 $\mathscr{M}$ 是 Lie 代数. 作为习题, 请读者验证上述定义满足 Lie 括号的条件.

定理 G-3-1

G 上全体左不变矢量场的集合 $\mathscr{L}$ 是 Lie 代数.

Pf 以矢量场对易子为 Lie 括号. 因为 $\forall\bar{A},\bar{B}\in\mathscr{L}$ 有

$$L_{g*}[\bar{A},\bar{B}]=[L_{g*}\bar{A},L_{g*}\bar{B}]=[\bar{A},\bar{B}],$$

(第一步用到第 4 章习题 6, 第二步用到 $\bar{A},\bar{B}\in\mathscr{L}$), 所以 $[\bar{A},\bar{B}]\in\mathscr{L}\quad\forall\bar{A},\bar{B}\in\mathscr{L}$, 可见对易子的确是从 $\mathscr{L}\times\mathscr{L}$ 到 $\mathscr{L}$ 的映射. 对易子当然是双线性的. 对易子的反称性表明它满足 Lie 括号的条件 (a). 第 2 章习题 8(b) 保证对易子也满足 Lie 括号的条件 (b). □

定义 2

设 $\mathscr{V}$ 和 $\mathscr{W}$ 是 Lie 代数. 线性映射 $\beta:\mathscr{V}\to\mathscr{W}$ 称为 Lie 代数同态, 若它保 Lie 括号, 即 $\beta([A,B])=[\beta(A),\beta(B)]\quad\forall A,B\in\mathscr{V}$. Lie 代数同态 $\beta:\mathscr{V}\to\mathscr{W}$ 称为 Lie 代数同构, 若 β 是一一到上映射.

注 1 今后常把两个同构的 Lie 代数视作相同, 并用等号表示.

对 Lie 群 G 的恒等元 e 的切空间 V_e 用下式定义 Lie 括号:

$$[A,B]:=[\bar{A},\bar{B}]_e,\quad\forall A,B\in V_e, \tag{G-3-4}$$

(其中 $\bar{A},\bar{B}$ 分别是 A,B 对应的左不变矢量场.) 则 V_e 成为 Lie 代数, 称为 Lie 群 G 的 Lie 代数, 记作 $\mathscr{G}$. 由定理 G-2-1 易证 $\mathscr{G}$ 与 $\mathscr{L}$ 有 Lie 代数同构关系, η 可充当同构映射. 反之, 给定一个 Lie 代数, 是否也可找到一个 Lie 群, 它的 Lie 代数是所给的 Lie 代数? 答案是: 这样的 Lie 群一定存在, 并且唯一到只差整体拓扑结构的程度. [例如, 以流形 S^1 上的角坐标之和作为群乘法, 则 S^1 是 1 维 Lie 群, 它与 1 维 Lie 群 $\mathbb{R}$ 不同 (有不同的整体拓扑), 但却有相同的 Lie 代数. §G.6 末还将给出有相同 Lie 代数的不同 Lie 群的另外两个重要例子.] 准确地说, 给定一个 Lie 代数, 总可找到唯一的单连通 Lie 群 (其流形为单连通流形[1] 的 Lie 群), 它以所给 Lie 代数为 Lie 代数. 这是 Lie 群理论中的一个重要定理 (证略). Lie 群和 Lie 代数的这一密切联系使 Lie 群的讨论大为简化, 因为 Lie 代数比 Lie 群简单得多 (选读 12-5-1 和 12-5-2 就是两个例子).

定理 G-3-2

设 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{G}'$ 分别是 Lie 群 G 和 $\tilde{G}$ 的 Lie 代数, $\rho:G\to\tilde{G}$ 是同态映射, 则 ρ 在点 $e\in G$ 诱导的推前映射 $\rho_*:\mathscr{G}\to\mathscr{G}'$ 是 Lie 代数同态.

Pf 见 Warner (1983) 的 3.14. □

定义 3

Lie 代数 $\mathscr{G}$ 的子空间 $\mathscr{H}$ 称为 $\mathscr{G}$ 的 Lie 子代数 (Lie subalgebra), 若

$$[A,B]\in\mathscr{H},\quad\forall A,B\in\mathscr{H},$$

其中 $[A,B]$ 是把 A,B 看作 $\mathscr{G}$ 的元素时的 Lie 括号, 现在也称为子代数 $\mathscr{H}$ 的 Lie 括号.

定理 G-3-3

设 H 是 Lie 群 G 的 Lie 子群, 则 H 的 Lie 代数 $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{G}$ 的 Lie 子代数.

Pf 见, 例如, Bleecker (1981) P.20; Marsden et al. (1994) P.253. □

[1] 任一闭曲线可通过连续变形缩为一点的连通流形称为单连通 (simply connected) 流形.

选读 G-3-1

定义 4

Lie 代数 $\mathscr{G}$ 的子代数 $\mathscr{H}$ 称为 $\mathscr{G}$ 的理想 (ideal), 若

$$[A,\mu]\in\mathscr{H},\quad \forall A\in\mathscr{G},\mu\in\mathscr{H}.$$

注 2 理想在 Lie 代数理论中的角色相当于正规子群在群论中的角色.

定理 G-3-4

设 $\mathscr{H}\subset\mathscr{G}$ 是理想, $\mathscr{G}/\mathscr{H}$ 代表以等价类为元素的集合 ($A,B\in\mathscr{G}$ 叫等价的, 若 $A-B\in\mathscr{H}$), 则 $\mathscr{G}/\mathscr{H}$ 是 Lie 代数, 称为商 Lie 代数 (quotient Lie algebra).

Pf 以 $\pi:\mathscr{G}\to\mathscr{G}/\mathscr{H}$ 代表投影映射, 即把 $A\in\mathscr{G}$ 映为 A 所在等价类 (看作 $\mathscr{G}/\mathscr{H}$ 的元素) 的映射. $\mathscr{G}/\mathscr{H}$ 在如下加法和数乘定义下构成矢量空间:
加法: $\forall\hat{A},\hat{B}\in\mathscr{G}/\mathscr{H}$ 定义 $\hat{A}+\hat{B}:=\pi(A+B)$, 其中 $A,B\in\mathscr{G}$ 满足 $\pi(A)=\hat{A},\pi(B)=\hat{B}$.
数乘: $\forall\hat{A}\in\mathscr{G}/\mathscr{H},\alpha\in\mathbb{R}$ 定义 $\alpha\hat{A}:=\pi(\alpha A)$, 其中 $A\in\mathscr{G}$ 满足 $\pi(A)=\hat{A}$.
先说明这样定义的合法性. 以加法为例, 虽然满足 $\pi(A)=\hat{A},\pi(B)=\hat{B}$ 的 A,B 很多, 但取其中任一皆可. 设若改取 $A',B'\in\mathscr{G}$, 则 $\pi(A')=\hat{A},\pi(B')=\hat{B}$ 保证 $\exists\mu,\nu\in\mathscr{H}$ 使 $A'=A+\mu,B'=B+\nu$, 从而 $\pi(A'+B')=\pi(A+B+\mu+\nu)=\pi(A+B)$. 可见加法 (同理可证数乘) 定义合法. 再用下式定义 Lie 括号使 $\mathscr{G}/\mathscr{H}$ 成为 Lie 代数:

$$[\hat{A},\hat{B}]:=\pi([A,B]),\quad \forall\hat{A},\hat{B}\in\mathscr{G}/\mathscr{H}\quad [\text{其中}A,B\in\mathscr{G}\text{ 满足}\pi(A)=\hat{A},\pi(B)=\hat{B}]. \tag{G-3-5}$$

若改取 $A',B'\in\mathscr{G}$ 满足 $\pi(A')=\hat{A},\pi(B')=\hat{B}$, 则 $\exists\mu,\nu\in\mathscr{H}$ 使

$$[A',B']=[A+\mu,B+\nu]=[A,B]+[A,\nu]+[\mu,B]+[\mu,\nu]=[A,B]+\sigma,$$

其中 $\sigma\in\mathscr{H}$, 故 $\pi([A',B'])=\pi([A,B])$, 因而式(G-3-5) 的定义合法. □

定义 5

Lie 代数 $\mathscr{G}$ 称为单 (simple) Lie 代数, 若它不是阿贝尔代数而且除 $\mathscr{G}$ 及 $\{0\}$ 外不含理想. $\mathscr{G}$ 称为半单 (semi-simple) Lie 代数, 若它不含非零的阿贝尔理想. 相应地, Lie 群 G 称为单 Lie 群, 若它不是阿贝尔群而且除 G 外不含正规子群. G 称为半单 Lie 群, 若它不含阿贝尔正规子群.

G.4

单参子群和指数映射

定义 1

C$^\infty$ 曲线 $\gamma:\mathbb{R}\to G$ 叫 Lie 群 G 的单参子群 (one-parameter subgroup), 若

$$\gamma(s+t)=\gamma(s)\gamma(t),\quad \forall s,t\in\mathbb{R}, \tag{G-4-1}$$

其中 $\gamma(s)\gamma(t)$ 代表群元 $\gamma(s)$ 和 $\gamma(t)$ 的群乘积.

注 1 式(G-4-1) 表明单参子群 $\gamma:\mathbb{R}\to G$ 是从 Lie 群 $\mathbb{R}$ 到 G 的 Lie 群同态映射.

注 2 按定义 1, 单参子群是满足式(G-4-1) 的一条 C$^\infty$ 曲线, 但不妨把映射的像集 $\{\gamma(t)\mid t\in\mathbb{R}\}\subset G$ 看作单参子群. 式(G-4-1) 保证: ① 子集的任意两个元素按 G 的乘法的积仍在子集内; ② 子集含 G 的恒等元 e; [由式(G-4-1) 得 $\gamma(t)=\gamma(0)\gamma(t)$, 以 $\gamma(t)$ 看作 G 的元素 $\gamma(t)$ 的逆元右乘得 $e=\gamma(0)$.] ③ 子集的任一元素 $\gamma(t)$ (作为 G 的元素) 的逆元 [就是 $\gamma(-t)$] 在子集内. 所以子集 $\{\gamma(t)\mid t\in\mathbb{R}\}$ 构成子群 (而且是阿贝尔子群).

本节的一个重点是证明如下结论: "单参子群是左不变矢量场过 e 的不可延积分曲线, 反之亦然." 单参子群按定义是从 $\mathbb{R}$ 到 G 的映射, 定义域为全 $\mathbb{R}$. 因此, 要接受上述结论, 至少要证明左不变矢量场过 e 的积分曲线的参数可取遍全 $\mathbb{R}$. 下面的定理对此给出保证 (而且更强).

定理 G-4-1

任一左不变矢量场 $\bar{A}$ 都是完备矢量场, 就是说, 它的每一不可延积分曲线的参数都可取遍全 $\mathbb{R}$.

Pf 本书正文惯用 $\partial/\partial t$ 代表曲线 $\gamma(t)$ 的切矢, 由于本附录涉及多条曲线的切矢, 为避免混淆, 我们改用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)$ 代表 $\gamma(t)$ 的切矢. 设 $\mu(t)$ 是 $\bar{A}$ 的、满足 $\mu(0)=e$ 的积分曲线, 不失一般性, 设其定义域为开区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$, 即 $\mu:(-\varepsilon,\varepsilon)\to G$. 在线上取点 $h\equiv\mu(\varepsilon/2)$, 令 $\nu(t)=h\mu(t-\varepsilon/2)$, 则有曲线映射 $\nu:(-\varepsilon/2,3\varepsilon/2)\to G$, 且其切矢

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t\nu(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t L_h\mu(t-\varepsilon/2)=L_{h*}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t\mu(t-\varepsilon/2), \tag{G-4-2}$$

其中第二步用到 "曲线像的切矢等于曲线切矢的像". 令 $t'(t)=t-\varepsilon/2$, 则

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t\mu(t-\varepsilon/2)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t\mu(t'(t))=\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\right|_{t'(t)}\mu(t')\right]\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\right|_{t'(t)}\mu(t')=\bar{A}_{\mu(t-\varepsilon/2)}, \tag{G-4-3}$$

其中第二步用到式 (2-2-8), 即 $\partial/\partial t=(\partial/\partial t')\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t$, 最末一步是因为 $\mu(t)$ 是 $\bar{A}$ 的积分曲线. 代入式(G-4-2) 便得

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t\nu(t)=L_{h*}\bar{A}_{\mu(t-\varepsilon/2)}=\bar{A}_{h\mu(t-\varepsilon/2)}=\bar{A}_{\nu(t)}, \tag{G-4-4}$$

其中第二步用到左不变矢量场的定义式(G-2-1″). 式(G-4-4) 表明 ν 也是 $\bar{A}$ 的积分曲线, 而 $\nu(\varepsilon/2)=h\mu(0)=h=\mu(\varepsilon/2)$ 则说明 ν 与 μ 有交, 因此由积分曲线的 (局域) 唯一性可知在两积分曲线 ν 和 μ 的定义域的交集 $(-\varepsilon/2,\varepsilon)$ 上有 $\nu=\mu$. 可见 μ 的定义域已被延拓至 $(-\varepsilon,3\varepsilon/2)$. 重复以上操作便得 $\bar{A}$ 的一条定义域为全 $\mathbb{R}$ 的积分曲线 $\gamma:\mathbb{R}\to G$. 作为证明的第二步, $\forall g\in G$, 令

$$\beta(t)=g\gamma(t), \tag{G-4-5}$$

则仿照式(G-4-2) 的推导有

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t \beta(t)=\bar{A}_{g\gamma(t)}=\bar{A}_{\beta(t)}, \tag{G-4-6}$$

表明 $\beta:\mathbb{R}\to G$ 是 $\bar{A}$ 过 g 的积分曲线 [满足 $\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}t|_{t=0}=\bar{A}_g$]. 可见 $\bar{A}$ 的任一不可延积分曲线的参数都可取遍全 $\mathbb{R}$. □

定理 G-4-2

设 $\gamma:\mathbb{R}\to G$ 是左不变矢量场 $\bar{A}$ 的、满足 $\gamma(0)=e$ 的积分曲线, 则 γ 是 G 的一个单参子群.

Pf 欲证 γ 是单参子群只须证明它满足式(G-4-1). 定理 G-4-1 已证明 $\beta(t)=g\gamma(t)$ 是 $\bar{A}$ 的、满足 $\beta(0)=g$ 的积分曲线. 取 γ 线上一点 $\gamma(s)$ 作为 g, 便知

$$\beta(t)\equiv\gamma(s)\gamma(t) \tag{G-4-7}$$

是满足 $\beta(0)=\gamma(s)$ 的积分曲线. 另一方面, 由 $\gamma_1(t)\equiv\gamma(s+t)$ 定义的曲线 $\gamma_1:\mathbb{R}\to G$ 在 $\gamma_1(t)$ 点的切矢为

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t\gamma_1(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t\gamma(s+t)=\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(s+t)}\right|_{s+t}\gamma(s+t)\right]\frac{\mathrm{d}(s+t)}{\mathrm{d}t}=\bar{A}_{\gamma(s+t)}=\bar{A}_{\gamma_1(t)}.$$

[倒数第二步是因为 $\gamma(t)$ 是 $\bar{A}$ 的积分曲线.] 上式表明 γ_1 也是 $\bar{A}$ 的积分曲线, 而且也满足 $\gamma_1(0)=\gamma(s)$. 由积分曲线的唯一性可知 $\gamma_1(t)=\beta(t)$, 对比式(G-4-7) 便得 $\gamma(s+t)=\gamma(s)\gamma(t)$. □

定理 G-4-3

设单参子群 $\gamma:\mathbb{R}\to G$ 在恒等元 e 的切矢为 A, 则 $\gamma(t)$ 是 A 对应的左不变矢量场 $\bar{A}$ 的积分曲线.

Pf 只须证明对 γ 的任一点 $\gamma(s)$ 有 $\bar{A}_{\gamma(s)}=\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=s}\gamma(t)$, 而这由下式显见:

$$\bar{A}_{\gamma(s)}=L_{\gamma(s)*}A=L_{\gamma(s)*}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\gamma(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}L_{\gamma(s)}\gamma(t)$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\gamma(s)\gamma(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\gamma(s+t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\right|_{t'=s}\gamma(t')=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=s}\gamma(t). \qquad \square$$

由定理 G-4-2 和 G-4-3 可知左不变矢量场与单参子群之间有一一对应关系. 注意到 V_e 与左不变矢量场的集合 $\mathscr{L}$ 一一对应, 便知 Lie 群 G 的 Lie 代数 $\mathscr{G}(=V_e)$ 的每一元素 A 生成 G 的一个单参子群 $\gamma(t)$, 所以 $\mathscr{G}$ 的每一元素称为一个 (无限小) 生成元 (generator). 物理文献常又把 $\mathscr{G}$ 的一个基底的元素称为生成元.

注 3 与 V_e 的零元 $(A=0)$ 对应的单参子群就是只含 e 的子群, 即满足 $\gamma[\mathbb{R}]=e$ 的独点线 $\gamma:\mathbb{R}\to G$.

定义 2

Lie 群 G 上的指数映射 (exponential map) $\exp: V_e \to G$ 定义为

$$\exp(A) := \gamma(1), \quad \forall A \in \mathscr{G}, \tag{G-4-8}$$

其中 $\gamma: \mathbb{R} \to G$ 是与 A 对应的那个单参子群.

注 4 读过选读 3-3-1 的读者可把该处的指数映射与现在的指数映射作一比较. 两处都以流形为背景, 但附加结构不同. 选读 3-3-1 的流形 M 有度规结构, 因而有测地线概念, 利用 "一点及其一个矢量决定唯一测地线" 的定理就可定义指数映射; 现在的流形 G 有群结构, 因而有单参子群概念, 利用 "e 点的一个矢量 A 决定唯一单参子群" 的定理就可用式(G-4-8) 定义指数映射.

定理 G-4-4

$$\exp(sA) = \gamma(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}, A \in V_e, \tag{G-4-9}$$

其中 $\gamma(s)$ 是由 A 决定的单参子群.

Pf 令 $A' = sA \in V_e$. 以 $\bar{A}, \bar{A}'$ 分别代表 A 和 A' 对应的左不变矢量场. $\eta: V_e \to \mathscr{L}$ 是同构映射导致 $\bar{A}' = s\bar{A}$. 以 $\gamma(t)$ 代表 $\bar{A}$ 对应的单参子群, 用 $\gamma'(t) \equiv \gamma(st)$ 定义曲线 $\gamma': \mathbb{R} \to G$, 则

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t \gamma'(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t \gamma(st) = \left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(st)}\right|_{st} \gamma(st)\right] \frac{\mathrm{d}(st)}{\mathrm{d}t} = s\bar{A}_{\gamma(st)} = \bar{A}'_{\gamma'(t)},$$

说明 $\gamma'(t)$ 是 $\bar{A}'$ 的积分曲线. 注意到 $\gamma'(0) = \gamma(0) = e$, 可知 $\gamma'(t)$ 是 $\bar{A}'$ 对应的单参子群. 于是 $\exp(sA) = \exp(A') = \gamma'(1) = \gamma(s)$. □

注 5 设 $\gamma(t)$ 是由 $A \in V_e$ 决定的单参子群, 则定理 G-4-4 表明

$$\gamma(t) = \exp(tA). \tag{G-4-10}$$

今后也常用 $\exp(tA)$ 代表由 A 决定的单参子群.

定理 G-4-5

设 $\phi: \mathbb{R} \times G \to G$ 是由 $A \in V_e$ 对应的左不变矢量场 $\bar{A}$ 产生的单参微分同胚群, 则

$$\phi_t(g) = g\exp(tA), \quad \forall g \in G, t \in \mathbb{R}. \tag{G-4-11}$$

Pf 设 $\gamma(t)$ 是由 A 决定的单参子群, 则定理 G-4-4 表明 $\gamma(t) = \exp(tA)$ [见式(G-4-10)]. 由式(G-4-5) 和(G-4-6) 又知 $\beta(t) = g\gamma(t)$ 是 $\bar{A}$ 过 g 点的积分曲线, 且 $\beta(0) = g$. 由单参微分同胚群的构造 (见小节 2.2.2 末段) 便知

$$\phi_t(g) = \beta(t) = g\gamma(t) = g\exp(tA). \qquad \square$$

选读 G-4-1

由群乘映射和求逆映射的光滑性出发, 注意到微分方程的解对其初值的光滑依赖性, 可知 $\exp: V_e \to G$ 为 C^∞ 映射. 再用反函数定理就可证明如下命题: V_e 中存在含 0 元的开子集 $\tilde{V}_e$, G 中存在含 e 点的开子集 N, 使 $\exp: \tilde{V}_e \to N$ 为微分同胚 (试与定理 3-3-7 对比). 利用指数映射的这一性质可给 G 定义局部坐标系, 其坐标称为群 G 的正则坐标 (canonical coordinates).

Part III

常用 Lie 群及其 Lie 代数

本部分把前几节的抽象理论用到一系列具体而重要的矩阵 Lie 群上: 一般线性群 $\mathrm{GL}(m)$, 正交群 $\mathrm{O}(m)$, Lorentz 群 $\mathrm{O}(1,3)$, 酉群 $\mathrm{U}(m)$, 欧氏群 $\mathrm{E}(m)$ 与 Poincaré 群 P. 对每个群都给出其 Lie 代数, 维数, 连通性与紧致性, 并研究 $\mathrm{SO}(3)$ 与 $\mathrm{SU}(2)$ 等常用子群及其 Lie 代数.

内容概要

- 掌握 $\mathrm{GL}(m), \mathrm{O}(m), \mathrm{SO}(m), \mathrm{U}(m), \mathrm{SU}(m), \mathrm{E}(m)$ 及 Poincaré 群的定义与维数.
- 掌握矩阵 Lie 代数的刻画, 如 $\mathscr{O}(m)$ 是反称矩阵等.
- 理解 $\mathrm{O}(1,1)$ 与 $\mathrm{O}(1,3)$ 的连通分支结构.

G.5

常用 Lie 群及其 Lie 代数

G.5.1 $\mathrm{GL}(m)$ 群 (一般线性群, general linear group)

设 V 是 $m(<\infty)$ 维实矢量空间, 以 $\mathrm{GL}(m)$ 代表由 V 到 V 的全体可逆线性映射的集合, 以映射的复合为乘法, 则不难证明 $\mathrm{GL}(m)$ 是群,[2] 称为 m 阶 (实) 一般线性群 (general linear group). 因为由 V 到 V 的线性映射就是 V 上的 $(1,1)$ 型张量 (见 §2.4 定义 2 前一段), 所以 $\mathrm{GL}(m)$ 的任一群元 $T\in\mathscr{T}^1_1(1,1)$ [$\mathscr{T}^1_1(1,1)$ 代表 V 上 $(1,1)$ 型张量的集合]. 取定 V 的任一基底 (及其对偶基底) 后, T 就有 m^2 个分量, 自然对应于一个 $m\times m$ 实矩阵. 映射 T 的可逆性保证其矩阵 (仍记作 T) 是可逆矩阵, 即 $\det T\neq 0$. 不难看出全体 $m\times m$ 可逆矩阵在矩阵乘法下构成群 (以单位矩阵 I 为恒等元), 而且与 $\mathrm{GL}(m)$ 同构, 于是

$$\mathrm{GL}(m)=\{m\times m\text{ 实矩阵}T\mid \det T\neq 0\}. \tag{G-5-1}$$

因此也常把 $\mathrm{GL}(m)$ 看作实矩阵群 (但上式等号代表的同构关系依赖于 V 的基底的选取). 另一方面, 集合 $\mathbb{R}^{m^2}$ 的每点因为由 m^2 个实数构成而可排成一个 $m\times m$ 实矩阵, 故 $\mathrm{GL}(m)$ 可看作 $\mathbb{R}^{m^2}$ 的子集. 对矩阵求行列式的操作可看作连续映射 $\det:\mathbb{R}^{m^2}\to\mathbb{R}$, 满足

$$\mathrm{GL}(m)=\overset{-1}{\det}(-\infty,0)\cup\overset{-1}{\det}(0,\infty)\subset\mathbb{R}^{m^2}.$$

$(-\infty,0)$ 和 $(0,\infty)$ 显然是 $\mathbb{R}$ 的开子集, 故映射 $\det$ 的连续性保证 $\det^{-1}(-\infty,0)$ 和 $\det^{-1}(0,\infty)$ 是 $\mathbb{R}^{m^2}$ 的开子集, 这又导致① $\mathrm{GL}(m)$ 是 $\mathbb{R}^{m^2}$ 的开子集; ② $\det^{-1}(-\infty,0)$ 和 $\det^{-1}(0,\infty)$ 是 $\mathrm{GL}(m)$ 的开子集 (用诱导拓扑衡量). 而 $\det^{-1}(-\infty,0)$ 和 $\det^{-1}(0,\infty)$ 又因为补集而都是 $\mathrm{GL}(m)$ 的闭子集, 可见 $\mathrm{GL}(m)$ 含有除自身和 $\varnothing$ 外的既开又闭的子集, 因而是非连通流形. 还可证明 [见 Marsden 和 Ratiu (1994)] $\mathrm{GL}(m)$ 是有两个连通分支 (connected component) 的非连通流形. 最简单的例子是

$$\mathrm{GL}(1)=(-\infty,0)\cup(0,\infty).$$

当说到 $\mathrm{GL}(m)$ 的群元是从 V 到 V 的可逆线性映射时, 我们是在用纯几何语言. 当说到 $\mathrm{GL}(m)$ 的群元是 $m\times m$ 可逆矩阵时, 我们是在用坐标语言——给 V 选定基底 (及其对偶基底) 后, 从 V 到 V 的任一可逆线性映射 T 就有了 m^2 个分量, 选作坐标, 便得流形 $\mathrm{GL}(m)$ 上的一个坐标系. 以 $\mathscr{GL}(m)$ 代表 $\mathrm{GL}(m)$ 的 Lie 代数, 设 $A\in\mathscr{GL}(m)$, 则它是恒等元 $I\in\mathrm{GL}(m)$ 的矢量, 在上述坐标系的基底中自然有 m^2 个分量, 因而也对应于一个 $m\times m$ 实矩阵. 反之, 任一 $m\times m$ 实矩阵的 m^2 个矩阵元配以 I 点的坐标基矢便给出 I 点的一个矢量. 可见, 虽然只有可逆实 $m\times m$ 矩阵才是 $\mathrm{GL}(m)$ 的元素, 任意 $m\times m$ 实矩阵都是 $\mathscr{GL}(m)$ 的元素. 事实上, 全体 $m\times m$ 实矩阵构成的矢量空间与 I 点的切空间 V_I 有同构关系, 于是有如下定理:

[2] 对映射提出可逆要求旨在保证每一群元确有逆元.

定理 G-5-1

$\mathscr{GL}(m)=\{m\times m$ 实矩阵$\}$ (等号代表两个矢量空间同构, 同构关系依赖于 V 的基底的选取).

选读 G-5-1

对定理 G-5-1 的结论也可这样理解: 设 A 是任一 $m\times m$ 实矩阵, 对 $t\in\mathbb{R}$, 考虑矩阵 $\psi(t)=I+tA$. 矩阵 I 有逆保证矩阵 $\psi(t)$ 在 t 足够小时有逆, 因此 $\psi(t)\in \mathrm{GL}(m)$. 当 t 活动 (且足够小) 时, $\psi(t)$ 是 $\mathrm{GL}(m)$ 中过 I 点的曲线, 它在 I 点的切矢为

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\psi(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(I+tA)=A, \tag{G-5-2}$$

所以任一 $m\times m$ 实矩阵 A 都对应于 $\mathscr{GL}(m)$ 的一个元素, 再由

$$\dim\{m\times m \text{ 实矩阵}\}=\dim \mathrm{GL}(m)=\dim\mathscr{GL}(m)$$

便知 $\mathscr{GL}(m)$ 与集合 $\{m\times m$ 实矩阵$\}$ 有一一对应关系.

注 1 式(G-5-2) 中的 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 本来代表曲线的切矢, 但第二个等号却把它看成普通求导记号. 现在说明这种 "偷换概念" 的合法性 (后面出现类似情况不再一一说明). $\mathrm{GL}(m)$ 是 $\mathbb{R}^{m^2}$ 的开子集, 故有自然坐标系. 以 $\psi^i(t)$ $(i=1,\cdots,m^2)$ 代表曲线 $\psi(t)$ 在此系的参数式, 则 $\psi^i(t)=I^i+tA^i$, 其中 A^i 是常数矩阵 A 的第 i 个矩阵元 (I^i 的含义类似). 于是

$$\psi(t)\text{ 在}\psi(0)\text{ 点的切矢的}i\text{ 分量}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\psi^i(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(I^i+tA^i)=A^i,$$

(此处的 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 是真求导.) 这就是式(G-5-2) 的分量表达式.

对任一 $m\times m$ 矩阵 A 引入符号

$$\mathrm{Exp}(A):=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\cdots, \tag{G-5-3}$$

其中 $A^2=AA$ (矩阵相乘), $A^3=AAA$. 可以证明 [见 Spivak (1979) Vol. I]: ① 上式右边收敛, 所以左边有意义, 是一个 $m\times m$ 矩阵; ② 若矩阵 A,B 对易, 即 $AB=BA$, 则

$$\mathrm{Exp}(A+B)=(\mathrm{Exp}A)(\mathrm{Exp}B). \tag{G-5-4}$$

下面的定理表明, 对 $\mathscr{GL}(m)$ 的元素 A (看作矩阵), Exp 就是指数映射的 exp.

定理 G-5-2

$\mathrm{Exp}(A)=\exp(A),\quad \forall A\in\mathscr{GL}(m)$.

Pf $\forall s,t\in\mathbb{R}$, 由式(G-5-4) 得

$$\mathrm{Exp}[(s+t)A]=\mathrm{Exp}(sA)\mathrm{Exp}(tA),\quad \forall A\in\mathscr{GL}(m). \tag{G-5-5}$$

取 $s=1,t=-1$, 则上式给出 $\mathrm{Exp}(A)\mathrm{Exp}(-A)=\mathrm{Exp}(0)=I$. 上式表明矩阵 $\mathrm{Exp}(A)$ 有逆 [就是 $\mathrm{Exp}(-A)$], 故 $\mathrm{Exp}(A)\in\mathrm{GL}(m)$. 式中的 A 可为 $\mathscr{GL}(m)$ 的任一元素, 所以

$$\mathrm{Exp}(tA)\in\mathrm{GL}(m),\quad \forall A\in\mathscr{GL}(m),t\in\mathbb{R}.$$

令 $\gamma(t)=\mathrm{Exp}(tA)$, 则式(G-5-5) 表明 $\gamma(s+t)=\gamma(s)\gamma(t)$, 且式(G-5-3) 给出

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathrm{Exp}(tA)=A, \tag{G-5-6}$$

可见 $\gamma(t)=\mathrm{Exp}(tA)$ 是由 A 唯一决定的单参子群 $\exp(tA)$, 从而 $\mathrm{Exp}(A)=\exp(A)$. □

定理 G-5-1 表明 $\mathscr{GL}(m)$ 和 $\{m\times m$ 实矩阵$\}$ 作为矢量空间是同构的. 自然要问它们作为 Lie 代数是否也同构. 答案是肯定的. 以 V_e 作为 $\mathscr{GL}(m)$, 其任意二元素 $A,B\in V_e$ 的 Lie 括号定义为 $[A,B]=[\bar{A},\bar{B}]_e$, 见式(G-3-4). 另一方面, $A,B\in V_e$ 所对应的 $m\times m$ 矩阵 (仍记作 A,B) 的 Lie 括号定义为矩阵对易子 $AB-BA$, 见式(G-3-3). 因此, 欲证 $\mathscr{GL}(m)$ 和 $\{m\times m$ 实矩阵$\}$ 是同构 Lie 代数只须证明 $[\bar{A},\bar{B}]_e=AB-BA$. 而这正是如下定理的结论.

定理 G-5-3

设 G 是 $\mathrm{GL}(m)$ 的 Lie 子群, 则其 Lie 代数元 $A,B\in\mathscr{G}\subset\mathscr{GL}(m)$ 的 Lie 括号 $[A,B]$ 对应于 A,B 所对应的矩阵 (仍记作 A,B) 的对易子 $AB-BA$, 即

$$[A,B]=AB-BA. \tag{G-5-7}$$

Pf [选读] 注意到定理 G-3-3, 只须对 $G=\mathrm{GL}(m)$ 的情况给出证明. 设 e (即 I) 为 G 的恒等元, $\bar{A},\bar{B}$ 代表 $A,B\in V_e$ 所对应的左不变矢量场, $\phi:\mathbb{R}\times G\to G$ 是由 $\bar{A}$ 产生的单参微分同胚群, 则

$$[A,B]=[\bar{A},\bar{B}]_e=(\mathscr{L}_{\bar{A}}\bar{B})_e=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}[(\phi_{t*}\bar{B})_e-\bar{B}_e].$$

注意到 $e=\phi_{-t}(\phi_t(e))$, 可知 $(\phi_{t*}\bar{B})_e=\phi_{t*}\bar{B}_{\phi_t(e)}$. 而 $\bar{B}_e$ 又可表为 $\bar{B}_e=\phi_{0*}\bar{B}_{\phi_0(e)}$, 所以

$$[\bar{A},\bar{B}]_e=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}[\phi_{t*}\bar{B}_{\phi_t(e)}-\phi_{0*}\bar{B}_{\phi_0(e)}]\equiv\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\phi_{t*}\bar{B}_{\phi_t(e)}). \tag{G-5-8}$$

由式(G-4-5), (G-4-6) 和(G-4-10) 可得 $\bar{B}_{\phi_t(e)}=\mathrm{d}/\mathrm{d}s|_{s=0}[\phi_t(e)\exp(sB)]$, 故

$$\begin{aligned}
[A,B]=[\bar{A},\bar{B}]_e&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\left\{\phi_{-t*}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}[\phi_t(e)\exp(sB)]\right\}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\phi_{-t}[\phi_t(e)\exp(sB)]\\
&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\phi_{-t}[e\exp(tA)\exp(sB)]=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}[\exp(tA)\exp(sB)\exp(-tA)]\\
&=\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}[\mathrm{Exp}(tA)\mathrm{Exp}(sB)\mathrm{Exp}(-tA)]=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathrm{Exp}(tA)\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\mathrm{Exp}(sB)\right]\mathrm{Exp}(-tA)\\
&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[\mathrm{Exp}(tA)B\mathrm{Exp}(-tA)]=\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathrm{Exp}(tA)\right]BI+IB\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathrm{Exp}(-tA)\right]\\
&=ABI+IB(-A)=AB-BA,
\end{aligned} \tag{G-5-9}$$

其中第三步用到 “曲线切矢的像等于曲线像的切矢”, 第四、五步都用到式(G-4-11). 第二个等号右边的 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}$ 就是式(G-5-8) 右边的 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}$, 代表对 e 点的 t 依赖矢量 $\phi_{t*}\bar{B}_{\phi_t(e)}$ 求导, 直至第六个等号前都是这一含义. 式中的 $\mathrm{d}/\mathrm{d}s|_{s=0}$ 在第六个等号前全部代表对曲线求切矢. 从第六个等号右边开始的 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}$ 和 $\mathrm{d}/\mathrm{d}s|_{s=0}$ 则可理解为对 s,t 依赖的矩阵 $\mathrm{Exp}(tA)\mathrm{Exp}(sB)\mathrm{Exp}(-tA)$ 求偏导数. □

G.5.2 $\mathrm{O}(m)$ 群 (正交群, orthogonal group)

如前所说, $\mathrm{GL}(m)$ 群是 m 维矢量空间 V 上所有可逆 $(1,1)$ 型张量 T 的集合, 除可逆性外没有其他要求, 所以称为一般线性群. 对 T 再提出某些适当要求则可得到 $\mathrm{GL}(m)$ 群的某些子群. $\mathrm{O}(m)$ 群就是重要一例, 其要求是 T 保度规. 以下把 $\mathrm{O}(m)$ 群的元素记作 Z. 设 (V, g_{ab}) 是带正定度规的 m 维矢量空间. 线性映射 $Z: V \to V$ 称为保度规的, 若

$$g_{ab}(Z^a_c \nu^c)(Z^b_d u^d) = g_{cd}\nu^c u^d, \quad \forall \nu^c, u^d \in V. \tag{G-5-10}$$

取 $u = \nu$, 则上式给出

$$g_{ab}(Z^a_c \nu^c)(Z^b_d \nu^d) = g_{cd}\nu^c \nu^d, \quad \forall \nu^c \in V. \tag{G-5-10$'$}$$

可见保度规的 Z 对矢量的作用必保长度. 反之, 利用 $g_{ab} = g_{(ab)}$ 可证 (习题, 有提示) 任何满足式(G-5-10$'$) 的 Z 必满足式(G-5-10). 所以保长性等价于保度规性. 式(G-5-10) 又等价于

$$Z^a_c Z^b_d g_{ab} = g_{cd}. \tag{G-5-10$''$}$$

令

$$\mathrm{O}(m) := \{Z^a_b \in \mathscr{T}^1_1(1,1) \mid Z^a_c Z^b_d g_{ab} = g_{cd}\}, \tag{G-5-11}$$

把 Z^a_b 看作从 V 到 V 的映射, 以复合映射为群乘法, 则 $\mathrm{O}(m)$ 是群, 而且是 $\mathrm{GL}(m)$ 的 Lie 子群. 用 V 的任一正交归一基底可把式(G-5-10$''$) 改写为分量形式:

$$\delta_{\sigma\rho} = Z^\mu{}_\sigma Z^\nu{}_\rho \delta_{\mu\nu} = (Z^T)^\mu{}_\sigma \delta_{\mu\nu} Z^\nu{}_\rho,$$

其中 Z^T 代表矩阵 Z 的转置矩阵. 把上式写成矩阵等式即为

$$I = Z^T I Z = Z^T Z, \tag{G-5-12}$$

表明 $Z^T = Z^{-1}$, 即 Z 是正交矩阵. 可见 $\mathrm{O}(m)$ 同构于 $m \times m$ 正交矩阵群 (由全体 $m \times m$ 正交矩阵以矩阵乘法为群乘法构成的群). 因为对任一矩阵 T 有 $\det T^T = \det T$, 由式(G-5-12) 得

$$1 = (\det Z^T)(\det Z) = (\det Z)^2,$$

故

$$\det Z = \pm 1. \tag{G-5-13}$$

上式表明群元的行列式不是 1 就是 -1, 这就注定了 $\mathrm{O}(m)$ 群的流形是非连通的.

以上抽象定义的 $\mathrm{O}(m)$ 群可用具体对象来体现. 先考虑 $\mathrm{O}(1)$ 群. 1 维欧氏空间 $(\mathbb{R}, \delta_{ab})$ 可看作带正定度规的 1 维矢量空间, 因而可充当用以定义 $\mathrm{O}(1)$ 群的那个 (V, g_{ab}). $\mathrm{O}(1)$ 群的每个群元 Z 就是把空间的任一点 (即起自原点的任一矢量) $\boldsymbol{v}$ 变为长度相等的矢量 $\boldsymbol{v}' = Z(\boldsymbol{v})$ 的线性映射. 由于长度相等, 只有 $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}' = -\boldsymbol{v}$ 两种可能. 可见 $\mathrm{O}(1)$ 只有两个群元, 其中一个是恒等元, 另一个称为反射 (reflection), 记作 r, 于是 $\mathrm{O}(1) = \{e, r\}$. 再讨论 $\mathrm{O}(2)$ 群. 2 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^2, \delta_{ab})$ 可看作带正定度规的 2 维矢量空间. $\mathrm{O}(2)$ 的每个群元 Z 就是把空间中起自原点的任一矢量 $\boldsymbol{v}$ 变为长度相等的矢量 $\boldsymbol{v}' = Z(\boldsymbol{v})$ 的线性映射. 首先想到的自然是令 $\boldsymbol{v}$ 转某一角度 α 的转动, 这种映射记作 $Z(\alpha)$, 可用矩阵表为

$$Z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \tag{G-5-14}$$

这是行列式为 $+1$ 的正交矩阵. 上式的特例是 $Z(0)=\mathrm{diag}(1,1)$, 即恒等元 I. 然而, 不难验证下面的 $Z'(\alpha)$ 也保长度:

$$Z'(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}, \tag{G-5-15}$$

这是行列式为 -1 的正交矩阵, 其特例是 $Z'(0)=\mathrm{diag}(1,-1)$, 它作用于 $\boldsymbol{v}$ 的结果 $\boldsymbol{v}'$ 与 $\boldsymbol{v}$ 关于 x 轴对称, 故 $Z'(0)$ 代表以 x 轴为对称轴的反射, 记作 r_x (只改变 y 分量), 即 $\boldsymbol{v}'=r_x(\boldsymbol{v})$. 不要误以为 r_x 也可看作转动, 因为它作用于另一矢量 $\boldsymbol{u}$ 得 $r_x(\boldsymbol{u})$ (图 1), 其与 $\boldsymbol{u}$ 的夹角不同于 $r_x(\boldsymbol{v})$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角. 同理, $Z'(\pi)=\mathrm{diag}(-1,1)$ 代表以 y 轴为对称轴的反射 r_y. 此外, $Z(\pi)=\mathrm{diag}(-1,-1)$ 则代表以原点为对称点的反演 (inversion), 记作 i_{xy}, 易证 $i_{xy}=r_xr_y$.

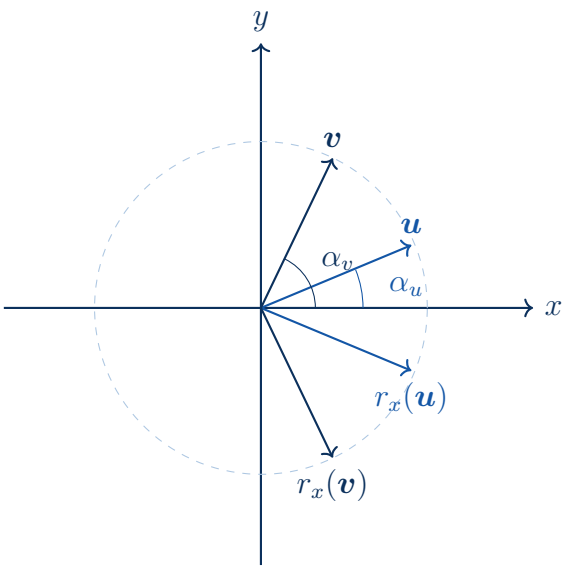


图 1: 反射不是转动. 反射 r_x 把矢量 $\boldsymbol{v}$ 映为关于 x 轴的对称矢量 $r_x(\boldsymbol{v})$, 把矢量 $\boldsymbol{u}$ 映为 $r_x(\boldsymbol{u})$; $r_x(\boldsymbol{v})$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角 $2\alpha_v$ 不同于 $r_x(\boldsymbol{u})$ 与 $\boldsymbol{u}$ 的夹角 $2\alpha_u$, 因而 r_x 不能看作转动.

Z 的 4 个矩阵元由于条件 $Z^TZ=I$ 而受到 3 个方程的限制, 只有 1 个独立, 所以 O(2) 是 1 维 Lie 群. 由 $Z^TZ=I$ 还可证明 O(2) 的群元被式(G-5-14) 和(G-5-15) 所穷尽, 其中式(G-5-14) 代表的子集构成 O(2) 的 Lie 子群, 称为 2 维空间的转动群, 记作 SO(2), 字母 S 代表 "特殊" (special), 是指每个群元 $Z\in\mathrm{SO}(2)$ 满足 $\det Z=+1$. 这也适用于其他常见 Lie 群, 例如 $\mathrm{GL}(m)$ 中满足 $\det T=+1$ 的子集也构成子群, 称为 $\mathrm{SL}(m)$ 群 (特殊线性群). O(2) 群中由式(G-5-15) 表示的子集不含恒等元 e, 因此不是子群. 两个子集的 α 都可解释为转角 [$Z'(\alpha)$ 中的 α 代表对 (x 轴) 反射后再转的角度], 取值范围是 $0\leqslant\alpha<2\pi$. 所以 O(2) 群的流形可看作两个互不连通的 S^1 (圆周) 之并 (图 2), 是一个非连通流形, 每个圆周是一个连通分支.

推而广之, 因为 $\mathrm{O}(m)$ 的群元 Z 满足 $\det Z=\pm1$, 其流形总是由两个连通分支组成的非连通流形, 其中含 e 的分支记作 $\mathrm{SO}(m)$, 即

$$\mathrm{SO}(m):=\{Z\in\mathrm{O}(m)\mid\det Z=+1\}. \tag{G-5-16}$$

这是 $\mathrm{O}(m)$ 的 Lie 子群, 称为特殊正交群 (special orthogonal group), 最常用的是 3 维空间的转动群 SO(3), 它的每一群元可看作把 3 维欧氏空间中起自原点的任一矢量 $\boldsymbol{v}$ 绕过

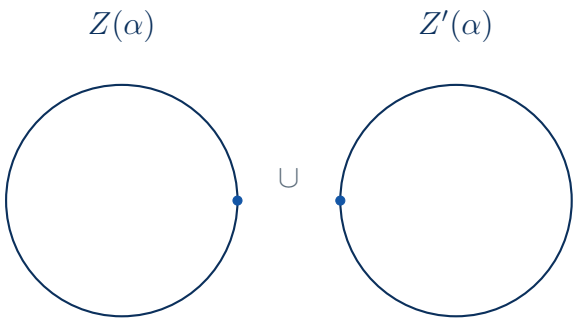


图 2: O(2) 群的流形是两个互不连通的圆周 S^1 之并: 由式(G-5-14) 的 $Z(\alpha)$ 组成的圆周是连通分支 SO(2), 由式(G-5-15) 的 $Z'(\alpha)$ 组成的圆周是另一连通分支, 两者互不相交.

原点的某轴转某角的映射 (而且除恒等元外的每个群元的转轴是唯一的). [这一结论称为 Euler 定理, 证明见 Marsden et al. (1994).] 这使我们可用起自原点的一个箭头代表 SO(3) 的一个群元: 箭头所在直线代表转轴, 箭头长度 (规定从 0 到 π) 代表转角, 方向相反的箭头代表沿相反方向的转动. 由于沿某方向转 π 角相当于沿反方向转 π 角, 同一直线段的两端代表同一群元, 应当认同. 于是, Lie 群 SO(3) 的流形是 3 维实心球体, 球面上位于每一直径两端的一对点要认同 (简称对径认同). 这一流形记作 $\mathbb{R}P^3$. [$\mathbb{R}P^3$ 本有其他定义方式, 但可以证明 SO(3) 与 $\mathbb{R}P^3$ 微分同胚.]

下面讨论 Lie 群 O(m) 和 SO(m) 的 Lie 代数 $\mathscr{O}(m)$ 和 $\mathscr{SO}(m)$. 这两个 Lie 代数必定一样, 因为设 $A\in\mathscr{O}(m)$, 则 A 决定 O(m) 中的一个单参子群 $\gamma(t)$, 注意到① $\det I=1$; ② O(m) 中任一群元的行列式只能为 ±1, 则由单参子群的连续性可知 $\gamma(t)$ 上任一点 Z 都有 $\det Z=1$, 可见对任一 t 有 $\gamma(t)\in$ SO(m), 从而 A, 作为 $\gamma(t)$ 在 I 点的切矢, 必属于 $\mathscr{SO}(m)$.

定理 G-5-4

$$\mathscr{O}(m)=\{m\times m \text{ 实矩阵} A\mid A^T=-A \text{ (即} A \text{ 为反称阵)}\}. \tag{G-5-17}$$

Pf　(A) $\forall A\in\mathscr{O}(m)$, 设 $Z(t)$ 是 Lie 群 O(m) 中的曲线, 且 $Z(0)=I, \mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}Z(t)=A$, 则 $Z(t)$ (对每一 t 值) 是一个满足

$$Z^T(t)Z(t)=I \tag{G-5-18}$$

的矩阵. 对上式求导并在 $t=0$ 取值得

$$0=\left[Z^T(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z(t)\right]_{t=0}+\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z^T(t)\right)Z(t)\right]_{t=0}=Z^T(0)A+\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z^T(t)\right]_{t=0}Z(0). \tag{G-5-19}$$

$Z(0)=I$ 等价于 $Z^T(0)=I$, $A=\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}Z(t)$ 等价于 $A^T=\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}Z^T(t)$, 因而式(G-5-19) 给出 $0=A+A^T$, 可见 A 为反称矩阵.

(B) 设 A 为任一 $m\times m$ 反称实矩阵, 注意到 $(A^2)^T=(A^T)^2, (A^3)^T=(A^T)^3,\cdots$, 由式(G-5-3) 得 $(\mathrm{Exp}A)^T=\mathrm{Exp}(A^T)$. 所以

$$(\mathrm{Exp}A)^T(\mathrm{Exp}A)=(\mathrm{Exp}A^T)(\mathrm{Exp}A)=\mathrm{Exp}(-A)\mathrm{Exp}(A)=I.$$

[其中最末一步用到式(G-5-4).] 上式表明 Exp$A$ 是正交矩阵, 因而 Exp$A\in$ O(m). 由此又知 Exp$(tA)\in$ O(m) (对每一 t 值). 而式(G-5-3) 又导致 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\mathrm{Exp}(tA)=A$, 可见 A 是 Lie 群 O(m) 中过 I 的曲线 Exp(tA) 在 I 点的切矢, 所以 $A\in\mathscr{O}(m)$. □

利用定理 G-5-4 可方便地决定 Lie 群 $\mathrm{O}(m)$ 及 $\mathrm{SO}(m)$ 的维数. 因为 $m\times m$ 反称矩阵的 m 个对角元全为零, 其余 m^2-m 个元素中只有半数独立, 所以决定一个 $m\times m$ 反称实矩阵需要 $(m^2-m)/2=m(m-1)/2$ 个实数. 于是定理 G-5-4 导致

$$\dim \mathrm{O}(m)=\dim \mathscr{O}(m)=\frac{1}{2}m(m-1). \tag{G-5-20}$$

具体说,

$$\dim \mathrm{O}(1)=0\ (\text{零维 Lie 群}),\quad \dim \mathrm{O}(2)=1,\quad \dim \mathrm{O}(3)=3,\quad \dim \mathrm{O}(4)=6,\cdots . \tag{G-5-21}$$

G.5.3 $\mathrm{O}(1,3)$ 群 (Lorentz 群)

定义 $\mathrm{O}(m)$ 群时曾约定 (V,g_{ab}) 中的 g_{ab} 为正定度规, 现在放宽为任意度规. 设 g_{ab} 在正交归一基底下的矩阵有 m' 个对角元为 -1, m'' 个对角元为 $+1$, 则 V 上所有保度规的线性映射的集合在以复合映射为群乘法下构成群, 记作 $\mathrm{O}(m',m'')$, 即

$$\mathrm{O}(m',m''):=\{A^a{}_b\in \mathscr{T}^1_1(1,1)\mid A^a{}_cA^b{}_dg_{ab}=g_{cd}\}. \tag{G-5-22}$$

同 $\mathrm{O}(m)$ 类似, $\mathrm{O}(m',m'')$ 也是 $\mathrm{GL}(m)$ (其中 $m=m'+m''$) 的 Lie 子群, $\mathrm{O}(m)$ 可看作 $\mathrm{O}(m',m'')$ 在 $m'=0,m''=m$ 时的特例.

抽象定义的 $\mathrm{O}(m',m'')$ 群也可与 $\mathrm{O}(m)$ 类似地用具体对象体现. 我们只讨论 $m'=1$ 的情况, 并且最关心 $\mathrm{O}(1,3)$ 群 (4 维 Minkowski 时空的 Lorentz 群), 但先从最简单的 $\mathrm{O}(1,1)$ 群讲起. 2 维 Minkowski 时空 $(\mathbb{R}^2,\eta_{ab})$ 可看作用来定义 $\mathrm{O}(1,1)$ 群的那个带 Lorentz 度规的 (V,g_{ab}). 用 $(\mathbb{R}^2,\eta_{ab})$ 的任一正交归一基可把保度规条件 $A^a{}_cA^b{}_dg_{ab}=g_{cd}$ 改写为分量形式:

$$\eta_{\sigma\rho}=A^\mu{}_\sigma A^\nu{}_\rho\eta_{\mu\nu}=(A^T)^\mu{}_\sigma\eta_{\mu\nu}A^\nu{}_\rho, \tag{G-5-23}$$

写成矩阵等式即为

$$\eta=A^T\eta A,\quad \text{其中}\eta=\mathrm{diag}(-1,1). \tag{G-5-24}$$

上式表明 $\det A=\pm1$, 因此, 与 $\mathrm{O}(m)$ 群类似, $\mathrm{O}(1,1)$ 群也是非连通的. 注意到 Lorentz 变换 $t'=\gamma(t-vx),x'=\gamma(x-vt)$ 保 Minkowski 线元, 自然猜想它是 $\mathrm{O}(1,1)$ 的群元. 把变换的参数 v 改写为 $\tanh\lambda$, 其中 $\lambda\in(-\infty,\infty)$, 则 $\gamma\equiv(1-v^2)^{-1/2}=\cosh\lambda$, 故 Lorentz 变换可改写为

$$t'=t\cosh\lambda-x\sinh\lambda,\quad x'=-t\sinh\lambda+x\cosh\lambda.$$

不难验证这一变换的矩阵

$$\Lambda(\lambda)=\begin{bmatrix}\cosh\lambda & -\sinh\lambda\\ -\sinh\lambda & \cosh\lambda\end{bmatrix} \tag{G-5-25}$$

满足式(G-5-24), 可见 $\forall\lambda\in(-\infty,\infty),\Lambda(\lambda)$ 是 $\mathrm{O}(1,1)$ 的群元. 对上式的 Λ 有 $\det\Lambda=+1$, 然而式(G-5-24) 表明 $\det\Lambda=\pm1$, 看来还应有其他连通分支. 其实, $\mathrm{O}(1,1)$ 的非连通性除了来自 Λ 所受的限制 $\det\Lambda=\pm1$ 之外还来自 $\Lambda^0{}_0$ 所受到的限制. 设 $\{(e_\mu)^a\}$ 是 V 的正交归一基底, 用 $\Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_dg_{ab}=g_{cd}$ 作用于 $(e_0)^c(e_0)^d$ 得 $-(\Lambda^0{}_0)^2+(\Lambda^1{}_0)^2=-1$, 所以 $(\Lambda^0{}_0)^2\geqslant1$. $\det\Lambda$ 与 $\Lambda^0{}_0$ 的允许值的配合使 Lie 群 $\mathrm{O}(1,1)$ 由如下 4 个互不连通的连通分支组成:

$$\text{(I)}\quad \mathrm{O}^\uparrow_+(1,1),\ \text{其元素}\Lambda(\lambda)=\begin{bmatrix}\cosh\lambda & -\sinh\lambda\\ -\sinh\lambda & \cosh\lambda\end{bmatrix}\ \text{满足}\det\Lambda=+1,\Lambda^0{}_0\geqslant1;$$

(II)　$\mathrm{O}_-^{\uparrow}(1,1)$, 其元素$\Lambda(\lambda)=\begin{bmatrix}\cosh\lambda & -\sinh\lambda\\ \sinh\lambda & -\cosh\lambda\end{bmatrix}$ 满足 $\det\Lambda=-1, \Lambda^0{}_0\geqslant 1$;

(III)　$\mathrm{O}_-^{\downarrow}(1,1)$, 其元素$\Lambda(\lambda)=\begin{bmatrix}-\cosh\lambda & \sinh\lambda\\ -\sinh\lambda & \cosh\lambda\end{bmatrix}$ 满足 $\det\Lambda=-1, \Lambda^0{}_0\leqslant -1$;

(IV)　$\mathrm{O}_+^{\downarrow}(1,1)$, 其元素$\Lambda(\lambda)=\begin{bmatrix}-\cosh\lambda & \sinh\lambda\\ \sinh\lambda & -\cosh\lambda\end{bmatrix}$ 满足 $\det\Lambda=+1, \Lambda^0{}_0\leqslant -1$.

$(\mathbb{R}^2,\eta_{ab})$ 可看作带 Lorentz 度规的 2 维矢量空间, $\Lambda^a{}_b\in \mathrm{O}(1,1)$ 就是把空间中起自原点的任一矢量 ν^a 变为 $\Lambda^a{}_b\nu^b$ 的保度规线性映射. 略去抽象指标, 用正交归一基底把 ν 表为列矢量 $\boldsymbol{\nu}=\begin{bmatrix}\nu^0\\ \nu^1\end{bmatrix}$, 我们来看 4 个连通分支中 $\lambda=0$ 的元素 $\Lambda(0)$ 对它的作用. 对 $\mathrm{O}_+^{\uparrow}(1,1)$ 而言, $\Lambda(0)$ 就是恒等元, 它把 ν 映为 ν. 对 $\mathrm{O}_+^{\uparrow}(1,1)$, 有 $\Lambda(0)=\mathrm{diag}(1,-1)$, 作用于 ν 所得矩阵为 $\nu'=\begin{bmatrix}\nu^0\\ -\nu^1\end{bmatrix}$, 如图 G-3(a), 称为空间反射, 记作 r_x. 对 $\mathrm{O}_-^{\uparrow}(1,1)$, 有 $\Lambda(0)=\mathrm{diag}(-1,1)$, 作用于 ν 所得矩阵为 $\nu'=\begin{bmatrix}-\nu^0\\ \nu^1\end{bmatrix}$, 如图 G-3(b), 称为时间反射, 记作 r_t. 对 $\mathrm{O}_-^{\downarrow}(1,1)$, 有 $\Lambda(0)=\mathrm{diag}(-1,-1)$, 作用于 ν 所得矩阵为 $\nu'=\begin{bmatrix}-\nu^0\\ -\nu^1\end{bmatrix}$, 如图 G-3(c), 称为时空反演, 记作 i_{tx}.

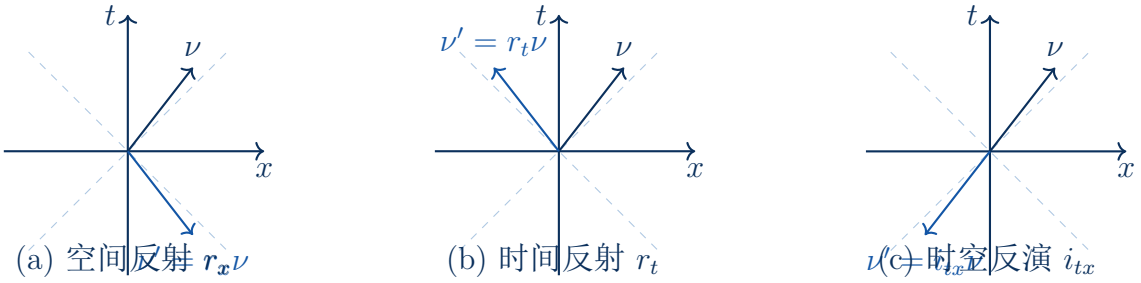


图 3: $\mathrm{O}(1,1)$ 群 4 个连通分支中 $\lambda=0$ 的元素 $\Lambda(0)$ 对矢量 ν 的作用. (a) 空间反射 r_x 只改变空间分量; (b) 时间反射 r_t 只改变时间分量; (c) 时空反演 i_{tx} 同时改变二者. 虚线为光锥.

因为每个连通分支的元素由一个参数 λ 决定, 而且 $\lambda\in(-\infty,\infty)$, 所以每一连通分支都可看作流形 $\mathbb{R}$, 整个 Lie 群 $\mathrm{O}(1,1)$ 是 1 维非连通流形. 4 个连通分支中只有 $\mathrm{O}_+^{\uparrow}(1,1)$ 是 $\mathrm{O}(1,1)$ 的子群 (只有它包含恒等元), 因而是 Lie 子群. (因为有这样的一般结论: Lie 群的含恒等元的连通分支是它的 Lie 子群.) 图 G-4 与图 G-2 有一重要区别: 图 G-2 的流形紧致而图 G-4 非紧致. 我们称 $\mathrm{O}(2)$ 为紧致 Lie 群而 $\mathrm{O}(1,1)$ 为非紧致 Lie 群.

在以上基础上就不难介绍 $\mathrm{O}(m',m'')$ 中对物理最有用的特例, 即 Lorentz 群 $\mathrm{O}(1,3)$, 简记为 L, 其群元 $\Lambda\in L$ (作为 4×4 矩阵) 的充要条件与式(G-5-24) 形式一样, 只是改为 4×4 矩阵等式, 即

$$\eta=\Lambda^T\eta\Lambda,\quad \text{其中}\eta=\mathrm{diag}(-1,1,1,1). \tag{G-5-24}$$

L 是由 4 个连通分支组成的 6 维非连通流形 [证明见 Bleecker (1981)], 这 4 个连通分支是

$$L_+^{\uparrow}=\{\Lambda\in L\mid \det\Lambda=+1,\Lambda^0{}_0\geqslant+1\},\quad L_-^{\uparrow}=\{\Lambda\in L\mid \det\Lambda=-1,\Lambda^0{}_0\geqslant+1\},$$

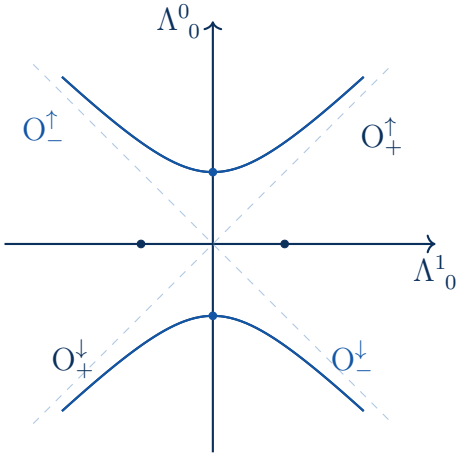


图 4: O(1,1) 群的流形是 4 个互不连通的连通分支 (示意), 每个分支都同胚于 $\mathbb{R}$, 是非紧致流形. 图中四条曲线是两条单位双曲线 $(\Lambda^0{}_0)^2-(\Lambda^1{}_0)^2=\pm1$ 的四个分支, 分别以 $\det\Lambda=\pm1$ 与 $\Lambda^0{}_0\geqslant1$ 或 $\leqslant-1$ 区分; 与图 G-2 的紧致圆周不同, 每个分支都延伸到无穷远.

$$L^{\downarrow}_{+}=\{\Lambda\in L\mid\det\Lambda=-1,\Lambda^0{}_0\leqslant-1\},\quad L^{\downarrow}_{-}=\{\Lambda\in L\mid\det\Lambda=+1,\Lambda^0{}_0\leqslant-1\}.$$

每个连通分支含一个最简单的元素, 依次记作 I,r_s,r_t,i_{st}, 其中

$$\begin{aligned}
&I=\mathrm{diag}(1,1,1,1)\in L^{\uparrow}_{+}\ \text{是}L\ \text{的恒等元},\\
&r_s=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)\in L^{\uparrow}_{-}\ \text{是}L\ \text{的空间反射元},\\
&r_t=\mathrm{diag}(-1,1,1,1)\in L^{\downarrow}_{+}\ \text{是}L\ \text{的时间反射元},\\
&i_{st}=r_sr_t=-I\in L^{\downarrow}_{-}\ \text{是}L\ \text{的时空反演元}.
\end{aligned}$$

上述 4 个连通分支中只有 $L^{\uparrow}_{+}$ 是子群 (只有它包含恒等元), 而且是 Lie 子群, 称为固有 Lorentz 群 (proper Lorentz group), 是 6 维连通流形, 流形结构为 $\mathbb{R}^3\times\mathrm{SO}(3)$. 其他 3 个连通分支都是子群 $L^{\uparrow}_{+}$ 的左陪集 [证明见 Bleecker (1981)]:

$$L^{\uparrow}_{-}=r_sL^{\uparrow}_{+},\quad L^{\downarrow}_{+}=r_tL^{\uparrow}_{+},\quad L^{\downarrow}_{-}=i_{st}L^{\uparrow}_{+}.$$

同 O(3) 群类似, Lorentz 群 O(1,3) 和它的子群 $L^{\uparrow}_{+}$ 有相同的 Lie 代数, 记作 $\mathscr{O}(1,3)$.

定理 G-5-5

$\mathscr{O}(1,3)=\{4\times4\ \text{实矩阵}A\mid A^T=-\eta A\eta\}$.

Pf (A) $\forall A\in\mathscr{O}(1,3)$, 考虑 O(1,3) 中满足以下两条件的曲线 $\Lambda(t)$: (1) $\Lambda(0)=I$, (2) $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\Lambda(t)=A$, 则 $\Lambda^T(t)\eta\Lambda(t)=\eta\quad\forall t\in\mathbb{R}$. 对 t 求导并在 $t=0$ 取值得

$$0=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda^T(t)\right]_{t=0}\eta\Lambda(0)+\Lambda^T(0)\eta\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t)\right]_{t=0}=A^T\eta I+I\eta A=A^T\eta+\eta A,$$

以 η^{-1} 右乘上式, 注意到 $\eta^{-1}=\eta$, 得 $A^T=-\eta A\eta$. [η 与 η^{-1} 作为矩阵相等, 但写矩阵元时最好分清上下标, 即 η 的矩阵元为 $\eta_{\mu\nu}$ 而 η^{-1} 的矩阵元为 $\eta^{\mu\nu}$.] (B) 设 A 是满足 $A^T=-\eta A\eta$ 的 4×4 实矩阵. 仿照定理 G-5-4 证明的 (B), 只须证明 $\mathrm{Exp}(A)\in\mathrm{O}(1,3)$. 因为对任意矩阵 M,N 有

$$N^{-1}(\mathrm{Exp}M)N=N^{-1}\left(I+M+\frac{1}{2!}M^2+\frac{1}{3!}M^3+\cdots\right)N$$

$$= I + N^{-1}MN + \frac{1}{2!}(N^{-1}MN)(N^{-1}MN) + \frac{1}{3!}(N^{-1}MN)(N^{-1}MN)(N^{-1}MN) + \cdots$$
$$= \mathrm{Exp}(N^{-1}MN), \tag{G-5-27}$$

取 $N = \eta, M = A$ 便得 $\eta(\mathrm{Exp}A)\eta = \mathrm{Exp}(\eta A\eta)$, 因而 $\eta(\mathrm{Exp}A) = [\mathrm{Exp}(\eta A\eta)]\eta$. 于是

$$(\mathrm{Exp}A)^T\eta(\mathrm{Exp}A) = (\mathrm{Exp}A^T)\eta(\mathrm{Exp}A) = (\mathrm{Exp}A^T)[\mathrm{Exp}(\eta A\eta)]\eta = [\mathrm{Exp}(A^T + \eta A\eta)]\eta = \eta,$$

[其中第三步用到式(G-5-4), $A^T = -\eta A\eta$ 保证该式成立.] 可见 $\mathrm{Exp}(A) \in \mathrm{O}(1,3)$. □

要利用定理 G-5-5 计算 $\mathrm{O}(1,3)$ 群的维数, 可以借用如下事实: $\forall A \in \mathscr{O}(1,3)$, 令 $B = \eta A$, 则由 $A^T = -\eta A\eta$ 易见 $B^T = -B$, 即 $B \in \mathscr{O}(4)$. 这表明存在从 $\mathscr{O}(1,3)$ 到 $\mathscr{O}(4)$ 的映射, 而且是 (矢量空间之间的) 同构映射, 因而 $\dim\mathscr{O}(1,3) = \dim\mathscr{O}(4)$. 这一结论只依赖于 η 的对称性和非退化性. 对 $\mathrm{O}(m',m'')$ 群, 令 η 代表这样的对角矩阵, 其前 m' 个对角元为 -1, 后 m'' 个对角元为 $+1$, 便知也有类似结论, 即

$$\dim\mathrm{O}(m',m'') = \dim\mathrm{O}(m'+m'').$$

$\Lambda \in L$ 满足式(G-5-24), 即 $\eta = \Lambda^T\eta\Lambda$, 其中 $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$. 而

$$\eta = \Lambda^T\eta\Lambda \Leftrightarrow \eta\Lambda^{-1} = \Lambda^T\eta \Leftrightarrow \Lambda^{-1} = \eta^{-1}\Lambda^T\eta,$$

再用 $\eta^{-1} = \eta$ 便得 $\Lambda^{-1} = \eta\Lambda^T\eta$. 借此可方便地求得 $\Lambda \in L$ 的逆矩阵 Λ^{-1}: 先写出 Λ 的转置矩阵 Λ^T, 再对 Λ^T 的各元素依下列法则改变符号:

$$\begin{bmatrix} + & - & - & - \\ - & + & + & + \\ - & + & + & + \\ - & + & + & + \end{bmatrix},$$

结果即为 Λ^{-1}. 鉴于固有 Lorentz 群和 Lorentz 代数对物理学的非常重要性, 我们将单辟一节 (§G.9) 对此做更详尽的讨论.

G.5.4 $\mathrm{U}(m)$ 群 (酉群)

$\mathrm{GL}(m)$ 群是用 m 维实矢量空间 V 定义的. 把 V 改为 m 维复矢量空间所得的一般线性群则记作 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$, 是 $2m^2$ 维 (实) Lie 群. 与 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ [即 $\mathrm{GL}(m)$] 不同, $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ 是连通 Lie 群. 我们只介绍这个群的一个重要子群——酉群 $\mathrm{U}(m)$. 正如 $\mathrm{GL}(m)$ 群的子群 $\mathrm{O}(m)$ 要求保度规那样, 酉群 $\mathrm{U}(m)$ 是对 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ 要求保内积的结果. 复矢量空间的内积与实矢量空间的内积类似而又不同, 最重要的区别在于, 实矢量空间的内积对两个矢量的作用都为线性, 而复矢量空间的内积只对第二个矢量为线性, 对第一个矢量则为反线性. 定义了内积的复矢量空间称为内积空间, 准确定义见 §B.1 定义 1. 设 V 是有限维内积空间, 线性映射 $A: V \to V$ 称为 V 上的线性算符, 简称算符, 它自然诱导出 V 上的另一线性算符 $A^\dagger$, 称为 A 的伴随算符, 满足

$$(A^\dagger f, g) = (f, Ag), \quad \forall f, g \in V, \tag{G-5-28}$$

其中 Ag 代表 A 作用于 g 所得矢量, 即 $A(g)$ 的简写. 可以证明 (见 §B.1) 每一 A 按上式决定唯一的 $A^\dagger$, 上式可作为 $A^\dagger$ 的定义.

定义 1

内积空间 V 上的算符 U 称为酉算符 (或幺正算符) (unitary operator), 若其作用保内积, 即

$$(Uf, Ug) = (f, g), \quad \forall f, g \in V. \tag{G-5-29}$$

定理 G-5-6

算符 U 为酉算符的充要条件为

$$U^\dagger U = \delta, \tag{G-5-30}$$

其中 δ 代表恒等算符, 即从 V 到 V 的恒等映射.

Pf 若 $U^\dagger U = \delta$, 则 $(Uf, Ug) = (U^\dagger U f, g) = (f, g) \quad \forall f, g \in V$, 故 U 为酉算符. 反之, 若 U 为酉算符, 则 $\forall f, g \in V$ 有

$$0 = (Uf, Ug) - (f, g) = (U^\dagger U f, g) - (f, g) = ((U^\dagger U - \delta) f, g).$$

取 $g = (U^\dagger U - \delta) f$, 则 $0 = (g, g)$, 故 $g = 0$, 即 $(U^\dagger U - \delta) f = 0 \quad \forall f \in V$, 从而 $U^\dagger U = \delta$. □

选定 V 的一个正交归一基底 $\{e_i\}$ 后, V 上任一算符 A 可用矩阵表示, 其矩阵元定义为

$$A_{ij} := (e_i, A e_j). \tag{G-5-31}$$

由上式得

$$A_{ij} = (A^\dagger e_i, e_j) = \overline{(e_j, A^\dagger e_i)} = \overline{A^\dagger_{ji}}, \tag{G-5-32}$$

所以, 若 A 和 $A^\dagger$ 分别代表算符 A 和 $A^\dagger$ 在同一基底下的矩阵, 以 $\overline{A^T}$ 代表 A 的转置矩阵的矩阵元都取复数共轭所得的矩阵, 则

$$A^\dagger = \overline{A^T}. \tag{G-5-33}$$

定理 G-5-7

算符 U 为酉算符的充要条件是其在其正交归一基底下的矩阵 U 满足矩阵等式

$$U^{-1} = U^\dagger, \quad \text{即} U^{-1} = \overline{U^T}. \tag{G-5-34}$$

Pf 酉算符满足的算符等式(G-5-30) 在正交归一基底下对应于矩阵等式

$$U^\dagger U = I, \tag{G-5-30$'$}$$

故 $U^{-1} = U^\dagger$. □

定义 2

满足式(G-5-34) 的复矩阵 U 称为酉矩阵 (或幺正矩阵) (unitary matrix).

注 2 ① 如果 V 为实矢量空间, 则 $U^{-1} = U^\dagger$ 成为 $U^{-1} = U^T$, 即 U 为正交矩阵. 所以酉矩阵可看作正交矩阵在复矩阵的推广.

定理 G-5-8

设 U 为酉矩阵, 则

$$\det U = \mathrm{e}^{i\phi} \text{ (其中}\phi \in \mathbb{R}\text{), 即} |\det U| = 1. \tag{G-5-35}$$

Pf　对矩阵等式(G-5-30′) 取行列式得 $1 = (\det U^\dagger)(\det U) = \overline{(\det U)}(\det U)$, 得证. □

定义 3

令 $\mathrm{U}(m) = \{m$ 维内积空间V 上的酉算符$\} = \{m \times m$ 酉矩阵$\}$, 以复合映射 (或矩阵乘法) 为群乘法, 则不难验证 $\mathrm{U}(m)$ 是 Lie 群, 称为酉群 (或幺正群) (unitary group).

例 1　酉群 U(1)

选 1 维复矢量空间 $\mathbb{C}$ 作为 V 并按下式定义内积使成内积空间:

$$(f, g) := \bar{f} g, \quad \forall f, g \in \mathbb{C} \text{ (容易验证满足内积定义各条件).}$$

复数 $U \in \mathbb{C}$ 可看作 $\mathbb{C}$ 上的线性算符, 它作用于任一 $f \in \mathbb{C}$ 的结果定义为复数乘积 Uf. 易证 U 为酉算符当且仅当 $|U| = 1$, 所以 $\mathbb{C}$ 上全体酉算符的集合是复平面上的单位圆. 可见 Lie 群 U(1) 的流形是一个圆周, 是个紧致的连通流形. 后一结论还可推广至任意正整数 m 的情况, 即 $\mathrm{U}(m)$ 是紧致的连通流形 (连通性的证明见定理 G-5-11).

定义 4

复方阵 A 称为厄米的 (hermitian), 若 $A^\dagger = A$; A 称为反厄米的 (anti-hermitian), 若 $A^\dagger = -A$.

注 3 ① 对实方阵, 厄米就是对称; 反厄米就是反称. ② 易证: A 为厄米 $\Leftrightarrow$ iA 为反厄米.

与 $\mathrm{GL}(m)$ 群的 Lie 代数 $\mathscr{GL}(m)$ 同构于全体 $m \times m$ 实矩阵构成的 Lie 代数类似, $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ 群的 Lie 代数 $\mathscr{GL}(m, \mathbb{C})$ 同构于全体 $m \times m$ 复矩阵构成的 Lie 代数, 即

$$\mathscr{GL}(m, \mathbb{C}) = \{m \times m \text{ 复矩阵}\}. \quad \text{(等号代表 Lie 代数同构)} \tag{G-5-36}$$

定理 G-5-9

酉群 $\mathrm{U}(m)$ 的 Lie 代数

$$\mathscr{U}(m) = \{A \in \mathscr{GL}(m, \mathbb{C}) \mid A^\dagger = -A\} = \{m \times m \text{ 反厄米复矩阵}\}. \tag{G-5-37}$$

Pf　与定理 G-5-4 的证明类似, 只须把 $Z^T(t)$ 和 A^T 分别改为 $U^\dagger(t)$ 和 $A^\dagger$. □

定理 G-5-10

$$\dim \mathrm{U}(m) = \dim \mathscr{U}(m) = m^2. \tag{G-5-38}$$

Pf　$A \in \mathscr{U}(m)$ 是有 m^2 个复元素的矩阵, 由 $2m^2$ 个实数决定. 但 A 的反厄米性 $A_{ij} = -\overline{A_{ji}}$ 导致 m^2 个实方程, 理由是: ① 反厄米性要求对角元为虚数, 故每个对角元的反厄米条件相当于一个实方程 (实部 =0), 因而所有对角元提供 m 个实方程; ② 反厄米性使

每对非对角元提供 2 个实方程, 而非对角元共有 $(m^2-m)/2$ 对, 故全部非对角元共提供 $2\times(m^2-m)/2=m^2-m$ 个方程. 可见 $2m^2$ 个实数要受 m^2 个实方程的限制, 只有 m^2 个独立. □

例 2　Lie 代数 $\mathscr{U}(1)$

由例 1 得知 Lie 群 U(1) 可表为 $U(1)=\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mid\theta\in\mathbb{R}\}$, 其中 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=\mathrm{Exp}(-\mathrm{i}\theta)$ 可看作以 θ 为参数的单参子群 [等于 U(1) 自身], 相应的 Lie 代数元为

$$A=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=-\mathrm{i}\in\mathscr{U}(1)\quad(\text{不难验证}A\text{ 的确满足}A^\dagger=-A),$$

以 A 为基矢生成的 1 维 (实) 矢量空间就是 $\mathscr{U}(1)$, 故 $\mathscr{U}(1)=\{-\mathrm{i}\alpha\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$.

酉矩阵满足的 $\det U=\mathrm{e}^{i\phi}$ 和正交矩阵满足的 $\det Z=\pm1$ 很不一样. 这同如下事实密切相关:

定理 G-5-11

与 $\mathrm{O}(m)$ 群相反, 酉群 $\mathrm{U}(m)$ 是连通流形.

Pf　只须证明 $\forall U\in\mathrm{U}(m)$, $\exists$ 连续曲线 $\gamma(t)\in\mathrm{U}(m)$ 使 $\gamma(0)=I,\gamma(1)=U$. 由线性代数可知任意酉矩阵可用酉变换化为对角形, 且对角元的模皆为 1. [可参阅, 例如, Smirnov (1960).] 就是说, $\forall U\in\mathrm{U}(m)$, $\exists W\in\mathrm{U}(m)$ 使

$$WUW^{-1}=D,\tag{G-5-39}$$

式中 D 为对角矩阵, 对角元为 $\mathrm{e}^{i\phi_1},\cdots,\mathrm{e}^{i\phi_m}$ (其中 $\phi_1,\cdots,\phi_m\in\mathbb{R}$). 设 Φ 是以 $\phi_1,\cdots,\phi_m$ 为对角元的实对角矩阵, 则 (习题) $D=\mathrm{Exp}(\mathrm{i}\Phi)$. 由式(G-5-39) 得

$$U=W^{-1}DW=W^{-1}(\mathrm{Expi}\Phi)W=\mathrm{Exp}(\mathrm{i}W^{-1}\Phi W),\tag{G-5-40}$$

其中最末一步用到式(G-5-27). 令 $A=\mathrm{i}W^{-1}\Phi W$, 则

$$A^\dagger=\overline{A^T}=\mathrm{i}\overline{W^T\Phi^T(W^{-1})^T}=-\mathrm{i}W^{-1}\Phi W=-A$$

表明 A 为反厄米矩阵, 故 $A\in\mathscr{U}(m)$. 于是式(G-5-40) 相当于 $U=\mathrm{Exp}A$, 可见 $\mathrm{U}(m)$ 中存在连续曲线 $\gamma(t)=\mathrm{Exp}(tA)$ 使 $\gamma(0)=I,\gamma(1)=U$. □

注 4 以上证明中的连续曲线 $\gamma(t)$ 其实是单参子群, 因此我们证明了比定理的结论更强的结论: 酉群的任一群元都属于某一单参子群. 这一结论也适用于 $\mathrm{SO}(m)$ 群. 然而并非任一 Lie 群的含 e 的连通分支的任一群元都属于某一单参子群. 例如 $\begin{bmatrix}-1&1\\0&-1\end{bmatrix}\in\mathrm{GL}(2)$ 就不是 (证明提示见习题 14). 存在这样的定理 [见 Brocker et al. (1985) 第 165 页]: 紧致的连通 Lie 群的指数映射是到上映射, 这等价于任一群众元都属于某一单参子群.

$\mathrm{U}(m)$ 的子集 $\mathrm{SU}(m)=\{U\in\mathrm{U}(m)\mid\det U=1\}$ 是 $\mathrm{U}(m)$ 的 Lie 子群, 称为特殊酉群 (special unitary group). 同 $\mathrm{U}(m)$ 一样, $\mathrm{SU}(m)$ 也是紧致的连通 Lie 群.

引理 G-5-12

设 A 为任意 $m\times m$ 矩阵, 则

$$\det(\mathrm{Exp}A)=\mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}. \tag{G-5-41}$$

Pf 设 $f(t)=\det(\mathrm{Exp}tA)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}f(t+s)=\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}[\det(\mathrm{Exp}(t+s)A)]=\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}[\det((\mathrm{Exp}tA)(\mathrm{Exp}sA))]$$
$$=[\det(\mathrm{Exp}tA)]\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}[\det(\mathrm{Exp}sA)]=[\det(\mathrm{Exp}tA)]\mathrm{tr}A=f(t)\mathrm{tr}A,$$

其中第五步将在下行之后补证. 由上式得 $\mathrm{d}\ln f(t)/\mathrm{d}t=\mathrm{tr}A$; 加之 $f(0)=\det I=1$, 故 $f(t)=\mathrm{e}^{(\mathrm{tr}A)t}$. 令 $t=1$ 便得式(G-5-41). 最后补证上式的第五步, 即 $\mathrm{d}/\mathrm{d}s|_{s=0}[\det(\mathrm{Exp}sA)]=\mathrm{tr}A$. 设 X 为任意 $m\times m$ 矩阵, X^i_j 是其矩阵元, $\varepsilon_{i_1\cdots i_m}$ 代表 m 维 Levi-Civita 记号, 则

$$\det X=\varepsilon_{i_1\cdots i_m}X^{i_1}_1\cdots X^{i_m}_m. \tag{G-5-42}$$

取 $X=\mathrm{Exp}(sA)=I+sA+s^2A^2/2!+\cdots$, 有 $X^i_j=\delta^i_j+sA^i_j+s^2A^i_kA^k_j/2!+\cdots$, 故

$$X^i_j\big|_{s=0}=\delta^i_j,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}X^i_j=A^i_j. \tag{G-5-43}$$

对式(G-5-42) 求导并利用式(G-5-43) 便可证得 $\mathrm{d}/\mathrm{d}s|_{s=0}[\det(\mathrm{Exp}sA)]=\mathrm{tr}A$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,|_{s=0}\det X=\varepsilon_{i_1\cdots i_m}\left(\frac{\mathrm{d}X^{i_1}_1}{\mathrm{d}s}X^{i_2}_2\cdots X^{i_m}_m+\cdots+X^{i_1}_1X^{i_2}_2\cdots\frac{\mathrm{d}X^{i_m}_m}{\mathrm{d}s}\right)_{s=0}$$
$$=\varepsilon_{i_1\cdots i_m}(A^{i_1}_1\delta^{i_2}_2\cdots\delta^{i_m}_m+\cdots+\delta^{i_1}_1\delta^{i_2}_2\cdots A^{i_m}_m)=(A^1_1+\cdots+A^m_m)=\mathrm{tr}A.\qquad\square$$

定理 G-5-13

特殊酉群 $\mathrm{SU}(m)$ 的 Lie 代数

$$\mathscr{SU}(m)=\{A\in\mathscr{U}(m)\mid\mathrm{tr}A=0\}=\{m\times m\text{ 无迹反厄米复矩阵}\}.$$

Pf (A) 设 $A\in\mathscr{SU}(m)$, 则 $\forall t\in\mathbb{R}$ 有 $\mathrm{Exp}(tA)\in\mathrm{SU}(m)$, 故 $\det(\mathrm{Exp}tA)=1$, 与式(G-5-41) 对比得 $\mathrm{e}^{\mathrm{tr}(tA)}=1$. 因而 $\mathrm{tr}(tA)=\mathrm{i}2k\pi$ (其中 $k=0$ 或整数). 但 $\mathrm{tr}(tA)=t(\mathrm{tr}A)$, 逼出 $k=0$, $\mathrm{tr}A=0$, 即 A 为无迹矩阵. 另一方面, 由 $A\in\mathscr{U}(m)$ 易见 A 为反厄米矩阵. (B) 设 A 是无迹反厄米矩阵, 则 $\forall t\in\mathbb{R}$, tA 也是无迹反厄米矩阵. 反厄米性导致 $tA\in\mathscr{U}(m)$, 从而 $\mathrm{Exp}(tA)\in\mathrm{U}(m)$. tA 的无迹性配以式(G-5-41) 导致 $\det(\mathrm{Exp}tA)=1$, 由 $\mathrm{Exp}(tA)\in\mathrm{U}(m)$ 便知 $\mathrm{Exp}(tA)\in\mathrm{SU}(m)$. 按式(G-5-3) 把 $\mathrm{Exp}(tA)$ 写成级数式, 求导便得曲线 $\mathrm{Exp}(tA)\subset\mathrm{SU}(m)$ 在 I 点的切矢 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\mathrm{Exp}(tA)=A$. 可见 $A\in\mathscr{SU}(m)$. $\square$

定理 G-5-13 表明酉群 $\mathrm{U}(m)$ 与其子群 $\mathrm{SU}(m)$ 有不同的 Lie 代数.

定理 G-5-14

$$\dim\mathrm{SU}(m)=\dim\mathscr{SU}(m)=m^2-1. \tag{G-5-44}$$

Pf $\mathscr{SU}(m)$ 是 $\mathscr{U}(m)$ 的子代数: $\mathscr{U}(m)$ 的元素 A 只当满足 $\mathrm{tr}A=0$ 才是 $\mathscr{SU}(m)$ 的元素. A 的反厄米性使对角元为虚数, 所以 $\mathrm{tr}A=0$ 只提供一个实方程, 由定理 G-5-10 便知 $\dim\mathscr{SU}(m)=m^2-1$. $\square$

G.5.5 $\mathrm{E}(m)$ 群 (欧氏群)

m 维欧氏空间的等度规群称为欧氏群 (Euclidean group), 记作 $\mathrm{E}(m)$. 欧氏空间有最高对称性, 所以 $\dim \mathrm{E}(m) = m(m+1)/2$. 以 $\mathrm{E}(2)$ 为例, 2 维欧氏空间有 3 个独立的 Killing 矢量场, 这使我们想到其上的等度规映射既有平移又有转动. 先看平移. 以 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}$ 代表欧氏空间的任二点, 则映射 $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}$ 称为平移 (translation), 记作 $T_{\boldsymbol{a}}$, 即

$$T_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{v} := \boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}. \tag{G-5-45}$$

取笛卡儿系使 x 轴沿 $\boldsymbol{a}$ 向. 因为 Killing 场 $\partial/\partial x$ 对应的单参等度规群过任一点的轨道都是平行于 x 轴的直线, 而 $T_{\boldsymbol{a}}$ 对 $\boldsymbol{v}$ 的作用是让点 $\boldsymbol{v}$ 沿平行于 x 轴的直线移过距离 a, 所以 $T_{\boldsymbol{a}}$ 是该群的一元, 因而是等度规映射. 因为平移的复合还是平移 ($T_{\boldsymbol{a}} \circ T_{\boldsymbol{b}} = T_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}} = T_{\boldsymbol{b}} \circ T_{\boldsymbol{a}}$), 所以 $T(2) \equiv \{T_{\boldsymbol{a}} \mid \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2\}$ 以复合映射为乘法构成群 (而且是阿贝尔群). 又因 $\boldsymbol{a}$ 相当于 2 个实数, 所以 $\dim T(2) = 2$. 再看转动. 因为 Killing 场 $\partial/\partial\varphi = -y\partial/\partial x + x\partial/\partial y$ 对应的单参等度规群过任一点的轨道是以原点为心的圆周, 不难看出绕原点转 α 角的映射 $Z(\alpha)$ 是该群的一元, 所以 $Z(\alpha)$ 也是等度规映射. 集合 $\{Z(\alpha) \mid 0 < \alpha < 2\boldsymbol{\pi}\}$ 正是 Lie 群 $\mathrm{SO}(2)$. 设 E 是 $\mathrm{E}(2)$ 的任一元素, 它把欧氏空间的点原点 $\boldsymbol{v}o = (0,0)$ 映为点 $\boldsymbol{a}$, 即 $E\boldsymbol{v}o = \boldsymbol{a}$, 则 $T_{-\boldsymbol{a}}E\boldsymbol{v}o = \boldsymbol{v}o$, 故 $T_{-\boldsymbol{a}}E \in \mathrm{E}(2)$ 是保持原点不动的等度规映射. 可以证明, 保原点的等度规映射要么是转动, 要么是反演, 故 $T_{-\boldsymbol{a}}E \in \mathrm{O}(2)$. 记 $Z = T_{-\boldsymbol{a}}E$, 则 $E = T_{\boldsymbol{a}}Z$. 可见 $\forall E \in \mathrm{E}(2)$ 唯一的 $T_{\boldsymbol{a}} \in T(2), Z \in \mathrm{O}(2)$ 使 $E = T_{\boldsymbol{a}}Z$, 说明 E 可表为有序对 $(T_{\boldsymbol{a}}, Z)$, 因而作为集合或拓扑空间有 $\mathrm{E}(2) = T(2) \times \mathrm{O}(2)$. 因为 $\mathrm{E}(2)$ 的群乘法定义为映射的复合, 所以 $(T_{\boldsymbol{a}}, Z)$ 对 $\boldsymbol{v}$ 的作用表现为

$$(T_{\boldsymbol{a}}, Z)\boldsymbol{v} = T_{\boldsymbol{a}}Z\boldsymbol{v} = Z\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}.$$

设 $T_{\boldsymbol{a}_1}, T_{\boldsymbol{a}_2} \in T(2), Z_1, Z_2 \in \mathrm{O}(2)$, 注意到

$$(T_{\boldsymbol{a}_1}, Z_1)(T_{\boldsymbol{a}_2}, Z_2)\boldsymbol{v} = (T_{\boldsymbol{a}_1}, Z_1)(Z_2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}_2) = Z_1(Z_2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}_2) + \boldsymbol{a}_1 = (T_{\boldsymbol{a}_1 + Z_1\boldsymbol{a}_2}, Z_1Z_2)\boldsymbol{v},$$

并把有序对 $(T_{\boldsymbol{a}}, Z)$ 简记作 $(\boldsymbol{a}, Z)$, 则上式表明 $\mathrm{E}(2)$ 的群元 $(\boldsymbol{a}_1, Z_1)$ 与 $(\boldsymbol{a}_2, Z_2)$ 间的乘法为

$$(\boldsymbol{a}_1, Z_1)(\boldsymbol{a}_2, Z_2) = (\boldsymbol{a}_1 + Z_1\boldsymbol{a}_2, Z_1Z_2). \tag{G-5-46}$$

与 §G.1 定义 9 对比可知 $\mathrm{E}(2)$ 是 $T(2)$ 和 $\mathrm{O}(2)$ 的半直积群, 其中 Z_1 同态对应于 $T(2)$ 的自同构群 $\mathscr{A}(T(2))$ 的元素 ψ_{Z_1}, 它对 $T(2)$ 的作用为 $\psi_{Z_1}\boldsymbol{a}_2 = Z_1\boldsymbol{a}_2 \quad \forall \boldsymbol{a}_2 \in T(2)$ (请注意 $Z_1\boldsymbol{a}_2$ 是 $T_{Z_1\boldsymbol{a}_2}$ 的简写). 于是

$$\mathrm{E}(2) = T(2) \ltimes \mathrm{O}(2). \tag{G-5-47}$$

以上讨论的思路也适用于 $\mathrm{E}(3)$, 因而也有

$$\mathrm{E}(3) = T(3) \ltimes \mathrm{O}(3). \tag{G-5-48}$$

G.5.6 Poincaré 群

4 维 Minkowski 时空的等度规群称为 Poincaré 群, 记作 P. Minkowski 时空的最高对称性导致 Poincaré 群是 10 维 Lie 群. 沿着对 $\mathrm{E}(2)$ 群的讨论思路, 可知 Poincaré 群是 4 维平移群 $T(4)$ 与 6 维 Lorentz 群 $L = \mathrm{SO}(1,3)$ 的半直积群. 即

$$P = T(4) \ltimes L. \tag{G-5-49}$$

具体说, 以 a 代表 Minkowski 时空起自原点的矢量, 则 $T_a \in T(4)$. 设 $T_{a_1}, T_{a_2} \in T(4), \Lambda_1, \Lambda_2 \in L$, 则有序对 $(T_a, \Lambda) \in T(4) \times L$. 把有序对简记作 (a, Λ), (a_2, Λ_2), 按复合映射得

$$(a_1, \Lambda_1)(a_2, \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2), \tag{G-5-50}$$

故 P 是 $T(4)$ 与 L 的半直积群. 把式(G-5-50) 的 L 改为 $L_+^\uparrow$ 得到的 P 的子群称为固有 Poincaré 群, 记作 P_p.

Table 1: *

表 G-1 某些 Lie 群的子群关系 ($H < G$ 代表 H 是 G 的子群)

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{SO}(2) & < & \mathrm{SO}(3) & < & L_+^\uparrow \\ \wedge & & \wedge & & \wedge \\ \mathrm{E}(2) & < & \mathrm{E}(3) & < & P_p \end{array}$$

Table 2: *

表 G-2 常用矩阵 Lie 群一览表

符号	Lie 群名称	连通性	矩阵	维数	其 Lie 代数的矩阵
$\mathrm{GL}(m)$	一般线性群 (实)	不连通	$m \times m$ 可逆实矩阵	m^2	$m \times m$ 任意实矩阵
$\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$	一般线性群 (复)	连通	$m \times m$ 可逆复矩阵	$2m^2$	$m \times m$ 任意复矩阵
$\mathrm{SL}(m)$	特殊线性群 (实)	连通	行列式为 1 的 $m \times m$ 可逆实矩阵	$m^2 - 1$	$m \times m$ 无迹实矩阵
$\mathrm{SL}(m, \mathbb{C})$	特殊线性群 (复)	连通	行列式为 1 的 $m \times m$ 可逆复矩阵	$2m^2 - 2$	$m \times m$ 无迹复矩阵
$\mathrm{O}(m)$	正交群	不连通	正交实矩阵	$m(m-1)/2$	$m \times m$ 反称实矩阵
$\mathrm{SO}(m)$	转动群 (特殊正交群)	连通	行列式为 1 的正交实矩阵	$m(m-1)/2$	$m \times m$ 反称实矩阵
$\mathrm{O}(1,3)$	Lorentz 群	不连通	4×4 实矩阵 Λ, 满足 $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$	6	4×4 实矩阵 A, 满足 $A^T = -\eta A \eta$
$L_+^\uparrow$	固有 Lorentz 群	连通	4×4 实矩阵 Λ, 满足 $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$, $\det \Lambda = 1, \Lambda^0{}_0 \geqslant 1$	6	4×4 实矩阵 A, 满足 $A^T = -\eta A \eta$
$\mathrm{U}(m)$	酉群	连通	$m \times m$ 酉矩阵	m^2	$m \times m$ 反厄米复矩阵
$\mathrm{SU}(m)$	特殊酉群	连通	行列式为 1 的 $m \times m$ 酉矩阵	$m^2 - 1$	$m \times m$ 反厄米无迹复矩阵

Part IV

结构常数, Lie 变换群与伴随表示

本部分先用结构张量与结构常数把 Lie 括号的抽象信息显式化, 并以 $\mathscr{SO}(3), \mathscr{O}(1,3), \mathscr{SU}(2)$ 为例计算结构常数. 然后讨论 Lie 群在流形上的作用 (Lie 变换群), 建立 Lie 代数元与 Killing 矢量场之间的联系. 最后引入伴随表示, 并用它定义 Killing 型与 Cartan 度规.

内容概要

- 掌握结构张量与结构常数及其性质, 会计算常见 Lie 代数的结构常数.
- 掌握 Lie 变换群, 实现与表示的概念, 理解 Killing 矢量场与等度规群 Lie 代数的联系.
- 掌握伴随表示与 Killing 型, 理解理想与正规子群的对应.

G.6

Lie 代数的结构常数

设 $\mathscr{L}$ 是 Lie 代数, 则 Lie 括号 $[,]:\mathscr{L}\times\mathscr{L}\to\mathscr{L}$ 是双线性映射. 由 §2.4 的 "张量面面观" 可知它可看作 $\mathscr{L}$ 上的一个 $(1,2)$ 型张量. 把这一张量记作 C^c_{ab} (a,b,c 代表矢量空间 $\mathscr{L}$ 的抽象指标), 便有

$$[v,u]^c=C^c_{ab}v^au^b,\quad \forall v^a,u^b\in\mathscr{L}. \tag{G-6-1}$$

由上式定义的张量 C^c_{ab} 称为 Lie 代数 $\mathscr{L}$ 的结构 (常) 张量 (structure constant tensor). 阿贝尔 Lie 代数的结构张量显然为零. 可以证明 [见 Warner (1983) 的 3.50 推论 (b)], 连通 Lie 群为阿贝尔群当且仅当其 Lie 代数为阿贝尔代数.

定理 G-6-1

Lie 代数的结构张量 C^c_{ab} 有以下性质:

(a) $C^c_{ab}=-C^c_{ba}$;

(b) $C^e_{ab}C^d_{ce}+C^e_{bc}C^d_{ae}+C^e_{ca}C^d_{be}=0$.

Pf 由 $[v,u]^a=-[u,v]^a$ 易见性质 (a) 成立. 作为习题, 请读者用 Lie 括号所满足的 Jacobi 恒等式证明性质 (b). □

设 $\{(e_\mu)^a\}$ 是 $\mathscr{L}$ 的任一基底, 则

$$[e_\mu,e_\nu]^c=C^c_{ab}(e_\mu)^a(e_\nu)^b=C^\sigma_{\mu\nu}(e_\sigma)^c. \tag{G-6-2}$$

上式的 $C^\sigma_{\mu\nu}$ 称为 Lie 代数 $\mathscr{L}$ 的结构常数 (structure constants). 与结构张量 C^c_{ab} 不同, 结构常数 $C^\sigma_{\mu\nu}$ 除依赖于 Lie 代数本身外还依赖于对基底的人为选择. 基底变换时结构常数按张量分量变换律变换. Lie 氏的一个基本定理断言: 给定一组满足以下两条件的常数 $C^\sigma_{\mu\nu}$: ① $C^\sigma_{\mu\nu}=-C^\sigma_{\nu\mu}$; ② $C^\rho_{\mu\nu}C^\sigma_{\rho\tau}+C^\rho_{\nu\tau}C^\sigma_{\rho\mu}+C^\rho_{\tau\mu}C^\sigma_{\rho\nu}=0$, 必存在 Lie 群, 其 Lie 代数以 $C^\sigma_{\mu\nu}$ 为结构常数.

例 1 Lie 群 $\mathbb{R}^2$ 的 Lie 代数的结构张量

把 $\mathbb{R}^2$ 的每点看作从 $(0,0)$ 点出发的一个矢量, 以矢量加法为群乘法, 则 $\mathbb{R}^2$ 是以 $(0,0)$ 点为恒等元 e 的 2 维 Lie 群. 易见这是阿贝尔群. 请读者证明: ① 过 e 的每一直线是一个单参子群; ② $\mathbb{R}^2$ 上任一左不变矢量场 $\bar{A}$ 满足 $\partial_a\bar{A}^b=0$ (其中 ∂_a 是自然坐标系的普通导数算符). 等价地, $\bar{A}$ 的积分曲线族是平行直线族. 由②可知任意两个左不变矢量场 $\bar{A},\bar{B}$ 的对易子为零: $[\bar{A},\bar{B}]=0$, 故结构张量 $C^c_{ab}=0$. 这是当然的, 因为 $\mathbb{R}^2$ 是连通的阿贝尔 Lie 群, 其 Lie 代数自然是阿贝尔代数. 类似地可定义 Lie 群 $\mathbb{R}^n$, 它当然也是阿贝尔 Lie 群, 其 Lie 代数也是阿贝尔 Lie 代数.

例 2 Lie 代数 $\mathscr{SO}(3)$ 的结构张量

前已证明 $\dim\mathscr{SO}(3)=3$. 为求得 $\mathscr{SO}(3)$ 的 3 个基矢, 可借用 SO(3) 群的 3 个典型的单参子群, 它们分别由绕 x 轴、y 轴和 z 轴的转动组成, 以转角 α 为参数, 则三个

单参子群的矩阵依次为

$$Z_x(\alpha)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\sin\alpha\\0&\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix},$$
$$Z_y(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha&0&\sin\alpha\\0&1&0\\-\sin\alpha&0&\cos\alpha\end{bmatrix},\tag{G-6-3}$$
$$Z_z(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

[容易验证它们满足单参子群的条件, 如 $Z_x(\alpha)Z_x(\beta)=Z_x(\alpha+\beta)$.] 每一子群在恒等元 I 的切矢给出 $\mathscr{SO}(3)$ 的一个元素 (该单参子群的生成元), 分别是

$$A_1=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}Z_x(\alpha)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix},\tag{G-6-4a}$$

$$A_2=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}Z_y(\alpha)=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix},\tag{G-6-4b}$$

和

$$A_3=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}Z_z(\alpha)=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.\tag{G-6-4c}$$

A_1,A_2,A_3 显然线性独立, 因而构成 $\mathscr{SO}(3)$ 的一个基底. 注意到矩阵 Lie 群的 Lie 代数的 Lie 括号等于矩阵对易子 [见式(G-5-7)], 就不难验证这 3 个基矢中任意两个的 Lie 括号为

$$[A_1,A_2]=A_3,\quad [A_2,A_3]=A_1,\quad [A_3,A_1]=A_2,\tag{G-6-5}$$

即

$$[A_i,A_j]=\varepsilon_{ij}^kA_k,\quad i,j,k=1,2,3,\ \text{其中}\varepsilon_{ij}^k\ \text{是 Levi-Civita 记号.}\tag{G-6-6}$$

可见 $\mathscr{SO}(3)$ 在基底 $\{A_1,A_2,A_3\}$ 下的结构常数是 ε_{ij}^k.

例 3　LorentzLie 代数 $\mathscr{O}(1,3)$ 的结构张量

仿照例 2 的做法, 先写出固有 Lorentz 群 $L_+^\uparrow$ 的 6 个典型的单参子群的矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \cosh\lambda & -\sinh\lambda & 0 & 0 \\ -\sinh\lambda & \cosh\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \cosh\lambda & 0 & -\sinh\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh\lambda & 0 & \cosh\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \cosh\lambda & 0 & 0 & -\sinh\lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\lambda & 0 & 0 & \cosh\lambda \end{bmatrix},$$

其中前 3 个代表 4 维 Minkowski 时空中的空间转动, 后 3 个代表伪转动. 把它们的生成元分别记作 r_1, r_2, r_3 和 b_1, b_2, b_3, 则由求导可得

$$r_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad r_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{G-6-7}$$

$$b_1=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad b_2=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad b_3=\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}. \tag{G-6-8}$$

易见 $\mathscr{O}(1,3)$ 的这 6 个元素线性独立, 因而构成一个基底. 不难验证它们的 Lie 括号满足下式 (它的某些重要后果将在 §G.9 讨论):

$$[r_i,r_j]=\varepsilon_{ij}^k r_k,\quad [b_i,r_j]=\varepsilon_{ij}^k b_k,\quad [b_i,b_j]=-\varepsilon_{ij}^k r_k,\quad i,j,k=1,2,3. \tag{G-6-9}$$

Lie 代数 $\mathscr{O}(1,3)$ 在基底 $\{r_1,r_2,r_3,b_1,b_2,b_3\}$ 下的结构常数可从上式读出. 引入符号 $l_{\mu\nu}$ ($\mu,\nu=0,1,2,3$ 且 $l_{\mu\nu}$ 反称), 其含义为

$$l_{01}=b_1,l_{02}=b_2,l_{03}=b_3,l_{12}=r_3,l_{23}=r_1,l_{31}=r_2, \tag{G-6-10}$$

则不难验证式(G-6-9) 可统一表为下式:

$$[l_{\mu\nu},l_{\rho\sigma}]=\eta_{\mu\rho}l_{\nu\sigma}+\eta_{\nu\sigma}l_{\mu\rho}-\eta_{\mu\sigma}l_{\nu\rho}-\eta_{\nu\rho}l_{\mu\sigma}. \tag{G-6-11}$$

每个 $l_{\mu\nu}$ 可看作一个反称实矩阵, 矩阵元可表为

$$(l_{\mu\nu})^\alpha_\beta=-\delta^\alpha_\mu\eta_{\beta\nu}+\delta^\alpha_\nu\eta_{\beta\mu}. \tag{G-6-12}$$

例 4　特殊酉群 SU(2) 的 Lie 代数 $\mathscr{SU}(2)$ 的结构张量

由式(G-5-44) 可知 $\dim\mathscr{SU}(2)=3$. 由定理 G-5-13 可知 $\mathscr{SU}(2)$ 的元素是 2×2 无迹反厄米矩阵. 大家熟知的 3 个 Pauli 矩阵 $\tau_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\tau_2=\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{bmatrix},\tau_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ 是无迹厄米矩阵, 乘以 i 就成为无迹反厄米矩阵, 而且互相线性独立, 可充当 $\mathscr{SU}(2)$ 的基底. 为了得到简单的结构常数, 我们不用 i 而用 $-\mathrm{i}/2$ 乘 Pauli 矩阵, 从而得到 $\mathscr{SU}(2)$ 的如下 3 个基矢:

$$E_i=-\mathrm{i}\tau_i/2,\quad i=1,2,3. \tag{G-6-13}$$

不难验证

$$[E_1,E_2]=E_3,\quad [E_2,E_3]=E_1,\quad [E_3,E_1]=E_2, \tag{G-6-14}$$

即

$$[E_i,E_j]=\varepsilon_{ij}^k E_k,\quad i,j,k=1,2,3. \tag{G-6-15}$$

这表明 $\mathscr{SU}(2)$ 在基底 $\{E_1,E_2,E_3\}$ 下的结构常数与 $\mathscr{SO}(3)$ 在基底 $\{A_1,A_2,A_3\}$ 下的结构常数相同. [如果以 i 而不是 $-\mathrm{i}/2$ 乘 Pauli 矩阵, 则结构常数将不满足式(G-6-15).] 令线性映射 $\psi:\mathscr{SU}(2)\to\mathscr{SO}(3)$ 满足 $\psi(E_i)=A_i(i=1,2,3)$, 就可看出 ψ 保 Lie 括号, 所以是 $\mathscr{SU}(2)$ 与 $\mathscr{SO}(3)$ 之间的 Lie 代数同构. 应该注意, 虽然 $\mathscr{SU}(2)$ 的元素是复矩阵, 但 $\mathscr{SU}(2)$ 仍是实的 3 维矢量空间: 只有以实数为组合系数才能确保所构成的线性组合仍在 $\mathscr{SU}(2)$ 之内. $\mathscr{SU}(2)$ 与 $\mathscr{SO}(3)$ 同构并不意味着 SU(2) 与 SO(3) 同构. 事实上, 不存在 SU(2) 与 SO(3) 之间的同构映射, 但存在 2 对 1 的 Lie 群同态映射 $\pi:\mathrm{SU}(2)\to\mathrm{SO}(3)$, 即 SU(2) 的两个不同群元对应于 SO(3) 的一个群元 (见选

读 G-6-1). 前面说过, 一个 Lie 群决定唯一的 Lie 代数, 但一个 Lie 代数并不决定唯一的 Lie 群 (除非待定的是单连通 Lie 群). SU(2) 与 SO(3) 的关系是这一重要结论的一个很好的例子:

$$\mathscr{SU}(2)=\mathscr{SO}(3)\nRightarrow \mathrm{SU}(2)=\mathrm{SO}(3).$$

SU(2) 与 SO(3) 都是连通流形, 但可以证明 SU(2) 是单连通流形而 SO(3) 不是 (见选读 G-6-1). 正是这一非单连通性使 SU(2) $\ncong$ SO(3). 与此类似, 群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 与固有 Lorentz 群 $L_+^\uparrow$ 有相同 Lie 代数, 但两群只同态不同构. 存在 2 对 1 的 Lie 群同态映射 $\pi:\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\to L_+^\uparrow$.

选读 G-6-1

把 $U\in\mathrm{U}(2)$ 表为 $U=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, 则 $U^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$, 其中 $\Delta=\det U=ad-bc$, 故酉条件 $U^\dagger=U^{-1}$ 等价于

$$\bar a=\frac{d}{\Delta},\quad \bar c=-\frac{b}{\Delta},\quad \bar b=-\frac{c}{\Delta},\quad \bar d=\frac{a}{\Delta}. \tag{G-6-16}$$

注意到 $\Delta=\mathrm{e}^{i\phi}(\phi\in\mathbb{R})$, 可知 (G-6-16) 中只有前二式独立. 此二式相当于 4 个独立实方程, 可见与 4 个复数 a,b,c,d 相应的 8 个实数中只有 4 个独立. 这就验证了 $\dim\mathrm{U}(2)=2^2$. 进一步, 若 $U\in\mathrm{SU}(2)$, 则 $\Delta=1$ 又给出一个实方程, 故 $U\in\mathrm{SU}(2)$ 只由 3 个实数决定. 条件 $\Delta=1$ 与式(G-6-16) 结合得 $d=\bar a, c=-\bar b$, 故 $U=\begin{bmatrix}a & b\\ -\bar b & \bar a\end{bmatrix}$, 于是有 $a\bar a+b\bar b=1$. 设

$$a=a_1+\mathrm{i}a_2,\quad b=b_1+\mathrm{i}b_2,\quad (a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R})$$

则 $a\bar a+b\bar b=1$ 等价于 $a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2=1$. 可见 SU(2) 的流形是 $\mathbb{R}^4$ 中的 3 维球面 (超曲面) S^3, 它既是连通的, 又是单连通的. 把 $e\in S^3$ 看作 "北极点", 则 S^3 可被分为南、北半 "球面" (图 5). 把 "赤道" $\mathscr{P}$ (2 维球面) 上每对位于同一直径两端的点 (如 U_1 和 U_1') 认同, 认同后的 $\mathscr{P}$ 与北半球面之并就同胚于 Lie 群 SO(3) 的流形 [见式(G-5-16) 后关于 SO(3) 群流形的讨论]. 正文提到的同态映射 $\pi:\mathrm{SU}(2)\to\mathrm{SO}(3)$ 是这样的 2 对 1 映射, 设 $U\in\mathrm{SU}(2)$ 是北半球面的一点, $U'\in\mathrm{SU}(2)$ 是南半球面与 U 对径的点 ($U'=-U$), 则 $\pi(U)=\pi(U')=U$ [看作 SO(3) 的群元 Z]. (以上只是直观描述, 本选读未有严格证明.) $\mathscr{P}$ 上点的认同使 SO(3) 变得非单连通. 为看出这点, 仍用原来对 SO(3) 流形的描述 (即对径认同后的 3 维球体) 来讨论. 先考虑连续闭曲线 $\mu:[0,1]\to\mathrm{SO}(3)$, 其像是 SO(3) 球体的一条半径的一部分, 两个关键点是 $e=\mu(0)=\mu(1)$ 和 $g=\mu(1/2)$ (见图 6), 它显然可通过连续变形缩为一点 e [指独点线 e, 即满足 $\mu(t)=e\quad\forall t\in[0,1]$ 的映射 $\mu:[0,1]\to\mathrm{SO}(3)$]. 再考虑连续闭曲线 $\nu:[0,1]\to\mathrm{SO}(3)$, 其像是球体的一条直径, 两个关键点是球心 e 和球面上点 h, 满足 $e=\nu(0)=\nu(1), h=\nu(1/2)$ (见图 6), 这闭合曲线不能通过连续变形缩为一点. 可见 SO(3) 为非单连通流形.

设 M 为连通流形. M 中两条连续闭合曲线 C_1, C_2 称为彼此同伦的 (homotopic), 若 C_1 可连续变形为 C_2. M 中所有连续闭曲线可分为若干同伦类. 任何单连通流形中的连续闭曲线都只有一个同伦类, 而流形 SO(3) 中的连续闭曲线却有两个同伦类, 分别以独点线 e 和图 6(b) 的闭曲线为代表. 有趣的是, 考虑连续闭曲线 $\xi:[0,1]\to\mathrm{SO}(3)$,

其像仍是一条直径, 但满足 $e=\xi(0)=\xi(1/2)=\xi(1)$ [$\xi(t)$ 在该直径上沿同一方向扫描两次], 则它竟然与独点线 e 同伦, 即它 (指曲线映射的像) 能连续变形为点 e. 有兴趣的读者请自证.

最后, 我们给出映射 $\pi:\mathrm{SU}(2)\to\mathrm{SO}(3)$ 的定量建立过程并证明其 2 对 1 同态性. 利用 $\mathscr{SU}(2)$ 的基底 $\{E_i=-\mathrm{i}\tau_i/2\}$ (见例 4) 可对每一 $\boldsymbol{v}=(v^1,v^2,v^3)\in\mathbb{R}^3$ 构造一个 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}=v^iE_i\in\mathscr{SU}(2)$. 给定 $U\in\mathrm{SU}(2)$ 后, 令 $A\equiv U(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})U^{-1}$ (矩阵连乘), 则由 $\mathrm{SU}(2)$ 及 $\mathscr{SU}(2)$ 元素的条件易证 $A^\dagger=-A$, 故 $A\in\mathscr{SU}(2)$, 可用 $\{E_i\}$ 展开, 即存在唯一的 $\boldsymbol{v}'=(v'^1,v'^2,v'^3)\in\mathbb{R}^3$ 使

$$U(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})U^{-1}=\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{E}. \tag{G-6-17}$$

这表明每一 $U\in\mathrm{SU}(2)$ 诱导出一个映射 $Z:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, Z(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}'$. 现在证明 $Z\in\mathrm{SO}(3)$. 由 $E_i=-\mathrm{i}\tau_i/2$ (其中 τ_i 见例 4) 易得 $\det(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})=|\boldsymbol{v}|^2/4$, 故

$$|Z\boldsymbol{v}|^2=4\det[(Z\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{E}]=4\det\Big[U(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})U^{-1}\Big]=|\boldsymbol{v}|^2,$$

[第二步用到式(G-6-17).] 说明 $Z:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 保长度, 因而 $Z\in\mathrm{O}(3)$. 为证 $Z\in\mathrm{SO}(3)$, 只须再证 $\det Z>0$. $\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ 有

$$[\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{E},\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}]=u^iv^j[E_i,E_j]=u^iv^j\varepsilon_{ij}^kE_k=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})^kE_k=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{E}, \tag{G-6-18}$$

故

$$Z(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{E}=U[(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{E}]U^{-1}=U[\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{E},\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}]U^{-1}=[U(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{E})U^{-1},U(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})U^{-1}]$$

$$=[(Z\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{E},(Z\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{E}]=[(Z\boldsymbol{u})\times(Z\boldsymbol{v})]\cdot\boldsymbol{E},$$

[第一、四步用到式(G-6-17), 第二、五步用到式(G-6-18), 第三步用到矩阵对易子运算.] 于是 $Z(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=(Z\boldsymbol{u})\times(Z\boldsymbol{v})$, 说明 Z 把右手系变为右手系, 故 $\det Z>0$, 从而 $Z\in\mathrm{SO}(3)$. 可见存在映射 $\pi:\mathrm{SU}(2)\to\mathrm{SO}(3),\pi(U)=Z$. 下面证明 π 是 2 对 1 映射, 事实上, 我们要证明比此略强的结论, 即 $\forall U,U'\in\mathrm{SU}(2)$ 有

$$\pi(U')=\pi(U)\Leftrightarrow U'=\pm U.$$

令 $Z=\pi(U),Z'=\pi(U')$, 则由式(G-6-17) 得

$$(Z\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{E}=U(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})U^{-1},\quad (Z'\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{E}=U'(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})U'^{-1},\quad \forall\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3. \tag{G-6-19}$$

若 $U'=\pm U$, 则上式导致

$$(Z'\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{E}=(\pm U)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})(\pm U)^{-1}=U(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})U^{-1}=(Z\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{E},$$

故 $Z'\boldsymbol{v}=Z\boldsymbol{v}\quad\forall\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$, 因而 $Z'=Z$, 即 $\pi(U')=\pi(U)$. 反之, 若 $\pi(U')=\pi(U)$, 则式(G-6-19) 导致 $U'(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})U'^{-1}=U(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})U^{-1},\quad\forall\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$. 所以

$$U^{-1}U'(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})U^{-1}U',\quad\forall\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3. \tag{G-6-20}$$

作为 2×2 复矩阵, $U^{-1}U'$ 总可表为 I,E_1,E_2,E_3 的 (实的) 线性组合, 即 $\exists\alpha^0,\alpha^i\in\mathbb{R}$ 使 $U^{-1}U'=\alpha^0I+\alpha^iE_i$. 取 $\boldsymbol{v}$ 使 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}=E_1$, 代入式(G-6-20) 后不难得到 $\alpha^2=\alpha^3=0$,

同法可证 $\alpha^3=\alpha^1=0$, 故 $U^{-1}U'=\alpha^0 I$, 因而 $\alpha^0=\det(U^{-1}U'), |\alpha^0|=1, \alpha^0=\pm 1$. 于是 $U^{-1}U'=\pm I, U'=\pm U$. 最后证明 π 为同态映射. 把式(G-6-17) 改写为

$$[\pi(U)\boldsymbol{v}]\cdot\boldsymbol{E}=U(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})U^{-1},$$

则 $\forall U'\in \mathrm{SU}(2)$ 有

$$[\pi(U')\pi(U)\boldsymbol{v}]\cdot\boldsymbol{E}=U'([\pi(U)\boldsymbol{v}]\cdot\boldsymbol{E})U'^{-1}=U'[U(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})U^{-1}]U'^{-1}$$

$$=(U'U)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})(U'U)^{-1}=[\pi(U'U)\boldsymbol{v}]\cdot\boldsymbol{E},$$

故 $\pi(U')\pi(U)=\pi(U'U)\quad \forall U', U\in \mathrm{SU}(2)$, 所以 $\pi:\mathrm{SU}(2)\to\mathrm{SO}(3)$ 是同态 (而且是 Lie 群同态).

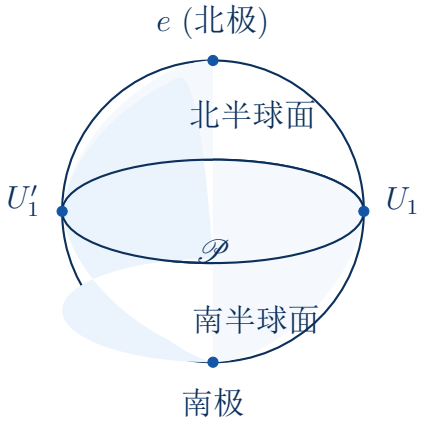


图 5: SU(2) 的流形是 3 维球面 S^3 (截面示意). 把 $e\in S^3$ 看作北极点, S^3 分为南、北半球面; 赤道 $\mathscr{P}$ 是 2 维球面, 其上每对对径点 (如 U_1 与 U_1') 被认同. 认同后的 $\mathscr{P}$ 与北半球面之并同胚于 SO(3) 的流形.



(a) 可缩: 半径上的 μ (b) 不可缩: 直径上的 ν

图 6: SO(3) 的流形是对径认同的 3 维球体 (截面示意). (a) 连续闭曲线 μ 的像是球体一条半径的一部分, 从球心 e 到半径上点 g 再返回, 可通过连续变形缩为一点 e; (b) 连续闭曲线 ν 的像是球体的一条直径, 从球心 e 到球面上点 h (再经对径点认同) 返回, 不能缩为一点.

G.7

Lie 变换群和 Killing 矢量场

把流形 M 上的单参数微分同胚群 $\phi:\mathbb{R}\times M\to M$ 中的 1 维阿贝尔 Lie 群 $\mathbb{R}$ 推广为任意 Lie 群 G 便有如下定义.

定义 1

设 G 是 Lie 群, M 是流形. C^∞ 映射 $\sigma:G\times M\to M$ 称为 M 上的一个 Lie 变换群 (Lie group of transformations), 若

(a) $\forall g\in G,\sigma_g:M\to M$ 是微分同胚;

(b) $\sigma_{gh}=\sigma_g\circ\sigma_h,\forall g,h\in G$.

容易验证 $\{\sigma_g\mid g\in G\}$ 以映射的复合为群乘法构成群, 恒等元就是从 M 到 M 的恒等映射 (等于 σ_e, 其中 e 为 G 的恒等元), 且 $(\sigma_g)^{-1}=\sigma_{g^{-1}}\quad\forall g\in G$. 有些文献把 $\{\sigma_g\mid g\in G\}$ 称为 Lie 变换群 (我们有时也用这一称谓), 有些则把 G 称为 Lie 变换群. $\forall p\in M$, 有 $\sigma_p:G\to M$, σ_p 和 σ_g 都是由 σ 诱导出的映射, 三者关系为

$$\sigma_p(g)=\sigma(g,p)=\sigma_g(p),\quad\forall g\in G,p\in M. \tag{G-7-1}$$

Lie 群按定义是一个高度抽象的概念, 而 Lie 变换群却比较具体: 它的群元 σ_g 是流形 M 上的点变换 (微分同胚). 例如, 抽象定义的 Lie 群 SO(3) 若借用一个 2 维球面 S^2 来想象就变得具体: 每一 $g\in\mathrm{SO}(3)$ 对应于 S^2 上这样一个点变换, 它让 S^2 的每点绕过球心的同一轴转同一角. 事实上, 定义 1 条件 (b) 保证存在从 Lie 群 $G=\{g\}$ 到 Lie 变换群 $\{\sigma_g\}$ 的同态映射, 所以后者的确可看作前者的具体化. 于是有以下定义:

定义 2

从 Lie 群 $G=\{g\}$ 到 Lie 变换群 $\{\sigma_g:M\to M\mid g\in G\}$ 的上述同态映射 $G\to\{\sigma_g\}$ 称为 G 的一个实现 (realization), M 称为实现空间. 若此同态为同构, 则称为忠实 (faithful) 实现.

注 1 因为每一 $g\in G$ 对应于一个左平移映射 $L_g:G\to G$ (看作 $\sigma_g:M\to M$, 其中 $M=G$), 所以映射 $G\to\{L_g\mid g\in G\}$ 是 G 的一个实现 (实现空间就是 G 本身), 而且是忠实实现.

定义 3

Lie 群 G 在流形 M 上的一个实现 $G\to\{\sigma_g\}$ 称为 G 的一个表示 (representation), 若 M 是矢量空间且 $\sigma_g:M\to M$ $(\forall g\in G)$ 是线性变换. 这时 M 称为表示空间. 往往也把映射 $G\to\{\sigma_g\}$ 的像 $\{\sigma_g\}$ 称为 G 的表示 (但应注意不同映射有相同像的情况). 若忠实实现是表示, 则称为忠实表示.

注 2 ① 可见 G 的每一表示 $\{\sigma_g\}$ 可看作一个矩阵群. ② 因为 S^2 不是矢量空间, 把 SO(3) 的群元看作 S^2 上的转动这种对应关系只是实现而非表示. 但若选 $M=\mathbb{R}^3$, 则 SO(3) 的

每一群元对应于 $\mathbb{R}^3$ 上的这样一个微分同胚, 它让每点绕过原点的同一轴转同一角. 这种对应关系就是一个表示, 而且是忠实表示.

设 $\gamma:\mathbb{R}\to G$ 是 G 的、与 $A\in V_e$ 对应的单参子群, 则 $\{\gamma(t)\mid t\in\mathbb{R}\}$ 是 G 中的曲线. 把群 $\{\sigma_g\mid g\in G\}$ 中 g 的取值范围限制在曲线 $\gamma(t)$ 上便得子集 $\{\sigma_{\gamma(t)}\mid t\in\mathbb{R}\}$, 其中每个 $\sigma_{\gamma(t)}:M\to M$ 都是微分同胚, 而且 $\sigma_{\gamma(t)}\circ\sigma_{\gamma(s)}=\sigma_{\gamma(t+s)}=\sigma_{\gamma(t+s)}$, 可见 G 的每一单参子群决定 M 上的一个单参数微分同胚群 $\{\sigma_{\gamma(t)}\mid t\in\mathbb{R}\}$. 我们想找出与之对应的 C^∞ 矢量场 (记作 $\bar\xi$). 因为 $\bar\xi$ 的积分曲线与单参数微分同胚群 $\{\sigma_{\gamma(t)}\mid t\in\mathbb{R}\}$ 的轨道重合, 所以 $\forall p\in M,\bar\xi_p$ 等于过 p 点的轨道在 p 点的切矢. 群 $\{\sigma_{\gamma(t)}\mid t\in\mathbb{R}\}$ 过 p 的轨道是点集 $\{\sigma_{\gamma(t)}(p)\mid t\in\mathbb{R}\}$, 而 $\sigma_{\gamma(t)}(p)=\sigma(\gamma(t),p)=\sigma_p(\gamma(t))$ [式(G-7-1)], 于是 (见图 7)

$$\bar\xi_p=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\sigma_p(\gamma(t))=\sigma_{p*}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\gamma(t)=\sigma_{p*}A. \tag{G-7-2}$$

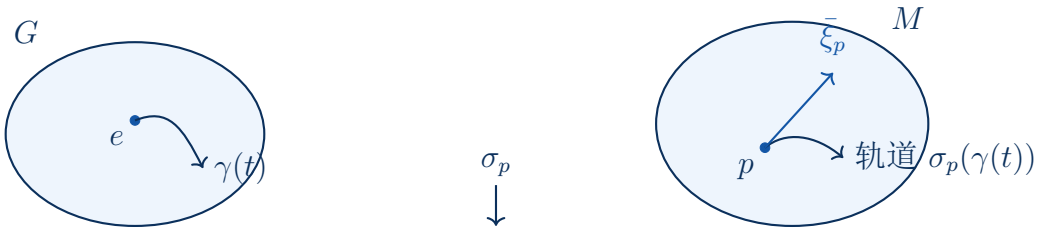


图 7: Lie 变换群产生的矢量场. 单参子群 $\gamma(t)\subset G$ 经 σ_p 映为 M 上过 p 点的轨道 $\{\sigma_p(\gamma(t))\}$, 轨道在 p 点的切矢正是 $\bar\xi_p=\sigma_{p*}A$.

可见, 给定 Lie 变换群 $\sigma:G\times M\to M$ 后, G 的 Lie 代数 V_e 的每一元素 A 对应于 M 上的一个 C^∞ 矢量场 $\bar\xi$, 故有映射 $\chi:V_e\to\{\bar\xi\}$. 为理解 $\{\bar\xi\}$ 的意义, 先看一类特殊情况: M 是带度规 g_{ab} 的流形, G 是 (M,g_{ab}) 的等度规群, Lie 变换群 $\sigma:G\times M\to M$ 的每一 $\sigma_g:M\to M$ 是等度规映射. 这时 G 的每一单参子群 $\gamma(t)$ 产生的单参微分同胚群 $\{\sigma_{\gamma(t)}\mid t\in\mathbb{R}\}$ 升格为单参等度规群, 其轨道的切矢 $\bar\xi$ 就是 (M,g_{ab}) 上的 Killing 矢量场, 即 $\{\bar\xi\}\subset\mathscr{K}$ [$\mathscr{K}$ 代表 (M,g_{ab}) 上全体 Killing 场构成的矢量空间], 故 χ 可看作映射 $V_e\to\mathscr{K}$ (可证其为线性映射). 以矢量场对易子为 $\mathscr{K}$ 的 Lie 括号 (此处用到第 4 章习题 13 的结论, 即 Killing 场的对易子也是 Killing 场), 则 $\mathscr{K}$ 成为 Lie 代数, 且可证明 [见 Marsden et al. (1994) 命题 9.3.6] $\chi:V_e\to\mathscr{K}$ 对 Lie 括号保到只差一个负号的程度:

$$\chi([A,B])=-[\chi(A),\chi(B)],\quad\forall A,B\in V_e. \tag{G-7-3}$$

用下式定义新映射 $\psi:V_e\to\mathscr{K}$:

$$\psi(A):=-\chi(A),\quad\forall A\in V_e, \tag{G-7-4}$$

则易见 ψ 保 Lie 括号, 即

$$\psi([A,B])=[\psi(A),\psi(B)],\quad\forall A,B\in V_e. \tag{G-7-5}$$

故 ψ 是 Lie 代数同态. 如果每个 Killing 场都是完备矢量场, 则每个都产生单参等度规群, 故等度规群 G (因而 V_e) 与 $\mathscr{K}$ 维数相同, $\psi:V_e\to\mathscr{K}$ 是 Lie 代数同构. 反之, 不完备 Killing 场的单参等度规群 $\{\phi_t:M\to M\}$ 是只含恒等元的 0 维 (而不是 1 维) Lie 群, 因为无论参数 t 取何值 (只要非零), 总有 $p\in M$ 使 p 在 ϕ_t 下无像. 于是 $\dim G$ 减少而 $\dim\mathscr{K}$ 不变, 导致 $\dim G=\dim V_e<\dim\mathscr{K}$, 意味着 V_e 与 $\mathscr{K}$ 只同态不同构. 下面是简单特例: 把 $(\mathbb{R}^2,\delta_{ab})$ 的一半 (连边) 挖去, 则除了平行于切痕的那些平移 Killing 场之外的 Killing 场 (含旋转 Killing 场) 都不再完备, 故 $\dim G=\dim V_e=1$ (而 $\dim\mathscr{K}$ 仍为 3). 于是有

定理 G-7-1

(M, g_{ab}) 的等度规群的 Lie 代数 V_e 同构于其上全体 Killing 场的集合 $\mathscr{K}$ 的 Lie 子代数; 当每一 Killing 场都完备时 $V_e = \mathscr{K}$ (Lie 代数同构).

利用 Killing 场的对易子可方便地求得等度规群的 Lie 代数的结构常数, 我们只举例说明 V_e 同构于 $\mathscr{K}$ 时的计算过程 (略去抽象指标).

例 1

3 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$ 中的 2 维球面 (S^2, h_{ab}) (其中 h_{ab} 是 δ_{ab} 的诱导度规) 的等度规群是 SO(3). (S^2, h_{ab}) 上的全体 Killing 矢量场的集合 $\mathscr{K}$ 是 3 维 Lie 代数, 不难验证

$$\xi_1 = \sin\varphi(\partial/\partial\theta) + \cot\theta\cos\varphi(\partial/\partial\varphi),$$

$$\xi_2 = -\cos\varphi(\partial/\partial\theta) + \cot\theta\sin\varphi(\partial/\partial\varphi),$$

$$\xi_3 = -\partial/\partial\varphi$$

满足 Killing 方程, 可选作 $\mathscr{K}$ 的一组基矢. 对易子的计算表明

$$[\xi_1, \xi_2] = \xi_3, \quad [\xi_2, \xi_3] = \xi_1, \quad [\xi_3, \xi_1] = \xi_2, \tag{G-7-6}$$

这可看作 Lie 代数 $\mathfrak{so}(3)$ 的结构常数表达式. 以 A_1, A_2, A_3 代表 $\mathfrak{so}(3)$ 的一组基矢 [式(G-6-4a)–(G-6-4c)], 则由 $\psi(A_i) = \xi_i (i = 1, 2, 3)$ 定义的映射 $\psi : \mathfrak{so}(3) \to \mathscr{K}$ 正是式(G-7-4) 中的那个 ψ, 与式(G-6-5) 对比可知它是 Lie 代数同构.

例 2

作为 2 维欧氏空间的等度规群, 欧氏群 E(2) 的 Lie 代数 $\mathfrak{e}(2)$ 同构于 $(\mathbb{R}^2, \delta_{ab})$ 上全体 Killing 矢量场的集合 $\mathscr{K}$. 设 $\{x, y\}$ 是笛卡儿系, 则

$$\xi_1 \equiv -\frac{\partial}{\partial x}, \quad \xi_2 \equiv -\frac{\partial}{\partial y}, \quad \xi_3 \equiv y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \tag{G-7-7}$$

是独立的 Killing 矢量场, 可充当 $\mathscr{K}$ 的一组基矢. 简单的对易子计算表明

$$[\xi_1, \xi_2] = 0, \quad [\xi_1, \xi_3] = \xi_2, \quad [\xi_2, \xi_3] = -\xi_1, \tag{G-7-8}$$

这可看作 Lie 代数 $\mathfrak{e}(2)$ 的结构常数表达式.

例 3

作为 4 维 Minkowski 时空的等度规群, Poincaré 群 P 的 Lie 代数 $\mathscr{P}$ 同构于 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 上全体 Killing 场的集合 $\mathscr{K}$. 设 $\{t, x, y, z\}$ 是任一 Lorentz 系, 则

$$\xi_0 \equiv -\frac{\partial}{\partial t}, \quad \xi_1 \equiv -\frac{\partial}{\partial x}, \quad \xi_2 \equiv -\frac{\partial}{\partial y}, \quad \xi_3 \equiv -\frac{\partial}{\partial z}, \tag{G-7-9a}$$

$$\xi_4 \equiv z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \quad \xi_5 \equiv x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}, \quad \xi_6 \equiv y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \tag{G-7-9b}$$

$$\xi_7 \equiv t\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t}, \quad \xi_8 \equiv t\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial t}, \quad \xi_9 \equiv t\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial t} \tag{G-7-9c}$$

是独立的 Killing 场, 可充当 $\mathscr{K}$ 的一组基矢. 简单的计算表明全部非零对易子为

$$\begin{aligned}&[\xi_i,\xi_j] = \varepsilon^{ijk}\xi_k, \quad [\xi_i,\xi_6] = \varepsilon^{ijk}\xi_k, \quad [\xi_6,\xi_{j+4}] = -\varepsilon^{ijk}\xi_{k+4}, \quad [\xi_6,\xi_{j+6}] = -\xi_{i+6},\\ &[\xi_{i+4},\xi_{j+4}] = \varepsilon^{ijk}\xi_{k+4}, \quad [\xi_{i+6},\xi_{j+6}] = -\xi_{i+6} \quad (\text{不对}i\ \text{求和}), \quad i,j,k = 1,2,3.\end{aligned} \tag{G-7-10}$$

上式也可浓缩地表为 [其中 $l_{\mu\nu}$ 的含义同式(G-6-10)]

$$\begin{aligned}&[\xi_{\mu\nu},\xi_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\rho}\xi_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}\xi_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma}\xi_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}\xi_{\mu\sigma},\\ &[\xi_{\mu\nu},\xi_\rho] = \eta_{\mu\rho}\xi_\nu - \eta_{\nu\rho}\xi_\mu, \quad \mu,\nu,\sigma,\rho = 0,1,2,3.\end{aligned} \tag{G-7-11}$$

选读 G-7-1

现在回到 M 上没有度规的一般情况. 正如前述, 只要 G 是 Lie 群, 仍然可以定义 Lie 变换群 $\sigma: G\times M\to M$. 参照 M 有度规且 G 是其等度规群的情况, 自然把由式(G-7-2) 定义的矢量场 $\bar\xi$ 称为 M 上关于 Lie 群 G 的 Killing 矢量场 (Killing vector field on M relative to Lie group G). 这时有如下结论: ① $\mathscr{K} = \{\bar\xi\}$ 仍是矢量空间; ② 仍可用矢量场对易子定义 Lie 括号使 $\mathscr{K}$ 成为 Lie 代数 ($\mathscr{K}$ 的任意两元素的 Lie 括号仍在 $\mathscr{K}$ 内); ③ 映射 $\chi: V_e\to\mathscr{K}$ 仍在差一个负号的意义下 "保 Lie 括号" [②, ③ 的证明见 Marsden et al. (1994) 命题 9.3.6]. 然而, 如果对 $\sigma: G\times M\to M$ 不作要求, 则 $\dim\mathscr{K}$ 有可能小于 $\dim V_e$, 从而使 $\chi: V_e\to\mathscr{K}$ 不是矢量空间之间的同构映射. 映射 $\sigma: G\times M\to M$ 称为有效的 (effective), 若

$$\sigma_g(p) = p, \forall p\in M \implies g = e.$$

(等价于 $g\mapsto\sigma_g$ 是一一映射, 还等价于 G 在 M 上的实现是忠实的.) 可以证明, 只要 $\sigma: G\times M\to M$ 是有效的, 则 $\chi: V_e\to\mathscr{K}$ 是矢量空间的同构映射, 于是 $\psi: V_e\to\mathscr{K}$ [按式(G-7-4) 定义] 就是 Lie 代数同构.

例 4

设 G 是 Lie 群, $R: G\times G\to G$ 是右平移 (与左平移类似, 定义见习题 7), 用下式定义 G (看作流形 M) 上的 Lie 变换群 $\sigma: G\times G\to G$ (看作 $\sigma: G\times M\to M$):

$$\sigma_g(h) := R_{g^{-1}}(h) = hg^{-1}, \quad \forall g\in G, h\in M(=G),$$

设 $\bar A$ 是任一 $A\in\mathscr{G}$ 对应的左不变矢量场, 则可以证明 (习题 18) A 在流形 $M(=G)$ 上导致的关于 G 的 Killing 矢量场 $\bar\xi = -\bar A$, 而且 $\psi: V_e\to\mathscr{K}$ (把 A 变为 $\bar A$) 是 Lie 代数同构.

例 5

选读 12-5-1 和 12-5-2 为 "M 上关于 Lie 群 G 的 Killing 矢量场" 的概念提供了两个例子. 以选读 12-5-1 为例, 把 BMS 群 B 看作群 G, 即

$$G \equiv \{\phi : \mathscr{J}^+ \to \mathscr{J}^+ \mid \phi_* \Gamma^{ab}_{cd} = \Gamma^{ab}_{cd}\},$$

定义 Lie 变换群 $\sigma : G \times \mathscr{J}^+ \to \mathscr{J}^+$ 使 $\sigma_g = \phi \quad \forall g \in G$, 则 $\mathscr{J}^+$ 上由式(G-7-2)定义的矢量场 $\bar{\xi}$ 就等于 $\mathscr{J}^+$ 上的无限小对称性 $\hat{\xi}$ (满足 $\mathscr{L}_{\hat{\xi}} \Gamma^{ab}_{cd} = 0$), 于是 $\hat{\xi}$ 可称为 $\mathscr{J}^+$ 上的关于 BMS 群的 Killing 矢量场, 而 $\mathscr{K} = \{\hat{\xi} \mid \mathscr{L}_{\hat{\xi}} \Gamma^{ab}_{cd} = 0\}$ 以 $\mathscr{J}^+$ 上的矢量场对易子为 Lie 括号则构成 Lie 代数. 以 V_e 代表 BMS 群的 Lie 代数, 注意到映射 $\sigma : G \times \mathscr{J}^+ \to \mathscr{J}^+$ 是有效的, 便知前面定义的映射 $\psi : V_e \to \mathscr{K}$ 是 Lie 代数同构. 这就证明了选读 12-5-1 中用 $\mathscr{J}^+$ 上矢量场对易子定义 Lie 括号所得的 Lie 代数 (当时称为 BMS Lie 代数) 的确是 BMS 群的 Lie 代数.

G.8

伴随表示和 Killing 型 [选读]

设 V 是 $m(<\infty)$ 维实矢量空间, 令

$$\mathscr{L}(V):=\{\text{线性变换}\psi: V\to V\}=\{V\text{ 上}(1,1)\text{ 型张量}\psi^a{}_b\},\tag{G-8-1}$$

则 $\mathscr{L}(V)$ 是 m^2 维矢量空间 [就是第 2 章的 $\mathscr{T}_1(1,1)$]. 任选 V 的基底后又对应于 $\mathscr{L}(m,\mathbb{R})$, 见小节 G.5.1. 在 $\mathscr{L}(V)$ 上可自然定义乘法: $\forall\psi,\varphi\in\mathscr{L}(V)$, 其积 $\psi\varphi$ 定义为复合映射 $\psi\circ\varphi\in\mathscr{L}(V)$. 由此又可自然定义 Lie 括号映射

$$[,]:\mathscr{L}(V)\times\mathscr{L}(V)\to\mathscr{L}(V)$$

为

$$[\psi,\varphi]:=\psi\varphi-\varphi\psi,\quad\forall\psi,\varphi\in\mathscr{L}(V),\tag{G-8-2}$$

从而使 $\mathscr{L}(V)$ 成为 m^2 维 Lie 代数.

定义 1

Lie 代数同态映射 $\beta:\mathscr{G}\to\mathscr{L}(V)$ 称为 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 的表示.

同一 Lie 群 (或 Lie 代数) 可有无数表示, 本节的要点是介绍 Lie 群和 Lie 代数的伴随表示. 根据 §G.1 例 1, 用群 G 的每一元素 $g\in G$ 可构造一个称为伴随同构的自同构映射 $I_g:G\to G$. 对 Lie 群 G, 这还是个微分同胚, 因此是从 G 到 G 的 Lie 群同构. 按定义, $I_g(h)=ghg^{-1}\quad\forall h\in G$, 所以 $I_g(e)=e$, 它在 e 点所诱导的前推 (切映射) I_{g*} (是 I_{g*e} 的简写) 是从 V_e 到 V_e 的映射, 简记为 $\mathscr{A}d_g$, 即 $\mathscr{A}d_g:=I_{g*}$. 因 V_e 就是 G 的 Lie 代数 $\mathscr{G}$, 故 $\mathscr{A}d_g:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{G}$ 上的线性变换. 虽然 I_g 作用于 e 得 e, 但作用于过 e 的曲线一般得另一曲线 (两者在 e 点有不同切矢), 故 $\mathscr{A}d_g$ 作用于 $A\in\mathscr{G}$ 未必得 A.

定理 G-8-1

设 $\mathscr{G}$ 是 Lie 群 G 的 Lie 代数, 则 $\forall g\in G, A\in\mathscr{G}$ 有

$$\exp(t\mathscr{A}d_gA)=g\exp(tA)g^{-1}.\tag{G-8-3}$$

Pf　令 $\gamma(t)\equiv\exp(tA),\gamma'(t)\equiv g\exp(tA)g^{-1}$, 则由单参子群的定义式 $\gamma(t+s)=\gamma(t)\gamma(s)$ 易证 $\gamma'(t+s)=\gamma'(t)\gamma'(s)$, 故 $\gamma'(t)$ 也是单参子群. 注意到式(G-8-3) 左边是由 $\mathscr{A}d_gA$ 生成的单参子群, 为证式(G-8-3) 只须证明两边在 e 点的切矢相同, 证明如下: 右边的切矢 $=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}[g\exp(tA)g^{-1}]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}[I_g(\exp(tA))]$

$$=I_{g*}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\exp(tA)\right]=\mathscr{A}d_gA=\text{左边的切矢}.\qquad\square$$

推论 G-8-2

设 H 是 Lie 群 G 的正规子群, $\mathscr{H}$ 是 H 的 Lie 代数, 则

$$\mathscr{A}d_gB\in\mathscr{H},\quad \forall B\in\mathscr{H}, g\in G. \tag{G-8-4}$$

Pf 由 $B\in\mathscr{H}$ 可知 $\exp(tB)$ 是 H 的单参子群, 由正规子群的定义 (§G.1 定义 7) 又知 $g\exp(tB)g^{-1}\subset H$, 于是式(G-8-3) 表明 $\exp(t\mathscr{A}d_gB)$ 是 H 的单参子群, 因而 $\mathscr{A}d_gB\in\mathscr{H}$. □

定理 G-8-3

设 $\mathscr{G}$ 是 Lie 群 G 的 Lie 代数, 则 $\forall A,B\in\mathscr{G}$ 有

$$[A,B]=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\mathscr{A}d_{\exp(tA)}B). \tag{G-8-5}$$

注 1 $\mathscr{A}d_{\exp(tA)}B$ 在 t 固定时是 e 点的矢量, 在 t 变动时是 t 的、矢量取值的函数, 等式右边代表此函数的导函数在 $t=0$ 的值 (仍是 e 点的矢量), 即

$$[A,B]=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\mathscr{A}d_{\exp(tA)}B)=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}[(\mathscr{A}d_{\exp(tA)}B)-\mathscr{A}d_{\exp(0)}B]. \tag{G-8-5$'$}$$

Pf 以 $\bar{A},\bar{B}$ 分别代表 $A,B\in\mathscr{G}$ 对应的左不变矢量场, $\phi_t:\mathbb{R}\times G\to G$ 代表 $\bar{A}$ 产生的单参微分同胚群, 则由式(G-4-11) 得 $\phi_t(e)=\exp(tA)$, 再由式(G-2-2) 得 $\bar{B}_{\phi_t(e)}=L_{\exp(tA)*}B$, 与式(G-5-8) 结合得

$$[A,B]=[\bar{A},\bar{B}]_e=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[\phi_{t*}L_{\exp(tA)*}B]=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}[(\phi_{t*}\circ L_{\exp(tA)*})_*B]. \tag{G-8-6}$$

另一方面, 由 $I_g(h)=ghg^{-1}$ 又知 $\forall g\in G$ 有

$$I_{\exp(tA)}(g)=\exp(tA)g\exp(-tA)=\phi_{-t}[\exp(tA)g]=\phi_{-t}[L_{\exp(tA)}(g)]=(\phi_{-t}\circ L_{\exp(tA)})(g),$$

[第二步用到式(G-4-11).] 所以 $I_{\exp(tA)}=\phi_{-t}\circ L_{\exp(tA)}$, 代入式(G-8-6) 便得

$$[A,B]=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(I_{\exp(tA)*}B)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\mathscr{A}d_{\exp(tA)}B). \qquad \square$$

定理 G-8-4

设 H 是连通 Lie 群 G 的连通 Lie 子群, $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{G}$ 分别是 H 和 G 的 Lie 代数, 则 H 是 G 的正规子群 $\iff$ $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{G}$ 的理想.

Pf (A) ($\Longrightarrow$ 的证明) 由推论 G-8-2 知 $\mathscr{A}d_{\exp(tA)}B\in\mathscr{H}\quad\forall A\in\mathscr{G},B\in\mathscr{H},t\in\mathbb{R}$, 所以式(G-8-5) 右边是 $\mathscr{H}$ 的元素, 因而该式给出 $[A,B]\in\mathscr{H}$, 可见 $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{G}$ 的理想. (B) ($\Longleftarrow$ 的证明) 只须由 $\mathscr{H}$ 是理想证明 $ghg^{-1}\in H\quad\forall h\in H,g\in G$. 若 h 可表为 $h=\exp(B),B\in\mathscr{H}$, 则 $ghg^{-1}=g\exp(B)g^{-1}=\exp(\mathscr{A}d_gB)\in H$ [其中第二步用到式(G-8-3)]. 然而 h 未必能表为 $\exp(B)$, 这使证明变得复杂. 幸好有这样的命题 [用选读

G-4-1 的结论配以 Warner (1983) 的 3.18 可证]: 只要 H 是连通 Lie 群的连通 Lie 子群, 则 $\forall h\in H, \exists B_1, B_2, \cdots \in \mathscr{H}$ 使 $h=\exp(B_1)\exp(B_2)\cdots$ (有限个指数之积). 所以

$$ghg^{-1}=g\exp(B_1)g^{-1}g\exp(B_2)g^{-1}\cdots=h_1h_2\cdots\in H,$$

其中 $h_n=g\exp(B_n)g^{-1}\in H, n\in\mathbb{N}$. □

注 2 可见理想在 Lie 代数理论中的角色相当于正规子群在群论中的角色.

由推前映射的线性性可知 $I_{g*}:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{G}$ 上的线性映射, 故 $\mathscr{A}d_g\in\mathscr{L}(\mathscr{G})$ [$\mathscr{L}(\mathscr{G})$ 的含义见式(G-8-1)]. $I_g:G\to G$ 是微分同胚还保证 $I_{g*}:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ 是同构映射 (见第 4 章习题 4), 当然有逆, 所以

$$\mathscr{A}d_g\in\{\mathscr{G}\text{ 上可逆线性变换}\}\subset\mathscr{L}(\mathscr{G}). \tag{G-8-7}$$

既然每一 $g\in G$ 对应于一个 $\mathscr{A}d_g$, 便得有从 G 到 $\{\mathscr{G}$ 上可逆线性变换$\}$ 的映射, 记作 $\mathscr{A}d$, 即

$$\mathscr{A}d:G\to\{\mathscr{G}\text{ 上可逆线性变换}\}. \tag{G-8-8}$$

选定基底后 $\mathscr{G}$ 上的每个可逆线性变换对应于一个可逆矩阵, 故 $\{\mathscr{G}$ 上可逆线性变换$\}$ 对应于一个矩阵群 [就是 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$, 其中 $m=\dim(G)$]. 下面证明 $\mathscr{A}d$ 是同态映射, 因而是 Lie 群 G 的表示.

定理 G-8-5

$\mathscr{A}d:G\to\{\mathscr{G}$ 上可逆线性变换$\}$ 是同态映射.

Pf　不难证明 $\forall g,h\in G$ 有 $I_{gh}=I_g\circ I_h$, 故

$$\mathscr{A}d_{gh}=I_{gh*}=(I_g\circ I_h)_*=I_{g*}\circ I_{h*}=\mathscr{A}d_g\circ\mathscr{A}d_h, \tag{G-8-9}$$

[其中第三步用到第 4 章习题 5(b).] 同态性于是得证. □

定义 2

同态映射 $\mathscr{A}d:G\to\{\mathscr{G}$ 上可逆线性变换$\}$ 称为 Lie 群 G 的伴随表示 (adjoint representation).

迄今已讲过三个与 "伴随" 有关的映射, 即 $I_g:G\to G$; $\mathscr{A}d_g:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$; $\mathscr{A}d:G\to\{\mathscr{G}$ 上可逆线性变换$\}$. 现在介绍第四个, 即 $\mathrm{ad}_A:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ (其中 A 不是群元而是代数元; $A\in\mathscr{G}$), 定义为

$$\mathrm{ad}_A(B):=[A,B],\quad \forall B\in\mathscr{G}\text{ (右边方括号代表}\mathscr{G}\text{ 的 Lie 括号)}. \tag{G-8-10}$$

由 Lie 括号的线性性可知 $\mathrm{ad}_A:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ 有如下两个性质:

(a) $\forall B_1,B_2\in\mathscr{G},\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$ 有 $\mathrm{ad}_A(\beta_1B_1+\beta_2B_2)=\beta_1\,\mathrm{ad}_A(B_1)+\beta_2\,\mathrm{ad}_A(B_2)$,
(b) $\forall A_1,A_2\in\mathscr{G},\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ 有 $\mathrm{ad}_{\alpha_1A_1+\alpha_2A_2}=\alpha_1\,\mathrm{ad}_{A_1}+\alpha_2\,\mathrm{ad}_{A_2}$.

性质 (a) 表明 ad_A 是 $\mathscr{G}$ 上的线性变换, 即 $\mathrm{ad}_A\in\mathscr{L}(\mathscr{G})$, 也可看作 $\mathscr{G}$ 上的 $(1,1)$ 型张量, 所以式(G-8-10) 在补上抽象指标后又可用 $\mathscr{G}$ 的结构张量 C^c_{ab} 改写为

$$(\mathrm{ad}_A)^c{}_bB^b\equiv[A,B]^c=C^c_{ab}A^aB^b,\quad \forall B^b\in\mathscr{G},$$

从而给出张量 $(\mathrm{ad}_A)^c{}_b$ 在甩掉作用对象 B^b 后的表达式

$$(\mathrm{ad}_A)^c{}_b = A^a C^c_{ab}. \tag{G-8-11}$$

映射 ad_A (其中 $A \in \mathscr{G}$) 虽不同于 $\mathscr{A}d_g$ (其中 $g \in G$), 但两者有如下密切关系 [证明见 Sagle and Walde (1973)]:

$$\mathscr{A}d_{\exp(A)} = \mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_A), \tag{G-8-12}$$

其中 $\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_A)$ 的含义是

$$\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_A) = \delta + \mathrm{ad}_A + \frac{1}{2!}(\mathrm{ad}_A)^2 + \frac{1}{3!}(\mathrm{ad}_A)^3 + \cdots, \tag{G-8-13}$$

这可看作 $\mathscr{G}$ 上的 $(1,1)$ 型张量等式, δ 代表恒等映射 (即 $\delta^a{}_b$), $(\mathrm{ad}_A)^2$ 代表 $(\mathrm{ad}_A)^a{}_c(\mathrm{ad}_A)^c{}_b$, 等等. 因 ad_A 可看作抽象 Lie 代数 $\mathscr{L}(\mathscr{G})$ 的元素, $\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_A)$ 也可理解为 $\exp(\mathrm{ad}_A)$, 即 Lie 代数 $\mathscr{L}(\mathscr{G})$ 相应的 (单连通) Lie 群上的指数映射. 这一理解与用幂级数 [式(G-8-13)] 的理解等价.

既然每一 $A \in \mathscr{G}$ 对应于一个 $\mathrm{ad}_A \in \mathscr{L}(\mathscr{G})$, 便得有从 $\mathscr{G}$ 到 $\mathscr{L}(\mathscr{G})$ 的映射 (与 "伴随" 有关的第五个映射), 记作 $\mathrm{ad}: \mathscr{G} \to \mathscr{L}(\mathscr{G})$, ad_A 的性质 (b) 表明 ad 为线性映射. 由 Lie 括号所满足的 Jacobi 恒等式易证 (习题) ad_A 满足

$$\mathrm{ad}_{[A,B]} = \mathrm{ad}_A\,\mathrm{ad}_B - \mathrm{ad}_B\,\mathrm{ad}_A, \quad \forall A, B \in \mathscr{G}. \tag{G-8-14}$$

即 $\mathrm{ad}: \mathscr{G} \to \mathscr{L}(\mathscr{G})$ 保 Lie 括号, 因而是同态映射.

定义 3

同态映射 $\mathrm{ad}: \mathscr{G} \to \mathscr{L}(\mathscr{G})$ 称为 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 的伴随表示.

注意到 $\{\mathscr{G}$ 上可逆线性变换$\} \subset \mathscr{L}(\mathscr{G})$, 也可写 $\mathscr{A}d: G \to \mathscr{L}(\mathscr{G})$. 由 $\mathscr{A}d_e: \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ 是恒等映射可知 $\mathscr{A}d(e)$ 是 $\mathscr{L}(\mathscr{G})$ 中的单位矩阵 I, 故 $\mathscr{A}d: G \to \mathscr{L}(\mathscr{G})$ 在点 $e \in G$ 诱导出推前映射 $\mathscr{A}d_*: V_e \to V_I$. 注意到 $V_e = \mathscr{G}$ 以及矢量空间 $\mathscr{L}(\mathscr{G})$ 可与其中任一点的切空间 (现在取 V_I) 认同, 便有 $\mathscr{A}d_*: \mathscr{G} \to \mathscr{L}(\mathscr{G})$, 即映射 $\mathscr{A}d_*$ 与 ad 有相同的定义域和值域. 下面证明它们是相等的映射.

定理 G-8-6

映射 $\mathscr{A}d_*: \mathscr{G} \to \mathscr{L}(\mathscr{G})$ 与 $\mathrm{ad}: \mathscr{G} \to \mathscr{L}(\mathscr{G})$ 相等.

Pf　只须证 $\mathscr{A}d_{*A} = \mathrm{ad}_A \quad \forall A \in \mathscr{G}$, 为此只须证 $(\mathscr{A}d_{*A})(B) = \mathrm{ad}_A(B) \quad \forall A, B \in \mathscr{G}$. 因

$$\mathscr{A}d_{*A} = \mathscr{A}d_*\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\exp(tA)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\mathscr{A}d(\exp(tA)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\mathscr{A}d_{\exp(tA)},$$

故

$$(\mathscr{A}d_{*A})(B) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\mathscr{A}d_{\exp(tA)}\right](B) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}(\mathscr{A}d_{\exp(tA)}B) = [A,B] = \mathrm{ad}_A(B),$$

其中第三步用到定理 G-8-3. □

利用 $\mathscr{G}$ 的伴随表示可定义映射 $K: \mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathbb{R}$ 如下:

$$K(A,B) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_A\,\mathrm{ad}_B), \quad \forall A, B \in \mathscr{G}. \tag{G-8-15}$$

其中 $\mathrm{ad}_A\,\mathrm{ad}_B$ 代表两个线性变换的相继作用, 也可用抽象指标表为

$$(\mathrm{ad}_A)^a{}_c(\mathrm{ad}_B)^c{}_b = (\mathrm{ad}_A\,\mathrm{ad}_B)^a{}_b,$$

而 $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_A\,\mathrm{ad}_B)$ 则代表 $(\mathrm{ad}_A\,\mathrm{ad}_B)^a{}_a$, 即 $(1,1)$ 型张量 $(\mathrm{ad}_A\,\mathrm{ad}_B)^a{}_b$ 的迹. 由式(G-8-15) 可知 K 是把 $\mathscr{G}$ 上两个矢量 A,B 变为一个实数的对称双线性映射, 因而是 $\mathscr{G}$ 上的 $(0,2)$ 型对称张量, 在 Lie 代数理论中被称为 $\mathscr{G}$ 上的 Killing 型 (Killing form). 由式(G-8-14) 不难证明 (习题)

$$K([A,B],C) = K(A,[B,C]), \quad \forall A,B,C\in\mathscr{G}. \tag{G-8-16}$$

提示: 利用 tr 号内方阵顺序的可轮换性, 例如 $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA)$. 式(G-8-15) 也可借助于式(G-8-11) 表为

$$K(A,B) = (\mathrm{ad}_A)^a{}_b(\mathrm{ad}_B)^b{}_a = C^a_{cb}C^b_{da}A^cB^d, \tag{G-8-17}$$

另一方面, $K(A,B)$ 又可用抽象指标表为 $K_{cd}A^cB^d$, 与上式结合便得

$$K_{cd} = C^a_{cb}C^b_{da}. \tag{G-8-18}$$

K_{ab} 的对称性使它有可能充当矢量空间 $\mathscr{G}$ 上的度规, 但为此还须 K_{ab} 非退化. 可以证明 (参见专讲 Lie 代数的教材), K_{ab} 非退化的充要条件是 $\mathscr{G}$ 为半单 Lie 代数 (见 §G.3 定义 5), 所以半单 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 的 Killing 型 K_{ab} 可充当 $\mathscr{G}$ 的度规, 称为 Cartan 度规. K_{ab} 的号差原则上因 $\mathscr{G}$ 而异, 不过物理中遇到的 Lie 代数的 K_{ab} 多数是负定的, 因而存在正交归一基底 $\{(E_\mu)^a\}$ 使 $K_{\mu\nu} = K_{ab}(E_\mu)^a(E_\nu)^b = -\delta_{\mu\nu}$.

Cartan 度规 K_{ab} 的一大用处是给结构常数 $C^\sigma_{\mu\nu}$ 降指标, 即可定义

$$C_{\rho\mu\nu} \equiv K_{\rho\sigma}C^\sigma_{\mu\nu}. \tag{G-8-19}$$

定理 G-8-7

$C_{\rho\mu\nu} = C_{[\rho\mu\nu]}$.

Pf　下标本来就反称, 故只须证 $C_{\rho\mu\nu} = -C_{\mu\rho\nu}$, 即 $K_{\rho\sigma}C^\sigma_{\mu\nu} = -K_{\mu\sigma}C^\sigma_{\rho\nu}$. 注意到 $K_{\rho\sigma}C^\sigma_{\mu\nu} = K(E_\rho,E_\sigma)C^\sigma_{\mu\nu} = K(E_\rho,C^\sigma_{\mu\nu}E_\sigma) = K(E_\rho,[E_\mu,E_\nu])$, 只须证

$$K(E_\rho,[E_\mu,E_\nu]) = -K(E_\mu,[E_\rho,E_\nu]),$$

利用式(G-8-16) 及 $[E_\rho,E_\mu] = -[E_\mu,E_\rho]$ 立即得证. □

Lie 代数 $\mathscr{G}$ 的 Killing 型是用伴随表示 ad 定义的, 但可自然推广到任何表示 $\beta:\mathscr{G}\to\mathscr{L}(V)$. 在 $\mathscr{G}$ 上定义对称双线性映射 $\tilde{K}:\mathscr{G}\times\mathscr{G}\to\mathbb{R}$ 如下:

$$\tilde{K}(A,B) := \mathrm{tr}[\beta(A)\beta(B)], \quad \forall A,B\in\mathscr{G}. \tag{G-8-20}$$

当 β 为伴随表示 ad 时 $\tilde{K}$ 回到 K. 与 K 类似, $\tilde{K}$ 也可看作 $\mathscr{G}$ 上的 $(0,2)$ 型对称张量, 故也可记作 $\tilde{K}_{ab}$. 当 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 及其表示 β 满足适当条件时 $\tilde{K}_{ab}$ 非退化, 这时就可充当 $\mathscr{G}$ 上的度规, 不妨称为广义 Cartan 度规. 不难证明式(G-8-16) 也适用于 $\tilde{K}$, 即

$$\tilde{K}([A,B],C) = \tilde{K}(A,[B,C]), \quad \forall A,B,C\in\mathscr{G}. \tag{G-8-21}$$

Part V

固有 Lorentz 群与 Lorentz 代数

本部分集中讨论对物理学最重要的 Lorentz 群 $L = \mathrm{O}(1,3)$ 及其 Lie 代数 $\mathscr{O}(1,3)$. 先给出伪转动与转动的矩阵形式及分解定理, 再计算 Lorentz 代数的基与结构常数, 并用 Killing 矢量场重新认识 Lorentz 代数, 最后以 Thomas 进动为例展示伪转动不是子群这一事实的物理后果.

内容概要

- 掌握伪转动 $B(\boldsymbol{v})$ 与转动 R 的矩阵形式, 理解分解定理 $\Lambda = B(\boldsymbol{v})R$.
- 掌握 Lorentz 代数的基 $\{r_i, b_i\}$ 及其对易关系.
- 理解 $\mathscr{K}_r$ 与 $\mathscr{K}_b$ 子空间, 以及 Thomas 进动的群论来源.

G.9

固有 Lorentz 群和 Lorentz 代数

G.9.1 固有 Lorentz 变换和固有 Lorentz 群

Lorentz 群是由 Lorentz 变换引出的. Lorentz 变换是 4 维 Minkowski 时空中从一个惯性坐标系 (Lorentz 系) 到另一惯性坐标系的坐标变换. 读者熟悉的 Lorentz 变换

$$\begin{aligned} &t'=\gamma(t-vx),\quad x'=\gamma(x-vt),\quad y'=y,\quad z'=z,\\ &-1<v<1,\quad \gamma\equiv(1-v^2)^{-1/2} \end{aligned} \tag{G-9-1}$$

所涉及的两个惯性坐标系满足如下条件 (见图 8): ① 空间坐标原点在 $t'=t=0$ 时重合; ② $\{x',y',z'\}$ 系相对于 $\{x,y,z\}$ 系以速率 $|v|$ 沿 x 轴的正或负向匀速平动; ③ 空间坐标轴对应同向. 以 X 和 X' 分别代表由 t,x,y,z 和 t',x',y',z' 排成的列矩阵, 则式(G-9-1) 可用矩阵表为

$$X'=B_x(v)X,\quad \text{其中}B_x(v)=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma v & 0 & 0\\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{G-9-1$'$}$$

令 $v=\tanh\lambda$, 则 $-1<v<1$ 相当于 $-\infty<\lambda<\infty$, $B_x(v)$ 可改写为

$$B_x(\lambda)=\begin{pmatrix}\cosh\lambda & -\sinh\lambda & 0 & 0\\ -\sinh\lambda & \cosh\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{G-9-1$''$}$$

今后也常把 X 作为 $\{t,x,y,z\}$ 系的简称. 为了把条件②放宽为 "X' 系相对于 X 系的速度 $\boldsymbol{v}$ 可取任意方向", 可先把式(G-9-1) 的第二、三、四式改写为一个 3 维矢量等式. 设事件 $p\in\mathbb{R}^4$ 在 X 和 X' 系的时空坐标分别为 t,x,y,z 和 t',x',y',z', 以 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3$ 分别代表两系的空间坐标基矢, 则

$$\boldsymbol{R}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{R}'=x'\boldsymbol{e}'_1+y'\boldsymbol{e}'_2+z'\boldsymbol{e}'_3 \tag{G-9-2}$$

分别代表事件 p 在两系中的位矢 (图 9). 请注意 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{R}'$ 是 p 点的切于不同 3 维子流形 Σ_t 和 $\Sigma_{t'}$ 的矢量, 不能直接比较. 为便于描述两者的关系, 可借用一人为引入的抽象的 3 维矢量空间 $\mathscr{V}$ (实的内积空间). 以 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 代表 $\mathscr{V}$ 的事先选定的一组正交归一基矢, 则

$$\boldsymbol{r}\equiv x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{r}'\equiv x'\boldsymbol{e}'_1+y'\boldsymbol{e}'_2+z'\boldsymbol{e}'_3 \tag{G-9-3}$$

都是 $\mathscr{V}$ 的元素, 分别称为 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{R}'$ 在 $\mathscr{V}$ 的像矢量. 一般而言, 设 $\boldsymbol{W}$ 是任一惯性坐标系的空间矢量, w^i 是 $\boldsymbol{W}$ 在该系的分量, 则 $w^i\boldsymbol{e}_i\in\mathscr{V}$ 定义为 $\boldsymbol{W}$ 的像矢量. X 系测得的 X'

系的速度 $\boldsymbol{v}$ 是切于 Σ_t 的矢量, 在图 8 的情况下有 $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_1$, 故其像矢量为 $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_1$. 利用 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'$ 和 $\boldsymbol{v}$ 可把式(G-9-1) 的第一至四式改写为

$$t'=\gamma(t-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}\left[\frac{(\gamma-1)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r})}{v^2}-\gamma t\right], \tag{G-9-4}$$

式中所有矢量都是抽象空间 $\mathscr{V}$ 的元素. 上式第二式是 $\mathscr{V}$ 中的矢量等式, 有明确意义. 为把式(G-9-1′) 推广到 $\boldsymbol{v}$ 取任意方向的情况, 只须对 X 和 X' 系的空间坐标轴施行相同的空间转动 (转后所得新系的 x 轴便不再与 $\boldsymbol{v}$ 平行). 作为后果, 位矢 $\boldsymbol{R}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{R}'=x'\boldsymbol{e}'_1+y'\boldsymbol{e}'_2+z'\boldsymbol{e}'_3$ 和相对速度 $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_1$ 的分量 $(x,y,z),(x',y',z')$ 和 $(v,0,0)$ 都受到一个相同的正交变换, 从而像矢量 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'$ 和 $\boldsymbol{v}$ 也都受到一个相同的逆转动 (因为已约定 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 不变). 由于坐标 t 不受空间转动影响, 转动的保内积性又保证 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r},v^2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$ 及 $\gamma\equiv(1-v^2)^{-1/2}$ 在转动下不变, 所以式(G-9-4) 第二式右边的方括号为不变量. 加上转动映射的线性性, 便知式(G-9-4) 对逆转动所得的像矢量 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'$ 和 $\boldsymbol{v}$ 同样成立, 即

$$t'=\gamma(t-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}\left[\frac{(\gamma-1)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r})}{v^2}-\gamma t\right]. \tag{G-9-4′}$$

上式反映两个惯性坐标系 $\tilde{X}$ 和 $\tilde{X}'$ (分别由 X 和 X' 系经相同转动而得) 之间的坐标变换关系, 但这关系已不再满足图 8, 因为两者的相对速度 $\boldsymbol{v}$ 与 $\tilde{x}$ 轴并不平行. ($\boldsymbol{v}$ 与 $\tilde{x}$ 轴可以谈及平行是因为它们都躺在欧氏空间 Σ_t 上, 这是空间转动不改变惯性参考系的结果.) 不过, 为了得到 $\tilde{X}$ 和 $\tilde{X}'$ 系, 只须对图 8 的 X 和 X' 系施行相同的空间转动, [这 “相同” 是指刻画两个转动 ($X\mapsto\tilde{X}$ 和 $X'\mapsto\tilde{X}'$) 的三个 Euler 角 (分别由 X 和 X' 系测得) 对应相等]. 在这个意义上可以说 $\tilde{X}$ 和 $\tilde{X}'$ 系的对应空间轴 “同向”. 式(G-9-4′) 所代表的坐标变换叫做无转动的 Lorentz 变换 (Lorentz transformation without rotation) 或伪转动 (boost). 为简单起先去掉 $\sim$ 号, 并以 v_1,v_2,v_3 代表像矢量的分量 (即 $\boldsymbol{v}\equiv v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3$), 则式(G-9-4′) 亦可表为矩阵等式 $X'=B(\boldsymbol{v})X$, 其中

$$B(\boldsymbol{v})=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma v_1 & -\gamma v_2 & -\gamma v_3\\ -\gamma v_1 & 1+\frac{(\gamma-1)v_1^2}{v^2} & \frac{(\gamma-1)v_1v_2}{v^2} & \frac{(\gamma-1)v_1v_3}{v^2}\\ -\gamma v_2 & \frac{(\gamma-1)v_1v_2}{v^2} & 1+\frac{(\gamma-1)v_2^2}{v^2} & \frac{(\gamma-1)v_2v_3}{v^2}\\ -\gamma v_3 & \frac{(\gamma-1)v_1v_3}{v^2} & \frac{(\gamma-1)v_2v_3}{v^2} & 1+\frac{(\gamma-1)v_3^2}{v^2}\end{pmatrix}. \tag{G-9-5}$$

上式的 $B(\boldsymbol{v})$ 称为伪转动矩阵 (由上式可见伪转动矩阵必对称), 它穷尽了惯性坐标系 X 和 X' 之间满足如下条件的坐标变换: ① 两系空间坐标原点在 $t'=t=0$ 时重合; ② $\{x',y',z'\}$ 系相对于 $\{x,y,z\}$ 系以任意速度 $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3$ 作匀速平动; ③ 两系空间坐标轴对应 “同向”. 为便于计算, 式(G-9-5) 的 $B(\boldsymbol{v})$ 也可用下式表出:

$$B^0{}_0(\boldsymbol{v})=\gamma,\quad B^0{}_i(\boldsymbol{v})=B^i{}_0(\boldsymbol{v})=-\gamma v^i,\quad B^i{}_j(\boldsymbol{v})=B^j{}_i(\boldsymbol{v})=\delta^i{}_j+\frac{\gamma^2v^iv^j}{1+\gamma}, \tag{G-9-5′}$$

其中 $v^i\equiv\delta^{ij}v_j=v_i$. 此外, 由矩阵求逆运算或物理思辨可知 $B^{-1}(\boldsymbol{v})=B(-\boldsymbol{v})$.

式(G-9-5) 只给出 Lorentz 变换的第一种类型 (伪转动). 第二种类型的简单特例是

$$X'=R_z(\alpha)X,\quad \text{其中}R_z(\alpha)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\0&\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \tag{G-9-6}$$

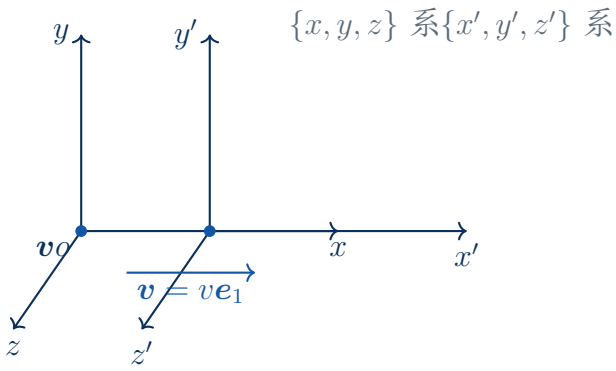


图 8: 两个惯性坐标系 $X=\{x,y,z\}$ 与 $X'=\{x',y',z'\}$, 空间坐标原点在 $t'=t=0$ 时重合, X' 系相对 X 系以速度 $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_1$ 沿 x 轴方向匀速平动, 对应空间坐标轴同向.

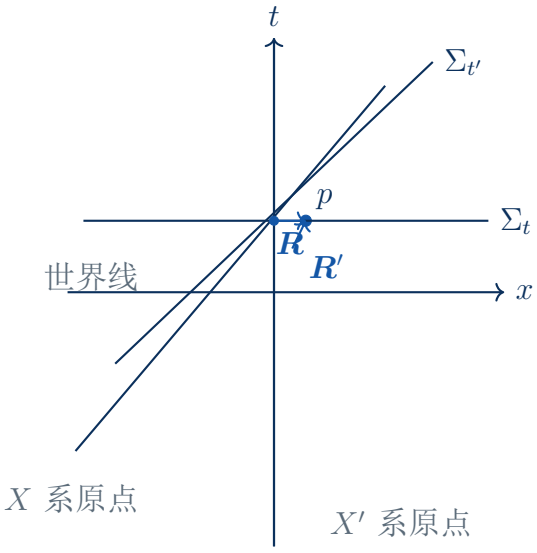


图 9: 事件 p 在两系中的位矢. p 点的切于 Σ_t 的位矢 $\boldsymbol{R}$ 与切于 $\Sigma_{t'}$ 的位矢 $\boldsymbol{R}'$ 属于不同的 3 维子流形, 不能直接比较; 图中 Σ_t 与 $\Sigma_{t'}$ 分别是两系的等时面.

它所涉及的两个惯性坐标系之间没有相对运动 (因而属于同一惯性参考系), 其作用是把 X 系的空间坐标绕 z 轴旋转角度 α. 这种类型的最一般情形是把 X 系的空间坐标绕 (过原点的) 任意轴转任意角 (因而所得新坐标系 X' 与 X 仍属同一惯性参考系), 其矩阵 R 为

$$R=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&R^1{}_1&R^1{}_2&R^1{}_3\\0&R^2{}_1&R^2{}_2&R^2{}_3\\0&R^3{}_1&R^3{}_2&R^3{}_3\end{pmatrix},\quad \text{其中}\begin{pmatrix}R^1{}_1&R^1{}_2&R^1{}_3\\R^2{}_1&R^2{}_2&R^2{}_3\\R^3{}_1&R^3{}_2&R^3{}_3\end{pmatrix}\in \mathrm{SO}(3). \tag{G-9-7}$$

式(G-9-7) 的 Lorentz 变换叫做转动 (rotation), 是同一惯性参考系内的坐标变换. 最一般的 Lorentz 变换可以定义如下: 惯性坐标系 X 与 X' 之间的坐标变换称为 Lorentz 变换, 若两系的空间坐标原点在 $t'=t=0$ 时重合 (亦即 Lorentz 变换保持 4 维坐标原点不变). 不难看出 Minkowski 线元在 Lorentz 变换下不变, 因此所有 Lorentz 变换构成群, 而且同构于小节 G.5.3 定义的 Lorentz 群 $L=\mathrm{O}(1,3)$. Minkowski 时空的平移变换也保线元, 但 4 维坐标系原点在平移下要变, 称为非齐次 Lorentz 变换. 上面定义的 Lorentz 变换也可称为齐次 Lorentz 变换, 齐次与非齐次 Lorentz 变换构成 Poincaré 群. 本节只讨论齐次 Lorentz 变换, 即只讨论 Lorentz 群 L, 而且只关心 L 的不含反射及反演的子群, 即固有 Lorentz 群 $L_+^\uparrow$, 其群元可以是转动、伪转动以及两者的混合 (即伪转动和转动矩阵之积), 见定理 G-9-4. 不难看出, 由全体转动组成的子集 $\mathrm{ZD}\subset L_+^\uparrow$ 是子群, 而且同构于 $\mathrm{SO}(3)$. 还可证明 ZD 是 Lie 子群. 然而, 应该特别强调, 两个伪转动矩阵 $B(\boldsymbol{v})$ 和 $B(\boldsymbol{u})$ 之积 $B(\boldsymbol{v})B(\boldsymbol{u})$ 不是对称矩阵 [除非 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{u}$ (作为 $\mathscr{V}$ 的矢量) 平行], 因而不是伪转动. 可见由全体伪转动组成的子集 $\mathrm{WZ}\subset L_+^\uparrow$ 不是子群 [这与式(G-6-9) 给出的 Lie 括号表达式密切相关]. 在原子物理的早期研究中提出的 Thomas 进动正是 WZ 不是子群的结果 (见小节 G.9.4). 不过, 由式(G-9-1″) 容易验证

$$B_x(\lambda_1+\lambda_2)=B_x(\lambda_1)B_x(\lambda_2),$$

所以 WZ 的子集

$$\mathrm{WZ}_x\equiv\{\text{形如式(G-9-1″) 的矩阵}B_x(\lambda)\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$$

是 $L_+^\uparrow$ 的单参子群.

用转动矩阵 R 可对式(G-9-5) 的推导过程给出一个简洁描述. 设 X 和 X' 系由简单伪转动 $B_x(v)$ 联系, 即 $X'=B_x(v)X$. 对两系施行任意转动 R 便得新系 $\tilde{X}=RX$ 和 $\tilde{X}'=RX'$. 由此三式易得 $\tilde{X}'=RB_x(v)R^{-1}\tilde{X}=B(\boldsymbol{v})\tilde{X}$, 其中 $B(\boldsymbol{v})\equiv RB_x(v)R^{-1}$ 就是式(G-9-5) 的 $B(\boldsymbol{v})$, 而且由式(G-9-4′) 的推导过程可知 $B(\boldsymbol{v})$ 中的矢量 $\boldsymbol{v}$ 与 $B_x(v)$ 中的实数 v 的关系为 $|\boldsymbol{v}|=|v|$. 这一推导也可逆过来做, 即 $\forall B(\boldsymbol{v})\in\mathrm{WZ}$, 总可对 X 和 X' 系施行相同转动使 x 轴与 $\boldsymbol{v}$ 同向, 从而把 $B(\boldsymbol{v})$ 变为 $B_x(v)$. 于是有如下定理成立:

定理 G-9-1

(a) $B_x(v)\in\mathrm{WZ}_x, R\in\mathrm{ZD}\implies R^{-1}B_x(v)R\in\mathrm{WZ}$;
(b) $B(\boldsymbol{v})\in\mathrm{WZ}\implies\exists R\in\mathrm{ZD}$ 使 $B(\boldsymbol{v})=R^{-1}B_x(v)R$, 其中 $|v|=|\boldsymbol{v}|$.

定理 G-9-2

若惯性坐标系 X 与 X' 由伪转动联系, $R\in\mathrm{ZD}$, 则 $\tilde{X}=RX$ 与 $\tilde{X}'=RX'$ 也由伪转动联系.

Pf　设 $X'=B(\boldsymbol{v})X$, $B(\boldsymbol{v})\in$ WZ, 则定理 G-9-1(b) 保证 $\exists R_0\in$ ZD 使 $B(\boldsymbol{v})=R_0^{-1}B_x(v)R_0$, 故 $X'=R_0^{-1}B_x(v)R_0X$, 从而 $R_0X'=B_x(v)R_0X$, 与 $\tilde{X}\equiv RX$, $\tilde{X}'\equiv RX'$ 结合给出 $R_0R^{-1}\tilde{X}'=B_x(v)R_0R^{-1}\tilde{X}$. 令 $R_1=R_0R^{-1}$, 则 $\tilde{X}'=R_1^{-1}B_x(v)R_1\tilde{X}$. 定理 G-9-1(a) 保证 $R_1^{-1}B_x(v)R_1\in$ WZ, 故 $\tilde{X}$ 与 $\tilde{X}'$ 也由伪转动联系. □

注 1 给定两个惯性参考系 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}'$ 就有唯一的 ($\mathscr{R}'$ 相对于 $\mathscr{R}$ 的) 相对速度 $\boldsymbol{v}$ (是切于 $\mathscr{R}$ 系的同时面的矢量), 但却可有许多不同的伪转动矩阵 $B(\boldsymbol{v})$, 这是因为 $B(\boldsymbol{v})$ 中的 $\boldsymbol{v}$ 是抽象空间 $\mathscr{V}$ 的元素, 由 $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{v}\equiv v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3$ 可知 $\boldsymbol{v}$ 除取决于 $\boldsymbol{v}$ 外还依赖于坐标基矢 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的选取. 设 X 和 $\tilde{X}$ 是参考系 $\mathscr{R}$ 内的两个不同惯性坐标系, 则 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 不同于 $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1,\tilde{\boldsymbol{e}}_2,\tilde{\boldsymbol{e}}_3\}$, 故 $\boldsymbol{v}\neq\tilde{\boldsymbol{v}}$. 由此不难理解以下定理的证明.

定理 G-9-3

$\forall B(\boldsymbol{v})\in$ WZ, $R\in$ ZD 有

$$B(R\boldsymbol{v})=RB(\boldsymbol{v})R^{-1},\tag{G-9-8}$$

左边的 $R\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}$, 其第 i 分量为 $(R\boldsymbol{v})^i=R^i{}_jv^j$.

注 2 $R\in$ ZD 本是 4×4 矩阵, 但 $R\boldsymbol{v}$ 中的 R 却是式(G-9-7) 右边的 3×3 矩阵, 不过这种“符号滥用”不影响实质, 因为式(G-9-7) 左边的 4×4 阵与右边的 3×3 阵一一对应.

Pf　设 X 是惯性坐标系, 则 $X'=B(\boldsymbol{v})X$ 也是. 以 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}'$ 分别代表 X 和 X' 所属的惯性参考系, 以 $\boldsymbol{v}$ 代表 $\mathscr{R}'$ 相对于 $\mathscr{R}$ 的速度, 则 $B(\boldsymbol{v})$ 中的 $\boldsymbol{v}$ 是 $\mathscr{V}$ 中的像矢量, 即 $\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{e}_i$, 其中 v^i 是 $\boldsymbol{v}$ 在 X 系的坐标基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 的分量, 即 $\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{e}_i$. 再令 $\tilde{X}=RX$, $\tilde{X}'=RX'$, 则 $\tilde{X}$ 和 $\tilde{X}'$ 分别是 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}'$ 系内的惯性坐标系, 定理 G-9-2 保证 $\tilde{X}$ 与 $\tilde{X}'$ 由伪转动联系. 对 $\tilde{X}$ 系而言, $\boldsymbol{v}$ 的像矢量变为 $\tilde{\boldsymbol{v}}=\tilde{v}^i\tilde{\boldsymbol{e}}_i$, 其中 $\tilde{v}^i$ 是 $\boldsymbol{v}$ 在 $\tilde{X}$ 系的坐标基底 $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_i\}$ 的分量, 即 $\tilde{\boldsymbol{v}}=\tilde{v}^i\tilde{\boldsymbol{e}}_i$. 由于坐标变换 $\tilde{X}=RX$ 是线性变换, 矢量 $\boldsymbol{v}$ 的坐标分量的变换方式与坐标的变换方式一样, 故 $\tilde{\boldsymbol{v}}=R\boldsymbol{v}$, 因而 $\tilde{X}'=B(\tilde{\boldsymbol{v}})\tilde{X}=B(R\boldsymbol{v})RX$, 再与 $\tilde{X}'=RX'=RB(\boldsymbol{v})X$ 对比乃得式(G-9-8). □

注 3 [选读] ① 前面讲过, 设 $X'=BX, B\in$ WZ, 则 X' 与 X 系的对应空间坐标轴“同向”. 现在说明对“同向”一词加引号的原因. 在 4 维语言中, x' 轴的世界面 (记作 Δ) 是一个 2 维面. 从 X 系看来, t 时刻的全空间由 Σ_t 代表 (见图 9), Σ_t 与 Δ 的交线就是 t 时刻的 x' 轴. 我们来看 x' 轴与 x 轴平行的条件. 为简单起见可只讨论 3 维 Minkowski 时空, 并仅关心 $t=0$ 的时刻. 这时 Σ_0 是 2 维面, 不难写出 Δ (由 $y'=0$ 定义) 与 Σ_0 (由 $t=0$ 定义) 的交线在坐标系 $\{x,y\}$ 的方程:

$$\alpha x+\beta y=0,\quad \text{其中}\alpha\equiv\frac{(\gamma-1)v_1v_2}{v^2},\quad \beta\equiv1+\frac{(\gamma-1)v_2^2}{v^2}.\tag{G-9-9}$$

此交线与 x 轴平行当且仅当 $\alpha=0$. 可见在这个意义上 x' 轴与 x 轴当 $\alpha\neq0$ 时不同向. 事实上, 由于不同方向有不同尺缩, X 系在 $\alpha\neq0$ 时认为 x' 轴与 y' 轴互不正交. 如果 x',y' 轴分别与 x,y 轴同向, 岂非 x 与 y 轴也互不正交? 可见“同向”与同向在 $\alpha\neq0$ 时并不一致, 差别正在于前者略去了后者认为应存在的、由不同方向有不同尺缩所带来的不同向效应. 然而“同向”提法也很有用 (例如, 见小节 G.9.4), 它反映的是两个由伪转动相联系的惯性坐标系 X 和 X' 之间的这样一个重要关系 (性质): 为了通过转动把两系关系变得如图 8, 刻画这两个转动的 Euler 角必须完全相同. ② “同向”关系没有传递性: 设 $X'=B(\boldsymbol{v}_1)X, X''=B(\boldsymbol{v}_2)X'$, 则 $X''=B(\boldsymbol{v}_2)B(\boldsymbol{v}_1)X$. 只要 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 互不平行, 则 $B(\boldsymbol{v}_2)B(\boldsymbol{v}_1)$ 不是伪转动 (见定理 G-9-5), 从而 X'' 与 X 系的对应空间轴不再“同向”. 这正是小节 G.9.4 要讲的 Thomas 进动的根源.

定理 G-9-4 (分解定理)

$\forall\Lambda\in L_+^\uparrow$, $\exists$ 唯一的 $B(\boldsymbol{v})\in\mathrm{WZ}$ 和 $R\in\mathrm{ZD}$ 使

$$\Lambda=B(\boldsymbol{v})R, \tag{G-9-10}$$

Pf $\Lambda\in L_+^\uparrow$ 保证 Λ 满足式(G-5-24). 依次令式中的 $\sigma=\rho=0;\sigma=0,\rho=i$ 以及 $\sigma=i,\rho=k$, 便得以下三式 (可用作证明本定理的工具):

$$(\Lambda^0{}_0)^2-\sum_i(\Lambda^i{}_0)^2=1, \tag{G-9-11a}$$

$$\Lambda^0{}_0\Lambda^i{}_0-\sum_j\Lambda^i{}_j\Lambda^0{}_j=0, \tag{G-9-11b}$$

$$-\Lambda^0{}_i\Lambda^0{}_k+\sum_j\Lambda^j{}_i\Lambda^j{}_k=\delta_{ik}. \tag{G-9-11c}$$

我们的第一个任务是对所给的 $\Lambda\in L_+^\uparrow$ 找出 $B(\boldsymbol{v})\in\mathrm{WZ}$ 和 $R\in\mathrm{ZD}$ 使 $\Lambda=B(\boldsymbol{v})R$. 若 $\Lambda\in\mathrm{WZ}$, 则只须令 $B(\boldsymbol{v})=\Lambda,R=I$. 式(G-9-5′) 此时给出 $\Lambda^0{}_0=\gamma,\Lambda^i{}_0=-\gamma v^i$, 即

$$\gamma=\Lambda^0{}_0,\quad v^i=\frac{\Lambda^i{}_0}{\Lambda^0{}_0}. \tag{G-9-12}$$

用式(G-9-11a) 不难验证上式中的 $\boldsymbol{v}$ 即使在 $\Lambda\in L_+^\uparrow,\Lambda\notin\mathrm{WZ}$ 的一般情况下仍满足亚光速条件 $|\boldsymbol{v}|<1$. 因此, 对给定的任一 $\Lambda\in L_+^\uparrow$, 不妨先试探性地用式(G-9-12) 按式(G-9-5) 造一个 $B(\boldsymbol{v})\in\mathrm{WZ}$, 再设法找适当的 $R\in\mathrm{ZD}$ 使 $\Lambda=B(\boldsymbol{v})R$. 此式等价于 $R=B^{-1}(\boldsymbol{v})\Lambda$, 注意到 $B^{-1}(\boldsymbol{v})=B(-\boldsymbol{v})$, 又等价于 $R=B(-\boldsymbol{v})\Lambda$. 由式(G-9-5′) 和(G-9-12) 可求得 $B(-\boldsymbol{v})$ 的矩阵元用 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 的表达式:

$$B^0{}_0(-\boldsymbol{v})=\Lambda^0{}_0,\quad B^i{}_0(-\boldsymbol{v})=-\Lambda^i{}_0,\quad B^i{}_j(-\boldsymbol{v})=\delta^i{}_j+\frac{\Lambda^i{}_0\Lambda^j{}_0}{1+\Lambda^0{}_0}. \tag{G-9-13}$$

从 $R=B(-\boldsymbol{v})\Lambda$ 出发借用式(G-9-13) 和(G-9-11a)–(G-9-11c) 做矩阵乘法便得 R 的所有矩阵元 (习题):

$$R^0{}_0=1,\quad R^0{}_i=R^i{}_0=0,\quad R^i{}_j=\Lambda^i{}_j-\frac{\Lambda^i{}_0\Lambda^0{}_j}{1+\Lambda^0{}_0}. \tag{G-9-14}$$

不难验证 $(R^i{}_j)$ 为正交矩阵, 即 $\sum_j R^i{}_jR^k{}_j=\delta_{ik}$, 可见 $R\in\mathrm{ZD}$. 至此已完成第一个任务, 即对 $\Lambda\in L_+^\uparrow$ 找到 $B(\boldsymbol{v})\in\mathrm{WZ}$ 和 $R\in\mathrm{ZD}$ 使 $\Lambda=B(\boldsymbol{v})R$, 其中 $\boldsymbol{v}$ 和 R 分别由式(G-9-12) 和(G-9-14) 给出. 下面着手第二个任务, 即证明分解的唯一性. 设 $\exists B(\boldsymbol{u})\in\mathrm{WZ},R'\in\mathrm{ZD}$ 使 $\Lambda=B(\boldsymbol{u})R'$, 则由 $B(\boldsymbol{v})R=B(\boldsymbol{u})R'$ 得 $B(\boldsymbol{v})=B(\boldsymbol{u})\tilde{R}$ (其中 $\tilde{R}=RR'^{-1}\in\mathrm{ZD}$), 配以式(G-9-5′) 和(G-9-7) 得

$$B^i{}_0(\boldsymbol{v})=B^i{}_0(\boldsymbol{u})\tilde{R}^0{}_0+B^i{}_j(\boldsymbol{u})\tilde{R}^j{}_0=B^i{}_0(\boldsymbol{u})+0=-\gamma v_i.$$

另一方面, 把式(G-9-5′) 直接用于 $B(\boldsymbol{u})$ 又可得 $B^i{}_0(\boldsymbol{u})=-\gamma' u^i$, 与上式对比给出 $\gamma' v^i=\gamma u^i(i=1,2,3)$, 由此可证 (练习) $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$, 从而 $B(\boldsymbol{v})=B(\boldsymbol{u})$, 于是 $\tilde{R}=I$, 即 $R'=R$. 这就证明了分解的唯一性. 分解唯一性的另一证明见习题 25. □

定理 G-9-4* (分解定理另一形式)

$\forall\Lambda\in L_+^\uparrow$, $\exists$ 唯一的 $\tilde R\in$ ZD 和 $B(\boldsymbol w)\in$ WZ 使

$$\Lambda=\tilde RB(\boldsymbol w), \tag{G-9-15}$$

其中 $\tilde R$ 与 $\Lambda=B(\boldsymbol v)R$ 中的 R 相等, $\boldsymbol w$ 与 $\Lambda=B(\boldsymbol v)R$ 中的 $\boldsymbol v$ 的关系为

$$\boldsymbol v=R\boldsymbol w,\quad (\text{含义是}v^i=R^i{}_jw^j) \tag{G-9-16}$$

等价于

$$w^i=-\frac{\Lambda^0{}_i}{\Lambda^0{}_0}. \tag{G-9-17}$$

Pf　与上一定理的证明类似, 但要把式(G-5-24) 改写为上标形式. 设 $\Lambda\in L_+^\uparrow$, 则 $\Lambda^{-1}\in L_+^\uparrow$, 把 Λ^{-1} 用作式(G-5-24) 的 Λ 得 $\eta=(\Lambda^T)^{-1}\eta\Lambda^{-1}$, 故 $\eta^{-1}=\Lambda\eta\Lambda^T$. 注意到 $\eta^{-1}=\eta$, 便有 $\eta=\Lambda\eta\Lambda^T$, 其矩阵元等式为

$$\eta^{\rho\tau}=\Lambda^\rho{}_\mu\eta^{\mu\nu}\Lambda^\tau{}_\nu.$$

由此可导出与式(G-9-11a), (G-9-11b) 对应的公式, 即

$$(\Lambda^0{}_0)^2-\sum_i(\Lambda^i{}_0)^2=1, \tag{G-9-11′a}$$

$$\Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_i-\sum_j\Lambda^j{}_i\Lambda^j{}_0=0. \tag{G-9-11′b}$$

令 $\tilde\Lambda=RB(\boldsymbol w)$, 其中 R 和 $\boldsymbol w$ 分别由式(G-9-14) 和(G-9-17) 给出, 则由式(G-9-11′a), (G-9-11′b) 不难证明① $\tilde\Lambda^\mu{}_\nu=\Lambda^\mu{}_\nu$; ②式(G-9-17) 给出的 $\boldsymbol w$ 为亚光速. 再用式(G-9-12) 还可证明 $w^i=-\Lambda^0{}_i/\Lambda^0{}_0$ 等价于 $v^i=R^i{}_jw^j$. 分解唯一性的证明也与上一定理类似. □

定理 G-9-4* 的另一证明

$\Lambda\in L_+^\uparrow$ 导致 $\Lambda^{-1}\in L_+^\uparrow$, 定理 G-9-4 保证存在唯一的 $\tilde R\in$ ZD, $B(-\boldsymbol w)\in$ WZ 使 $\Lambda^{-1}=B(-\boldsymbol w)\tilde R^{-1}$, 故 $\Lambda=[B(-\boldsymbol w)\tilde R^{-1}]^{-1}=\tilde RB(\boldsymbol w)$. 现在证明 $\tilde R=R$ 和 $\boldsymbol v=R\boldsymbol w$. 由 $\Lambda=B(\boldsymbol v)R$ 和 $\Lambda=\tilde RB(\boldsymbol w)$ 得 $B(\boldsymbol v)R=\tilde RB(\boldsymbol w)$, 所以

$$B(\boldsymbol v)=\tilde RB(\boldsymbol w)R^{-1}=\tilde RB(\boldsymbol w)\tilde R^{-1}\tilde RR^{-1}=\tilde RB(\boldsymbol w)\tilde R^{-1}\tilde R'=B(\tilde R\boldsymbol w)\tilde R',$$

其中 $\tilde R'=\tilde RR^{-1}\in$ ZD, 最后一步用到式(G-9-8). 上式首末两端可看作同一 $B(\boldsymbol v)\in L_+^\uparrow$ 按定理 G-9-4 所做的两种分解, 即 $B(\boldsymbol v)I=B(\tilde R\boldsymbol w)\tilde R'$, 故由该定理的分解唯一性可知 $\tilde R'=I$ (再由 $\tilde R'=\tilde RR^{-1}$ 得 $\tilde R=R$) 以及 $\boldsymbol v=R\boldsymbol w$. 最后, 设若 $\Lambda\in L_+^\uparrow$ 有两种不同的分解, 即 $\Lambda=RB(\boldsymbol w)=R'B(\boldsymbol w')$, 则必导致 $\Lambda^{-1}\in L_+^\uparrow$ 有不同的分解:

$$\Lambda^{-1}=B(-\boldsymbol w)R^{-1}=B(-\boldsymbol w')R'^{-1},$$

与定理 G-9-4 矛盾. 可见把 Λ 表为 $RB(\boldsymbol w)$ 的分解是唯一的. □

定理 G-9-5

设 $B(\boldsymbol{v}), B(\boldsymbol{u}) \in \mathrm{WZ}$ 且 $\boldsymbol{v} \neq 0, \boldsymbol{u} \neq 0$, 则

$$B(\boldsymbol{v})B(\boldsymbol{u}) \in \mathrm{WZ} \iff \boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{u}, \text{ 即}\boldsymbol{v} \text{ 与}\boldsymbol{u} \text{ 平行}. \tag{G-9-18}$$

Pf (A) [已知 $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{u}$, 欲证 $B(\boldsymbol{v})B(\boldsymbol{u}) \in \mathrm{WZ}$] 由 $B(\boldsymbol{v}), B(\boldsymbol{u}) \in \mathrm{WZ}$ 及定理 G-9-1(b) 可知 $\exists R_1, R_2 \in \mathrm{ZD}$ 使 $B(\boldsymbol{v}) = R_1^{-1}B_x(v)R_1, B(\boldsymbol{u}) = R_2^{-1}B_x(u)R_2$. 把前者与式(G-9-8) 对比得 $B(\boldsymbol{v}) = B(vR_1^{-1}\boldsymbol{e}_1)$, 从而 $\boldsymbol{v} = vR_1^{-1}\boldsymbol{e}_1$. 同理有 $\boldsymbol{u} = uR_2^{-1}\boldsymbol{e}_1$. 而 $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{u}$ 保证 $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ 使 $\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{v}$ (见 §2.2 定义 7), 故 $\boldsymbol{u} = \alpha v R_1^{-1}\boldsymbol{e}_1$. 于是 $\alpha v R_1^{-1}\boldsymbol{e}_1 = uR_2^{-1}\boldsymbol{e}_1$. 又因 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \alpha$ 皆非零, 这等价于

$$R\boldsymbol{e}_1 = (\alpha v/u)\boldsymbol{e}_1, \quad \text{其中} R \equiv R_1R_2^{-1} \in \mathrm{ZD}. \tag{G-9-19}$$

如注 2 所述, 现在的 R 已看成式(G-9-7) 右边的 3×3 矩阵, 故可看作转动映射 $R : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$. 而式(G-9-19) 表明 R 作用于 $\boldsymbol{e}_1 \in \mathscr{V}$ 得 $(\alpha v/u)\boldsymbol{e}_1$, 所以只能是

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{或} R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, \pi), \tag{G-9-20}$$

分别对应于 $\alpha v/u = \pm1$. 由矩阵乘法便得 $RB_x(u)R^{-1} = B_x(\pm u)$. 于是

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{v})B(\boldsymbol{u}) &= R_1^{-1}B_x(v)R_1R_2^{-1}B_x(u)R_2 = R_1^{-1}B_x(v)RB_x(u)R^{-1}R_1 \\ &= R_1^{-1}B_x(v)B_x(\pm u)R_1 = R_1^{-1}B_x(w)R_1 \in \mathrm{WZ}, \end{aligned}$$

其中 $w \in \mathbb{R}$ 满足 $-1 < w < 1$ [具体说, $w = (v \pm u)/(1 \pm vu)$], 上式的最末一步用到定理 G-9-1(a). (B) [已知 $B(\boldsymbol{v})B(\boldsymbol{u}) \in \mathrm{WZ}$, 欲证 $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{u}$] 为此只须证明逆否命题: $\boldsymbol{v} \nparallel \boldsymbol{u} \implies B(\boldsymbol{v})B(\boldsymbol{u}) \notin \mathrm{WZ}$. 用反证法. 设 $B(\boldsymbol{v})B(\boldsymbol{u}) \in \mathrm{WZ}$, 则 $[B(\boldsymbol{v})B(\boldsymbol{u})]^0{}_i = [B(\boldsymbol{v})B(\boldsymbol{u})]^i{}_0$, 用式(G-9-5′) 通过矩阵乘法求矩阵元, 则上式给出

$$\gamma_v\gamma_u\boldsymbol{u} + \gamma_v\boldsymbol{v} + \frac{\gamma_u^2\gamma_v(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}}{1+\gamma_u} = \gamma_v\gamma_u\boldsymbol{v} + \gamma_u\boldsymbol{u} + \frac{\gamma_v^2\gamma_u(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}}{1+\gamma_v}, \tag{G-9-21}$$

其中 $\gamma_v \equiv (1-|\boldsymbol{v}|^2)^{-1/2}, \gamma_u \equiv (1-|\boldsymbol{u}|^2)^{-1/2}$. 用 $\boldsymbol{v}$ 叉乘上式两边得

$$\gamma_u\left[1 - \gamma_v - \frac{\gamma_u\gamma_v\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{1+\gamma_u}\right]\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = 0.$$

因 $\gamma_u > 1$, 又已假设 $\boldsymbol{v} \nparallel \boldsymbol{u}$ (即 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} \neq 0$), 故上式中的方括号为零, 亦即

$$1 - \gamma_v + \gamma_u - \gamma_u\gamma_v(1 + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = 0. \tag{G-9-22}$$

式(G-9-21) 左侧刚好是把右侧的 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 互换的结果, 故用 $\boldsymbol{u}$ 叉乘该式两边必定是式(G-9-22) 中的 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 互换的结果:

$$1 - \gamma_u + \gamma_v - \gamma_u\gamma_v(1 + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = 0. \tag{G-9-22′}$$

以上两式联立给出 $\gamma_u = \gamma_v$ 和 $1 - \gamma_u\gamma_v(1 + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = 0$, 前者导致 $|\boldsymbol{u}|^2 = |\boldsymbol{v}|^2$, 代入后者又得 $|\boldsymbol{v}|^2 + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$ 和 $|\boldsymbol{u}|^2 + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$. 两式相加给出 $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|^2 = 0$, 从而 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = 0$, 与 $\boldsymbol{v} \nparallel \boldsymbol{u}$ 的假设矛盾. □

G.9.2 Lorentz 代数

下面再从 Lie 代数的角度讨论. Lorentz 代数元 $A \in \mathscr{O}(1,3)$ 的充要条件 $A^T = -\eta A \eta$ 等价于 ηA 是反称矩阵 (见小节 G.5.3 末), 因此 A 的最一般形式为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A^0_1 & A^0_2 & A^0_3 \\ A^0_1 & 0 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^0_2 & -A^1_2 & 0 & A^2_3 \\ A^0_3 & -A^1_3 & -A^2_3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{O}(1,3), \tag{G-9-23}$$

把 A^0_i 和 A^i_j 分别改记为 b^0_i 和 r^i_j, 则

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b^0_1 & b^0_2 & b^0_3 \\ b^0_1 & 0 & r^1_2 & r^1_3 \\ b^0_2 & -r^1_2 & 0 & r^2_3 \\ b^0_3 & -r^1_3 & -r^2_3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{O}(1,3), \tag{G-9-24}$$

其中的 $\begin{bmatrix} 0 & r^1_2 & r^1_3 \\ -r^1_2 & 0 & r^2_3 \\ -r^1_3 & -r^2_3 & 0 \end{bmatrix}$, 作为 3×3 反称矩阵, 是 $\mathscr{O}(3)$ 的元素. 以 $\mathscr{R}$ 代表形如

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^1_2 & r^1_3 \\ 0 & -r^1_2 & 0 & r^2_3 \\ 0 & -r^1_3 & -r^2_3 & 0 \end{bmatrix}$$

的 4×4 矩阵的集合, $\mathscr{B}$ 代表形如

$$\begin{bmatrix} 0 & b^0_1 & b^0_2 & b^0_3 \\ b^0_1 & 0 & 0 & 0 \\ b^0_2 & 0 & 0 & 0 \\ b^0_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

的 4×4 矩阵的集合, 则 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是 $\mathscr{O}(1,3)$ 的 3 维子空间, $\mathscr{R}$ 的任一元素都是反称矩阵, $\mathscr{B}$ 的任一元素都是对称矩阵. 式(G-6-7) 和(G-6-8) 的矩阵 r_1, r_2, r_3 和 b_1, b_2, b_3 分别构成 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{B}$ 的一组基矢. 由(G-6-9) 第一式可知 $\mathscr{R}$ 还是 $\mathscr{O}(1,3)$ 的 Lie 子代数, 而且与 $\mathscr{O}(3)$ 同构. 反之, (G-6-9) 第三式则表明子空间 $\mathscr{B} \subset \mathscr{O}(1,3)$ 不是子代数 (这与 WZ 不是子群密切相关).

定理 G-9-6

$\mathscr{R}$ 是 Lie 群 ZD 的 Lie 代数.

Pf　只须证明 $\forall r \in \mathscr{R}, \exists$ZD 中过 e 的曲线, 其在 e 的切矢为 r. $r \in \mathscr{R}$ 保证 r 可写成分块矩阵 $r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{r} \end{bmatrix}$, 其中 3×3 矩阵 $\hat{r} \in \mathscr{O}(3)$ [见式(G-9-24) 下一行]. $\forall t \in \mathbb{R}$, 容易

验证 $\mathrm{Exp}(tr)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{Exp}(t\hat{r})\end{bmatrix}$, 而 $\hat{r}\in\mathscr{O}(3)$ 则保证 $\mathrm{Exp}(t\hat{r})\in\mathrm{SO}(3)$, 故 $\mathrm{Exp}(tr)$ 可充当式(G-9-7) 中的 R, 因而 $\mathrm{Exp}(tr)\in\mathrm{ZD}$. 这 $\mathrm{Exp}(tr)$ 就是要找的曲线. □

定理 G-9-7

$R\in\mathrm{ZD}\Leftrightarrow\exists r\in\mathscr{R}$ 使 $R=\mathrm{Exp}(r)$.

Pf (A) (⇐ 的证明) 既然 $\mathscr{R}$ 是 Lie 群 ZD 的 Lie 代数且 $r\in\mathscr{R}$, 由指数映射定义自然有 $\mathrm{Exp}(r)\in\mathrm{ZD}$. (B) (⇒ 的证明) Lie 群 ZD 同构于 SO(3) 保证 ZD 是紧致的连通 Lie 群, 其上的指数映射是到上映射 (见 §G.5 注 4 末), 故每一 $R\in\mathrm{ZD}$ 都属于某一单参子群 [此结论也可用式(G-5-16) 后的 Euler 定理证明], 因而 $\exists r\in\mathscr{R}$ 使 $R=\mathrm{Exp}(r)$. □

另一方面, 虽然 $\mathrm{WZ}\subset L_+^\uparrow$ 不是子群, 它也满足与上述定理类似的定理:

定理 G-9-7′

$B\in\mathrm{WZ}\Leftrightarrow\exists b\in\mathscr{B}$ 使 $B=\mathrm{Exp}(b)$.

Pf 定理 G-9-1 表明 $B\in\mathrm{WZ}$ 等价于 $\exists R\in\mathrm{ZD}, B_x\in\mathrm{WZ}_x$ 使 $B=R^{-1}B_xR$. 而 B_x 是由 b_1 产生的单参子群的元素, 所以 $\exists v\in\mathbb{R}$ 使 $B_x=\mathrm{Exp}(vb_1)$, 从而 $B\in\mathrm{WZ}$ 又等价于

$$\exists R\in\mathrm{ZD}, v\in\mathbb{R}\text{ 使}B=R^{-1}(\mathrm{Exp}vb_1)R=\mathrm{Exp}(vR^{-1}b_1R),$$

其中第二步用到式(G-5-27). 令 $b=vR^{-1}b_1R$, 只须证明 $b\in\mathscr{B}$. 注意到 $R\in\mathrm{ZD}$ 的一般形式为式(G-9-7), 由矩阵运算容易验证

$$b=vR^{-1}b_1R=-v\begin{bmatrix}0 & R_1^1 & R_2^1 & R_3^1\\ R_1^1 & 0 & 0 & 0\\ R_2^1 & 0 & 0 & 0\\ R_3^1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\in\mathscr{B}.\qquad\square$$

注 4 因 $b\in\mathscr{B}$ 为对称矩阵, 由定理 G-9-7′ 可知任一 $B\in\mathrm{WZ}$ 都是对称矩阵. 然而, Λ 为对称矩阵加上 $\Lambda\in L_+^\uparrow$ 不保证 $\Lambda\in\mathrm{WZ}$, 例如 $\Lambda=\mathrm{diag}(1,1,-1,-1)\in L_+^\uparrow$, 但不是伪转动.

定理 G-9-8

$r\in\mathscr{R}\Leftrightarrow\exists R\in\mathrm{ZD}, v\in\mathbb{R}$ 使 $r=vR^{-1}r_3R$, 其中 r_3 由式(G-6-7) 定义.

注 5 ① r_3 是 Lie 代数元, R 和 R^{-1} 是群元, 它们的乘积有意义只是因为它们是矩阵. ② 把 r_3 改为 r_1 或 r_2, 定理仍成立.

Pf (A) (⇐ 的证明) $R\in\mathrm{ZD}$ 的一般形式为式(G-9-7), 由矩阵运算容易验证

$$r=vR^{-1}r_3R=v\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha & \beta\\ 0 & -\alpha & 0 & \sigma\\ 0 & -\beta & -\sigma & 0\end{bmatrix}\in\mathscr{R},$$

其中 $\alpha = R_2^1R_3^2 - R_3^1R_2^2, \beta \equiv R_3^1R_1^2 - R_1^1R_3^2, \sigma \equiv R_1^1R_2^2 - R_2^1R_1^2$. (B) ($\Rightarrow$ 的证明) $r \in \mathscr{R} \Rightarrow \exists v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ 使

$$r = v_1r_1 + v_2r_2 + v_3r_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v_3 & v_2 \\ 0 & v_3 & 0 & -v_1 \\ 0 & -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{G-9-25}$$

若 $v_1 = v_2 = 0$, 则 $r = v_3I^{-1}r_3I$, 命题自然成立, 故以下设 v_1, v_2 不全为零. 令 $v = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{1/2}$, 则有确定的 $\theta \in (0, \pi)$ 和 $\varphi \in [0, 2\pi)$ 使

$$v_1 = v\sin\theta\cos\varphi, \quad v_2 = v\sin\theta\sin\varphi, \quad v_3 = v\cos\theta. \tag{G-9-26}$$

令

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ 0 & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1}, \tag{G-9-27}$$

则容易验证 $R \in \mathrm{ZD}$. 再由矩阵乘法 (硬算) 便可验证 $r = vR^{-1}r_3R$. □

注 6 [选读] 用矩阵硬乘以验证 $r = vR^{-1}r_3R$ 的做法不存在理解上的任何困难, 但运算颇为烦琐. 下面介绍的验证方法不但形式优雅, 而且提供了一个活用 §G.8 的知识的好例子. 由式(G-9-27) 得

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix},$$

而由 §G.6 例 3 可知上式右边的两矩阵依次为 $\mathrm{Exp}(\varphi r_3)$ 和 $\mathrm{Exp}(\theta r_2)$, 故

$$R^{-1} = \mathrm{Exp}(\varphi r_3)\mathrm{Exp}(\theta r_2), \tag{G-9-28}$$

于是

$$\begin{aligned} R^{-1}r_3R = \mathscr{A}d_{R^{-1}}r_3 &= \mathscr{A}d_{\mathrm{Exp}(\varphi r_3)\mathrm{Exp}(\theta r_2)}r_3 = \mathscr{A}d_{\mathrm{Exp}(\varphi r_3)}(\mathscr{A}d_{\mathrm{Exp}(\theta r_2)}r_3) \\ &= \mathscr{A}d_{\mathrm{Exp}(\varphi r_3)}[\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_{\theta r_2})r_3] = \mathscr{A}d_{\mathrm{Exp}(\varphi r_3)}(r_3\cos\theta + r_1\sin\theta) \\ = \mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_{\varphi r_3})(r_3\cos\theta + r_1\sin\theta) &= (\cos\theta)\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_{\varphi r_3})r_3 + (\sin\theta)\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_{\varphi r_3})r_1 \\ = r_3\cos\theta + (r_1\cos\varphi + r_2\sin\varphi)\sin\theta &= v^{-1}(v_1r_1 + v_2r_2 + v_3r_3) = v^{-1}r, \end{aligned}$$

其中第一步用到习题 19; 第三步用到式(G-8-9); 第四、六步用到式(G-8-12); 第五、八步用到式(G-8-10), (G-8-13) 以及 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的级数展开式. 由定理 G-9-8 可知 $\mathscr{R}$ 的任一元素 r 可被化为最简元素 r_3. 下面的定理表明对 $\mathscr{B}$ 也有类似结论.

定理 G-9-8′

$b \in \mathscr{B} \Leftrightarrow \exists R \in \mathrm{ZD}, v \in \mathbb{R}$ 使 $b = vR^{-1}b_1R$, 其中 b_1 由式(G-6-8) 定义.

注 7 把 b_1 改为 b_2 或 b_3, 定理仍成立.

Pf (A) ($\Leftarrow$ 的证明) 已含于定理 G-9-7' 的证明中. (B) ($\Rightarrow$ 的证明) $b\in\mathscr{B}\Rightarrow\exists\beta_1,\beta_2,\beta_3\in\mathbb{R}$ 使

$$b=\beta_1 b_1+\beta_2 b_2+\beta_3 b_3=\begin{bmatrix}0&-\beta_1&-\beta_2&-\beta_3\\-\beta_1&0&0&0\\-\beta_2&0&0&0\\-\beta_3&0&0&0\end{bmatrix}. \tag{G-9-29}$$

当 $\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$ 时显然, 故以下 β_1,β_2,β_3 不全为零, 不妨设 $\beta_1\neq 0$. 令 $\mu=(\beta_1^2+\beta_2^2)^{1/2}, v=(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)^{1/2}$, 则 $\mu v\neq 0$. 容易验证

$$\frac{1}{\mu v}\begin{bmatrix}\mu\beta_1&\mu\beta_2&\mu\beta_3\\v\beta_2&-v\beta_1&0\\\beta_1\beta_3&\beta_2\beta_3&-\mu^2\end{bmatrix}\in \mathrm{SO}(3),$$

故

$$R=\frac{1}{\mu v}\begin{bmatrix}\mu v&0&0&0\\0&\mu\beta_1&\mu\beta_2&\mu\beta_3\\0&v\beta_2&-v\beta_1&0\\0&\beta_1\beta_3&\beta_2\beta_3&-\mu^2\end{bmatrix}\in \mathrm{ZD}. \tag{G-9-30}$$

由矩阵运算容易验证 $b=vR^{-1}b_1R$. □

定理 G-9-9

$\Lambda\in L_+^{\uparrow}\Rightarrow\exists R_1,R_2\in\mathrm{ZD}, v\in\mathbb{R}$ 使 $\Lambda=R_1(\mathrm{Exp}vb_1)R_2$.

Pf 由分解定理和定理 G-9-1 可知 $\exists R,\tilde{R}\in\mathrm{ZD}$ 使 $\Lambda=\tilde{R}^{-1}B_x\tilde{R}$. 因 B_x 是由 b_1 产生的单参子群的元素, 故 $\exists v\in\mathbb{R}$ 使 $B_x=\mathrm{Exp}(vb_1)$. 令 $R_1\equiv\tilde{R}^{-1}, R_2\equiv\tilde{R}R$, 便得待证式. □

G.9.3 用 Killing 矢量场讨论 Lorentz 代数

§G.7 例 3 已指出 Poincaré 群 P 的 Lie 代数 $\mathscr{P}$ 同构于 $(\mathbb{R}^4,\eta_{ab})$ 上全体 Killing 矢量场的集合 $\mathscr{K}$. 借用 Killing 矢量场可以获得对 Lie 代数 $\mathscr{O}(1,3)$ 的更为直观的理解. 式(G-7-9a)–(G-7-9c) 给出 $\mathscr{K}$ 的一组 (10 个) 基矢. 以 $\mathscr{K}_r$ 代表 $\mathscr{K}$ 的、由 6 个基矢 $\xi_{b_i},\xi_{r_i}(i=1,2,3)$ 生成的子空间, 则式(G-7-10) 的前 3 式表明 $\mathscr{K}_r$ 在 Lie 括号下封闭, 因此 $\mathscr{K}_r$ 还是 $\mathscr{K}$ 的 Lie 子代数. 用 $b_i\mapsto\xi_{b_i}, r_i\mapsto\xi_{r_i}$ 定义线性映射 $\psi:\mathscr{O}(1,3)\to\mathscr{K}_r$, 则 ψ 是 Lie 代数同构. 可见, 正如 $\mathscr{O}(1,3)$ 是 PoincaréLie 代数 $\mathscr{P}$ 的 Lie 子代数 (Lorentz 代数) 那样, $\mathscr{K}_r$ 也是 PoincaréLie 代数 $\mathscr{K}(=\mathscr{P})$ 的 Lie 子代数. 下面的定理给出映射 ψ 的一个非常有用的表达式.

定理 G-9-10

以 X 和 $\partial/\partial X$ 分别代表由惯性坐标系 $\{t,x,y,z\}$ 的 4 个坐标和 4 个坐标基矢分别排成的列矩阵, 则

$$\xi_{r_i}=-X^Tr_i^T\frac{\partial}{\partial X},\quad \xi_{b_i}=-X^Tb_i^T\frac{\partial}{\partial X},\quad i=1,2,3, \tag{G-9-31}$$

其中 X^T,r_i^T,b_i^T 依次是 X,r_i,b_i 的转置矩阵.

Pf　只给出第一式的证明 (其余五式证明仿此):

$$-X^Tr_1^T\frac{\partial}{\partial X}=-[t,x,y,z]\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial/\partial t\\\partial/\partial x\\\partial/\partial y\\\partial/\partial z\end{bmatrix}=-y\frac{\partial}{\partial z}+z\frac{\partial}{\partial y}=\xi_{r_1}.\qquad\square$$

选定惯性坐标系 $\{t,x,y,z\}$ 相当于选定 $\mathscr{K}$ 的一组基矢, 如式(G-7-9a)–(G-7-9c) 所示. 以 $\mathscr{K}_r$ 和 $\mathscr{K}_b$ 分别代表 $\mathscr{K}_r$ 中由 $\{\xi_{r_i}\}$ 和 $\{\xi_{b_i}\}$ 生成的子空间. $\mathscr{K}_r$ (或 $\mathscr{K}_b$) 的元素在 $\{t,x,y,z\}$ 系中一般不能表为式(G-7-9b) 或(G-7-9c) 的简单形式. 但下面的定理表明总可通过对空间坐标轴做适当转动使之变为那种简单形式 (乘以某一常数).

定理 G-9-11

设 $\mathscr{K}_r$ 由惯性坐标系 $X=\{t,x,y,z\}$ 定义, 则 $\forall\xi\in\mathscr{K}_r,\exists v\in\mathbb{R}$ 以及与 X 同属一个惯性参考系的惯性坐标系 $\tilde{X}=\{\tilde{t},\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\}$ 使

$$\xi=v\left(\tilde{y}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}-\tilde{x}\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\right). \tag{G-9-32}$$

Pf　$\xi\in\mathscr{K}_r\Rightarrow\exists\rho^1,\rho^2,\rho^3\in\mathbb{R}$ 使 $\xi=\rho^i\xi_{r_i}$, 故

$$\xi=-\rho^iX^Tr_i^T\frac{\partial}{\partial X}=X^T(\rho^ir_i)\frac{\partial}{\partial X}=X^T(vR^{-1}r_3R)\frac{\partial}{\partial X},\quad R\in\mathrm{ZD},v\in\mathbb{R},$$

其中第一步用到式(G-9-31), 第三步用到定理 G-9-8. 引入新惯性坐标系 $\tilde{X}=RX$, 则 $\tilde{X}^T=X^TR^{-1}$. 注意到两系坐标之间的变换矩阵等于坐标基矢之间的变换矩阵的转置之逆, 又有 $\partial/\partial\tilde{X}=R\partial/\partial X$, 于是

$$\xi=v(X^TR^{-1})r_3\left(R\frac{\partial}{\partial X}\right)=v\tilde{X}^Tr_3\frac{\partial}{\partial\tilde{X}}=v\tilde{\xi}_{r_3}=v\left(\tilde{y}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}-\tilde{x}\frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\right),$$

其中第三步用到式(G-9-31), 第四步用到式(G-7-9b). $\tilde{X}=RX$ 表明惯性坐标系 X 和 $\tilde{X}$ 同属一个惯性参考系. $\square$

对 $\xi\in\mathscr{K}_b$ 也有类似定理:

定理 G-9-11′

设 $\mathscr{K}_b$ 由惯性坐标系 $X=\{t,x,y,z\}$ 定义, 则 $\forall\xi\in\mathscr{K}_b,\exists v\in\mathbb{R}$ 以及与 X 同属一个惯性参考系的惯性坐标系 $\tilde{X}=\{\tilde{t},\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\}$ 使

$$\xi=v\left(\tilde{t}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}+\tilde{x}\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}\right). \tag{G-9-32′}$$

Pf　仿照定理 G-9-11 的证明, 留作练习. □

选读 G-9-1

本节至此仍感言犹未尽. 以下内容是笔者与部分同仁的讨论结果, 并未找到文献依据, 权作引玉之砖. 既然 $\mathscr{K}_r$ 和 $\mathscr{K}_b$ 都是借用惯性坐标系 X 定义的, 自然要问它们是否依赖于所用的坐标系, 即, 设 X' 是与 X 不同的惯性坐标系, 用 X' 定义的 $\mathscr{K}_b'$ (和 $\mathscr{K}_r'$) 是否等于 $\mathscr{K}_b$ (和 $\mathscr{K}_r$)?[a]

定理 G-9-12

设惯性坐标系 X 与 X' 的关系为 $X'=\Lambda X,\Lambda\in L_+^\uparrow$, 则

$$\mathscr{K}_r'=\mathscr{K}_r\Leftrightarrow\Lambda=R\in\mathrm{ZD}.$$

Pf　(A) ($\Leftarrow$ 的证明) 已知 $X'=RX$, 欲证 $\mathscr{K}_r'=\mathscr{K}_r$. 由于 X' 系与 X 系平权, 只须证明 $\mathscr{K}_r'$ 的 3 个基矢 $\xi'_{r_i}\in\mathscr{K}_r'(i=1,2,3)$ 都属于 $\mathscr{K}_r$. 由 $X'=RX$ 得 $X'^T=X^TR^{-1},\partial/\partial X'=R\partial/\partial X$, 故由式(G-9-31) 得

$$\xi'_{r_i}=X'^Tr_i\frac{\partial}{\partial X'}=X^TR^{-1}r_iR\frac{\partial}{\partial X}=X^T(\rho_i^jr_j)\frac{\partial}{\partial X}=\rho_i^j\xi_{r_j}\in\mathscr{K}_r,$$

其中 $\rho_i^j(j=1,2,3)$ 为常数, 第三步是因为定理 G-9-8 保证 $R^{-1}r_iR\in\mathscr{R}$.[b] 下面既涉及 Lie 代数 $\mathscr{R}$ 又涉及惯性参考系 $\mathscr{R}$, 为避免由相同记号可能带来的混淆, 我们暂时改用 $\mathscr{R}_l$ 代表惯性参考系, 下标 l 可看作 Inertial 的缩写. (B) ($\Rightarrow$ 的证明) 设 $\Lambda\in\mathrm{ZD}$, 则坐标系 X 与 X' 属于两个不同的惯性参考系 $\mathscr{R}_l$ 和 $\mathscr{R}_l'$. 每一 $\xi\in\mathscr{K}_r$ (作为矢量场) 的积分曲线都躺在 $\mathscr{R}_l$ 系的同时面上, 而 $\mathscr{R}_l'$ 系与 $\mathscr{R}_l$ 系有不同的同时面, 故有 $\xi\in\mathscr{K}_r$ 使 $\xi\notin\mathscr{K}_r'$. □

定理 G-9-12′

设惯性坐标系 X 与 X' 的关系为 $X'=\Lambda X,\Lambda\in L_+^\uparrow$, 则

$$\mathscr{K}_b'=\mathscr{K}_b\Leftrightarrow\Lambda=R\in\mathrm{ZD}.$$

Pf　(A) ($\Leftarrow$ 的证明) 与定理 G-9-12 的证明 (A) 类似. (B) ($\Rightarrow$ 的证明) 注意到定理 G-9-12, 只须证明 $\mathscr{K}_b'=\mathscr{K}_b\Rightarrow\mathscr{K}_r'=\mathscr{K}_r$. $\mathscr{K}_b'=\mathscr{K}_b$ 保证 $\xi'_{b_i}=S_j^i\xi_{b_j}$, 其中常数 S_j^i 排成的矩阵有逆, 故其行列式 $S\neq0$. 利用行列式公式

$$\varepsilon_{ijk}S_i^{i'}S_j^{j'}S_k^{k'}=S\varepsilon_{i'j'k'} \tag{G-9-33}$$

不难导出

$$\varepsilon_{ijk}S_i^{i'}S_j^{j'}S_k^{k'}=S\varepsilon_{i'j'k'}(S^{-1})_j^{j'}. \tag{G-9-34}$$

另一方面, 由式(G-7-10) 第三式可得 $\xi'_{r_i}=-\varepsilon_i^{jk}[\xi'_{b_j},\xi'_{b_k}]/2$, 故

$$\xi'_{r_i}=-\frac{1}{2}\varepsilon_i^{jk}[\xi'_{b_j},\xi'_{b_k}]=-\frac{1}{2}\varepsilon_i^{jk}S_j^lS_k^m[\xi_{b_l},\xi_{b_m}]=\frac{1}{2}\varepsilon_i^{jk}S_j^lS_k^m\varepsilon_{lm}^n\xi_{r_n} \tag{G.9.1}$$

$$=\frac{1}{2}\eta_{ll'}\varepsilon^{l'jk}S_j^lS_k^m\varepsilon_{nl'm}\eta^{nn'}\xi_{r_n}=\frac{1}{2}\eta_{ll'}\varepsilon^{l'jk}S\varepsilon_{jkm}(S^{-1})_l^n\eta^{nn'}\xi_{r_n}=S(S^{-1})_i^n\xi_{r_n}, \tag{G.9.2}$$

[其中第二步用到 $\xi'_{b_i}=S_j^i\xi_{b_j}$, 第三步用到式(G-7-10), 第五步用到式(G-9-34), 最右端的 $(S^{-1})_i^n$ 是 $\eta_{ll}(S^{-1})_{l'}^n\eta^{nn'}$ 的简写.] 可见 $\xi'_{r_i}\in\mathscr{K}_r$, 因而 $\mathscr{K}'_r=\mathscr{K}_r$. □

以上两个定理表明 $\mathscr{K}_b$ (和 $\mathscr{K}_r$) 是惯性参考系依赖的. 虽然对不同惯性参考系 $\mathscr{R}_l$ 和 $\mathscr{R}'_l$ 有 $\mathscr{K}_b\neq\mathscr{K}'_b$ (及 $\mathscr{K}_r\neq\mathscr{K}'_r$), 但不难证明 $\mathscr{K}'_b\cap\mathscr{K}_b\neq\emptyset$. 设 $\boldsymbol{V}$ 是 $\mathscr{R}'_l$ 相对于 $\mathscr{R}_l$ 的 3 速度, 则 $\mathscr{R}_l$ 和 $\mathscr{R}'_l$ 系内各有惯性坐标系 X 和 X', 它们的 x 轴都与 $\boldsymbol{V}$ 平行 (因而 $X'=B_xX$). 于是

$$\xi'_b=-X'^Tb_1\frac{\partial}{\partial X'}=-(X^TB_x)b_1\left(B_x^{-1}\frac{\partial}{\partial X}\right)=-X^Tb_1\frac{\partial}{\partial X}=\xi_b,$$

[其中第一、四步用到式(G-9-31), 第二步用到 $X'^T=X^TB_x^T=X^TB_x$ 及 $\partial/\partial X'=B_x^{-1}\partial/\partial X$, 第三步用到 $B_xb_1B_x^{-1}=b_1$ (用矩阵乘法易证).] 上式表明 $\mathscr{K}'_b\cap\mathscr{K}_b$ 至少含有由 ξ_b 生成的 1 维子空间. 还可证明 $\mathscr{K}'_b\cap\mathscr{K}_b$ 等于这个子空间 (参见本选读末的注 8). 类似地, $\mathscr{K}'_r\cap\mathscr{K}_r$ 等于由 ξ_{r_1} 生成的 1 维子空间. 事实上, 这一结论比关于 $\mathscr{K}'_b\cap\mathscr{K}_b$ 的上述结论更易证明 [只须仿照定理 G-9-12 证明 (B) 的思路]. $\mathscr{K}_b$ (和 $\mathscr{K}_r$) 的惯性参考系依赖性使得 "伪转动 (转动) Killing 矢量场" 一词存在含糊性. 原则上至少存在如下两种定义:

定义 1

给定惯性坐标系 X 后, $\xi\in\mathscr{K}$ 叫伪转动 (或转动) Killing 矢量场, 若 $\xi\in\mathscr{K}_b$ (或 $\xi\in\mathscr{K}_r$).

定义 2

$\xi\in\mathscr{K}$ 叫伪转动 (或转动) Killing 矢量场, 若存在惯性坐标系 X 和 $v\in\mathbb{R}$ 使

$$\xi=v[t(\partial/\partial x)+x(\partial/\partial t)]\ (\text{或}\xi=v[-y(\partial/\partial x)+x(\partial/\partial y)]).$$

以 $\bigcup\mathscr{K}_b$ (或 $\bigcup\mathscr{K}_r$) 代表所有惯性参考系的 $\mathscr{K}_b$ (或 $\mathscr{K}_r$) 之并, 则也可说 $\xi\in\mathscr{K}$ 叫伪转动 (或转动) Killing 矢量场当且仅当 $\xi\in\bigcup\mathscr{K}_b$ (或 $\xi\in\bigcup\mathscr{K}_r$). 根据定义 1, 伪转动 (转动) Killing 矢量场是惯性参考系依赖的, 只能谈及 "某惯性参考系的伪转动 (转动) Killing 矢量场", 这可看作一个缺点. 定义 2 的缺点则在于 $\bigcup\mathscr{K}_b$ 和 $\bigcup\mathscr{K}_r$ 不是 $\mathscr{K}$ 的子空间 (因而有些不伦不类). 当然, 重要的不在于选用哪个定义, 而在于知道存在不同定义的可能性, 从而在使用该词时做到前后统一. 为帮助读者了解 $\bigcup\mathscr{K}_b$ 和 $\bigcup\mathscr{K}_r$ 的关系, 我们证明两个最基本的结论:

定理 G-9-13

$(\bigcup\mathscr{K}_b)\cap(\bigcup\mathscr{K}_r)=\{0\}\subset\mathscr{K}$.

Pf　设 $\xi_b \in \bigcup \mathscr{K}_b$, 则存在惯性坐标系 X 和 $v \in \mathbb{R}$ 使

$$\xi_b = v[t(\partial/\partial x) + x(\partial/\partial t)] \text{ (用到} \bigcup \mathscr{K}_b \text{ 的定义和定理 G-9-11')},$$

可见当 $v \neq 0$ 时 ξ_b 是这样的矢量场, 它在 $\mathbb{R}^4$ 的某些点类时, 某些点类空, 某些点类光. 设 $\xi_r \in \bigcup \mathscr{K}_r$, 则存在惯性坐标系 X 和 $v \in \mathbb{R}$ 使

$$\xi_r = v[-y(\partial/\partial x) + x(\partial/\partial y)],$$

可见当 $v \neq 0$ 时 ξ_b 在 $\mathbb{R}^4$ 上类空 (在个别点上为零). 这表明任何坐标变换不能把 $\xi_b \in \bigcup \mathscr{K}_b$ 变为 $\xi_r \in \bigcup \mathscr{K}_r$, 除非 $\xi_b = 0$. □

定理 G-9-14

$(\bigcup \mathscr{K}_b) \cup (\bigcup \mathscr{K}_r) \neq \mathscr{K}$.

Pf　只须找到一个 $\xi \in \mathscr{K}$ 满足 $\xi \notin \bigcup \mathscr{K}_b, \xi \notin \bigcup \mathscr{K}_r$. 设 X 是惯性坐标系, 我们证明

$$\xi = t\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t} - y\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial y} \tag{G-9-35}$$

满足这些要求. 不难看出 ξ 在 $\mathbb{R}^4$ 的某些点类光, 这些点的坐标 t, x, y, z 满足方程

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0. \tag{G-9-36}$$

这已说明 $\xi \notin \bigcup \mathscr{K}_r$. 另一方面, $\forall \xi_b \in \bigcup \mathscr{K}_b$ 有惯性坐标系 $\tilde{X}$ 使 $\xi_b = v[\tilde{t}(\partial/\partial \tilde{x}) + \tilde{x}(\partial/\partial \tilde{t})]$, 所以使 ξ_b 类光的点的坐标 $\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ 满足方程

$$\tilde{t}^2 - \tilde{x}^2 = 0. \tag{G-9-37}$$

以 N 和 $\tilde{N}$ 分别代表 $\mathbb{R}^4$ 中满足式(G-9-36) 和(G-9-37) 的两个子集, 则从拓扑角度可知任何 Lorentz 坐标变换都不能把 N 变为 $\tilde{N}$, 所以 $\xi \notin \bigcup \mathscr{K}_b$. □

注 8 周彬在一篇尚未发表的论文中还证明了如下更强的结论: 设 $\xi \in \mathscr{K}$ (借任意惯性坐标系 X 定义) 在基底 $\{\xi_{r_i}, \xi_{b_i}\}$ 的展开系数为 ρ^i, β^i, 即

$$\xi = \rho^i \xi_{r_i} + \beta^i \xi_{b_i},$$

则

$$\xi \in \bigcup \mathscr{K}_r \Leftrightarrow (a) \sum_i (\rho^i)^2 > \sum_i (\beta^i)^2 \text{ 或} \rho^i = \beta^i = 0; \quad (b) \sum_i \rho^i \beta^i = 0, \tag{G-9-38a}$$

$$\xi \in \bigcup \mathscr{K}_b \Leftrightarrow (a) \sum_i (\rho^i)^2 < \sum_i (\beta^i)^2 \text{ 或} \rho^i = \beta^i = 0; \quad (b) \sum_i \rho^i \beta^i = 0. \tag{G-9-38b}$$

不难看出定理 G-9-13 和 G-9-12 其实不过是上式的简单应用. 利用该论文的方法还可以从 "$\mathscr{K}_r' \cap \mathscr{K}_r$ 等于由 ξ_{r_1} 生成的 1 维子空间" 出发证明 "$\mathscr{K}_b' \cap \mathscr{K}_b$ 等于由 ξ_{b_1} 生成的 1 维子空间" 的结论.

---

[a] 如果两系 X, X' 原点不同, 则由 X 和 X' 在 $\mathscr{P}$ 中挑出的 $\mathscr{K}_b$ 和 $\mathscr{K}_b'$ 不同 (但同构). 以下限定所有坐标系的原点都相同.

[b] 还可证明 $R^{-1} r_i R = \rho_i^j r_j$. 取如下具体形式: $R^{-1} r_3 R = (R^{-1})^i{}_j r_i$. 这同如下结论有密切联系: SO(3) 的矩阵在伴随表示下的矩阵正是它自身.

G.9.4 Lorentz 群的应用——Thomas 进动 [选读]

电子自旋的引入曾对原子物理学的早期研究起过重要作用, 也曾遇到过一个困难.[3] Thomas 于 1927 年指出, 困难起因于没有考虑自旋角动量的一个相对论运动学效应, 考虑后困难就可克服 (见原子物理学教材). 这一效应后来被称为 Thomas 进动 (Thomas precession), 有若干有趣的物理应用. 本选读从费移和群论两个角度讨论 Thomas 进动的数学机制.

设 $X=\{t,x,y,z\}$ 是 Minkowski 时空的一个惯性坐标系 (实验室系), 在绕 z 轴匀角速转动的圆盘边上放置一个回转仪, 其轴 (看作单位矢量 w^a) 自然代表无 (空间) 转动的方向 (详见 §7.3). 以 $G(\tau)$ 代表回转仪 (看作质点) 的世界线, 则 w^a 沿 $G(\tau)$ 费移. 设 w^a 在 $\tau=0$ 时与 x 轴同向, 回转仪在 $\tau=\tilde{\tau}$ 时又回到 $\tau=0$ 的空间位置 (指实验室系的空间, 见图 10), 问: w^a 在 $\tau=\tilde{\tau}$ 时还与 x 轴同向吗? 因为费移代表无空间转动, 答案似乎是肯定的. 然而 Thomas 的答案却是不同向, 这就是 Thomas 进动.

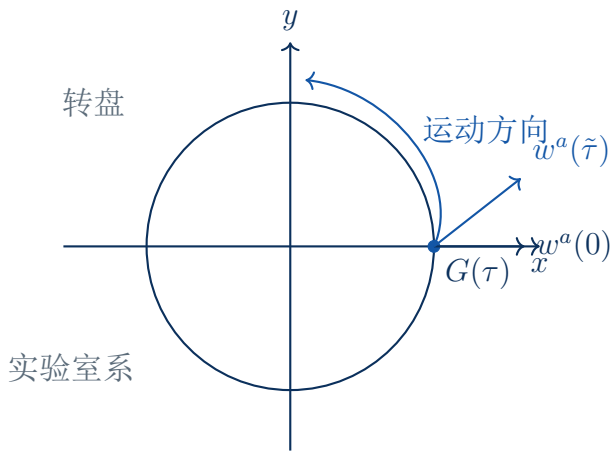


图 10: Thomas 进动的实验安排 (俯视). 回转仪沿圆盘边缘作圆周运动, 在 $\tau=0$ 时位于 x 轴上且其轴 $w^a(0)$ 与 x 轴同向; 在 $\tau=\tilde{\tau}$ 时回到同一空间位置, 但其轴 $w^a(\tilde{\tau})$ 已相对 x 轴转过一个 Thomas 角 (图中放大示意).

图 11 是与图 10 相应的时空图, 其中竖直线代表 X 系的 t 坐标线, 螺旋线代表回转仪的世界线 $G(\tau)$. 令 $p_0=G(0),\tilde{p}=G(\tilde{\tau})$. 既然 $\{t,x,y,z\}$ 是惯性坐标系, 其坐标基矢自然是平移矢量场 (Minkowski 时空有绝对平移概念), 因而 $(\partial/\partial x)^a|_{\tilde{p}}$ 平行于 $(\partial/\partial x)^a|_{p_0}$, 也可认为 $(\partial/\partial x)^a|_{\tilde{p}}$ 是 $(\partial/\partial x)^a|_{p_0}$ 沿 $G(\tau)$ 平移至 $\tilde{p}$ 点的结果. 又因 $w^a|_{p_0}=(\partial/\partial x)^a|_{p_0}$, 若 w^a 也沿 $G(\tau)$ 平移, 则 $w^a|_{\tilde{p}}=(\partial/\partial x)^a|_{\tilde{p}}$. 然而事实上 w^a 沿 $G(\tau)$ 费移, 而对非测地线而言 $D_\tau/\mathrm{d}\tau\neq D/\mathrm{d}\tau$, 所以我们猜想 $w^a|_{\tilde{p}}\neq(\partial/\partial x)^a|_{\tilde{p}}$ [两者都是 $G(\tau)$ 在 $\tilde{p}$ 点的空间单位矢量, 但空间方向不同]. 不过仔细想来也并非如此简单, 因为能肯定的只是 w^a 和 $(\partial/\partial x)^a$ 是 $G(\tau)$ 上两个不等的矢量场, 由它们在 p_0 点相等尚难断定它们在 $\tilde{p}$ 点一定不等. 如果把 $G(\tau)$ 分成许多小段并逐段讨论, 则又因为 w^a 是 $G(\tau)$ 上的空间矢量场而 $(\partial/\partial x)^a$ 不是, 要在一点上判断它们是否同向也有待仔细讨论. 为了获取明确结论并求得 Thomas 进动的定量结果, 我们借助于计算.

回转仪世界线在实验室系 $\{t,x,y,z\}$ 的参数式为

$$t=\gamma\tau,\quad x=R\cos\omega\gamma\tau,\quad y=R\sin\omega\gamma\tau,\quad z=0, \tag{G-9-39}$$

[3]用于原子物理时, $G(\tau)$ 是绕核转动的电子的世界线, w^a 是与其自旋角动量同向的单位矢量, 因库仑力无力矩而沿世界线费移.

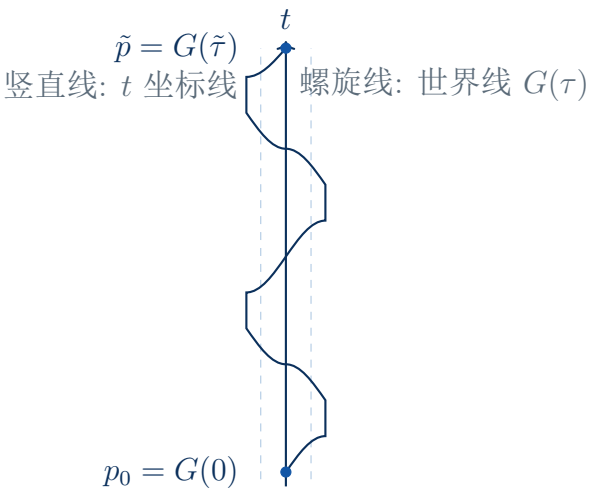


图 11: 与图 10 相应的时空图 (示意). 竖直线代表 X 系的 t 坐标线, 螺旋线代表回转仪的世界线 $G(\tau)$; 回转仪沿圆周运动一圈后回到同一空间位置, 故螺旋线在 $\tilde{p}=G(\tilde{\tau})$ 处的空间坐标与 $p_0=G(0)$ 相同.

其中 R 与 ω 分别为转盘半径和角速率, $\gamma=(1-\omega^2R^2)^{-1/2}$. 回转仪 4 速 $Z^a=(\partial/\partial\tau)^a$ 的坐标分量为

$$Z^\mu(\tau)=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}=(\gamma,-R\omega\gamma\sin\omega\gamma\tau,R\omega\gamma\cos\omega\gamma\tau,0), \tag{G-9-40}$$

其 4 加速 $A^a=Z^b\partial_bZ^a$ 的坐标分量为

$$A^\mu(\tau)=\frac{\mathrm{d}Z^\mu}{\mathrm{d}\tau}=(0,-R\omega^2\gamma^2\cos\omega\gamma\tau,-R\omega^2\gamma^2\sin\omega\gamma\tau,0), \tag{G-9-41}$$

于是由 w^a 沿 $G(\tau)$ 费移得

$$0=\frac{D_\tau w^a}{\mathrm{d}\tau}=\frac{Dw^a}{\mathrm{d}\tau}+(A^aZ^b-A^bZ^a)w_b=\frac{Dw^a}{\mathrm{d}\tau}+Z^aR\omega^2\gamma^2(w_1\cos\omega\gamma\tau+w_2\sin\omega\gamma\tau),$$

其中 w_1 和 w_2 是 w_b 的坐标分量. 由此可得微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}w^0}{\mathrm{d}\tau}=-R\omega^2\gamma^3(w_1\cos\omega\gamma\tau+w_2\sin\omega\gamma\tau), \tag{G-9-42a}$$

$$\frac{\mathrm{d}w^1}{\mathrm{d}\tau}=R^2\omega^3\gamma^3\sin\omega\gamma\tau(w_1\cos\omega\gamma\tau+w_2\sin\omega\gamma\tau), \tag{G-9-42b}$$

$$\frac{\mathrm{d}w^2}{\mathrm{d}\tau}=-R^2\omega^3\gamma^3\cos\omega\gamma\tau(w_1\cos\omega\gamma\tau+w_2\sin\omega\gamma\tau), \tag{G-9-42c}$$

$$\frac{\mathrm{d}w^3}{\mathrm{d}\tau}=0. \tag{G-9-42d}$$

上列常微分方程组在初始条件 $w^1(0)=1,w^0(0)=w^2(0)=w^3(0)=0$ 下的解为 (改用实验室系的时间坐标 t 为自变量)[4]

$$w^0(t)=-R\omega\gamma\sin\omega t, \tag{G-9-43a}$$

[4]作为 $G(\tau)$ 上的场, $w^a(\tau)$ 天生是 τ 的函数. 在 $G(\tau)$ 上有 $t=\gamma\tau$, 故 w^a 又可看作 t 的函数. 但 w^a 作为 τ 的函数和作为 t 的函数有不同函数关系. 把 $w^a(\tau)$ 中的 w^a 当作函数关系, 则前面写 $w^a(t)$ [如式(G-9-43a)–(G-9-43d)] 是马虎的. 现在为清晰起见写成 $w^a(\gamma^{-1}t)$.

$$w^1(t)=\cos\omega t\cos\omega\gamma t+\gamma\sin\omega t\sin\omega\gamma t, \tag{G-9-43b}$$

$$w^2(t)=\sin\omega t\cos\omega\gamma t+\gamma\cos\omega t\sin\omega\gamma t, \tag{G-9-43c}$$

$$w^3(t)=0. \tag{G-9-43d}$$

$w^0(t)$ 的存在是为保证 $w^a(t)$ 是 $G(\tau)$ 上的空间矢量, 它使讨论变得复杂. 为消除 $w^0(t)$ 并清晰地看出 $w^a(t)$ 的转动情况, 可改用特定的瞬时静止惯性坐标系 $\bar X$ 代替实验室系 X 看问题. 设 p' 是 $G(\tau)$ 上任一点, 回转仪在 p' 时相对于 X 系的 3 速为 $\bar{\boldsymbol v}$, 则定义 p' 点的 $\bar X$ 系为 $\bar X=B(\bar{\boldsymbol v})X$. 我们关心的是 X 系观测到的 w^a 的空间方向的变化, 而伪转动 "保持" 空间坐标轴的方向, 所以 $\bar X$ 系可看作 X 系 "派驻在 p' 点的代表". $w^a(t)$ 在 $\bar X, X$ 系的分量 $\bar w^\mu(t), w^\mu(t)$ 的关系为

$$\bar w^\mu(t)=B^\mu_{\ \nu}(\bar{\boldsymbol v})w^\nu(t), \tag{G-9-44}$$

利用矩阵 $B(\bar{\boldsymbol v})$ 的式(G-9-5′) 便可从 $w^\nu(t)$ 的表达式(G-9-43a)– (G-9-43d) 求得 (习题) $\bar w^\mu(t)$ 的如下表达式:

$$\bar w^0(t)=\bar w^3(t)=0,\quad \bar w^1(t)=\cos[(\gamma-1)\omega t],\quad \bar w^2(t)=-\sin[(\gamma-1)\omega t]. \tag{G-9-45}$$

因此

$$w^a(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a\cos[(\gamma-1)\omega t]-\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a\sin[(\gamma-1)\omega t]. \tag{G-9-46}$$

上式有非常简明的物理意义: 由实验室系 (派驻在 p' 的代表 $\bar X$) 看来, $w^a(t)$ 是一个转动着的空间矢量, 这种转动就是著名的 Thomas 进动 (Thomas precession). 上式还表明实验室系 X 测得的 Thomas 进动角速度为

$$\boldsymbol\omega_{\rm T}=-\omega_T\boldsymbol e_z,\quad \text{其中}\boldsymbol e_z\equiv(\partial/\partial z)^a,\quad \omega_T\equiv(\gamma-1)\omega. \tag{G-9-47}$$

问题至此已经解决, 但再从群论角度深入探讨将很有裨益. 从群论看来, Thomas 进动实质上是速度方向不同的伪转动之积不是伪转动 (WZ 不是子群) 的表现. 先说明 w^a 沿 $G(\tau)$ 费移可看作无限多个无限小的、速度方向不同的伪转动之积. 设 $\{(e_\mu)^a\}$ 是 $G(\tau)$ 上的正交归一费移 4 标架场, 满足

$$(e_0)^a|_{p_0}=Z^a|_{p_0},\quad (e_1)^a|_{p_0}=w^a|_{p_0}.$$

这一标架场使 $G(\tau)$ 的每点 p' 都伴有一个瞬时静止惯性坐标系 $X'\equiv\{t',x',y',z'\}$, 其原点与实验室系 X 的原点重合, 其在每点 p' 的坐标基矢 $(\partial/\partial x'^\mu)^a|_{p'}=(e_\mu)^a|_{p'}$, 特别地有 (见图 12)

$$(\partial/\partial x'^1)^a|_{p'}=(e_1)^a|_{p'}=w^a|_{p'}.$$

下面证明 $G(\tau)$ 线上任意两个 (无限邻近的) 邻点 p' 和 p'' 的上述瞬时静止惯性坐标系 X' 和 X'' 之间的关系是一个伪转动. $(e_\mu)^a$ 沿 $G(\tau)$ 费移等价于

$$0=\frac{D_F(e_\mu)^a}{\mathrm d\tau}=\frac{D(e_\mu)^a}{\mathrm d\tau}+(A^aZ^b-Z^aA^b)(e_\mu)_b,$$

即

$$\frac{D(e_\mu)^a}{\mathrm d\tau}=-(A^aZ^b-Z^aA^b)(e_\mu)_b. \tag{G-9-48}$$

设 $p'\equiv G(\tau'), p''\equiv G(\tau'')$, 由式 (3-2-14) 可知在 $\Delta\tau\equiv\tau''-\tau'$ 很小时有

$$\frac{(\bar e_\mu)^a|_{p''}-(e_\mu)^a|_{p'}}{\Delta\tau}\cong\left.\frac{D(e_\mu)^a}{\mathrm d\tau}\right|_{p'}=-[(A^aZ^b-Z^aA^b)(e_\mu)_b]|_{p'}, \tag{G-9-49}$$

[第二步用到式(G-9-48).] 其中 $(\bar{e}_\mu)^a|_{p''}$ 是把 $(e_\mu)^a|_{p'}$ 平移至 p'' 点的结果. 由上式又得

$$(\bar{e}_\mu)^a|_{p''} \cong (e_\mu)^a|_{p'} + [(Z^a A^b - A^a Z^b)(e_\mu)_b]|_{p'}\Delta\tau. \tag{G-9-50}$$

因为 $(e_\mu)^a|_{p'}$ 是 p' 点的瞬时静止惯性坐标系 X' 的坐标基矢场 $(\partial/\partial x'^\mu)^a$ 在 p' 点的值, 即 $(e_\mu)^a|_{p'} = (\partial/\partial x'^\mu)^a|_{p'}$, 而 $(\bar{e}_\mu)^a|_{p''}$ 则是 p'' 点的瞬时静止惯性坐标系 X'' 的坐标基矢场 $(\partial/\partial x''^\mu)^a$ 在 p'' 点的值, 所以式(G-9-50) 可表为

$$\left(\frac{\partial}{\partial x''^\mu}\right)^a\bigg|_{p''} \cong \left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)^a\bigg|_{p'} + \left[(Z^a A^b - A^a Z^b)\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\right)_b\right]\bigg|_{p'}\Delta\tau. \tag{G-9-51}$$

于是

$$\left(\frac{\partial}{\partial t''}\right)^a\bigg|_{p''} \cong \left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^a\bigg|_{p'} + A'^i\left(\frac{\partial}{\partial x'^i}\right)^a\bigg|_{p'}\Delta\tau, \quad [A'^i \text{ 是} A^a \text{ 在} (\partial/\partial x'^i)^a \text{ 的分量}]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'^i}\right)^a\bigg|_{p''} \cong \left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^a\bigg|_{p'} A'^i\Delta\tau + \left(\frac{\partial}{\partial x'^i}\right)^a\bigg|_{p'}, \quad i = 1,2,3,$$

可见 p' 和 p'' 的瞬时静止惯性坐标系 X' 和 X'' 的坐标基矢之间的变换关系为

$$\begin{bmatrix} (\partial/\partial t'')^a \\ (\partial/\partial x''^1)^a \\ (\partial/\partial x''^2)^a \\ (\partial/\partial x''^3)^a \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & A'^1\Delta\tau & A'^2\Delta\tau & A'^3\Delta\tau \\ A'^1\Delta\tau & 1 & 0 & 0 \\ A'^2\Delta\tau & 0 & 1 & 0 \\ A'^3\Delta\tau & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\partial/\partial t')^a \\ (\partial/\partial x'^1)^a \\ (\partial/\partial x'^2)^a \\ (\partial/\partial x'^3)^a \end{bmatrix}. \tag{G-9-52}$$

上式只对无限小的 $\Delta\tau$ 才准确成立. 以 F 代表上式右边的 4×4 矩阵. 因为两系坐标之间的变换矩阵等于坐标基矢之间的变换矩阵的转置之道, 所以 p' 和 p'' 的瞬时静止惯性坐标系 $X' \equiv \{t', x', y', z'\}$ 和 $X'' \equiv \{t'', x'', y'', z''\}$ 之间的关系为

$$X'' = F^{-1}X'. \tag{G-9-53}$$

不难验证, 在略去 $\Delta\tau^2$ 后有

$$F^{-1} \cong \begin{bmatrix} 1 & -A'^1\Delta\tau & -A'^2\Delta\tau & -A'^3\Delta\tau \\ -A'^1\Delta\tau & 1 & 0 & 0 \\ -A'^2\Delta\tau & 0 & 1 & 0 \\ -A'^3\Delta\tau & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{G-9-54}$$

根据命题 6-3-6, 回转仪在 p' 时刻的 4 加速 A^a 等于它相对于 X' 系的 3 加速, 故 $A'^i\Delta\tau$ 在一阶近似下等于 X'' 系相对于 X' 系的 3 速 (记作 $\Delta\boldsymbol{v}$) 的 i 分量 $(\Delta\boldsymbol{v})^i$ (当 p'' 无限接近 p' 时 $\Delta\tau \cong \Delta t'$). 由式(G-9-5) 可知在只保留 $|\Delta\boldsymbol{v}|$ 的一阶项时有

$$B(\Delta\boldsymbol{v}) \cong \begin{bmatrix} 1 & -(\Delta\boldsymbol{v})^1 & -(\Delta\boldsymbol{v})^2 & -(\Delta\boldsymbol{v})^3 \\ -(\Delta\boldsymbol{v})^1 & 1 & 0 & 0 \\ -(\Delta\boldsymbol{v})^2 & 0 & 1 & 0 \\ -(\Delta\boldsymbol{v})^3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cong F^{-1}. \tag{G-9-55}$$

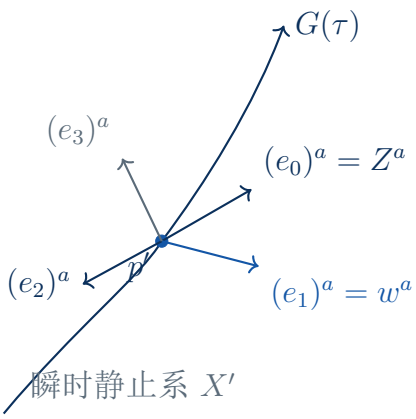


图 12: 瞬时静止惯性坐标系. 沿世界线 $G(\tau)$ 的费移正交归一 4 标架场 $\{(e_\mu)^a\}$ 使每点 p' 伴有一个瞬时静止惯性坐标系 X', 其坐标基矢 $(\partial/\partial x'^\mu)^a|_{p'} = (e_\mu)^a|_{p'}$, 特别地 $(\partial/\partial x'^1)^a|_{p'} = (e_1)^a|_{p'} = w^a|_{p'}$; $(e_0)^a$ 沿世界线切向, $(e_2)^a, (e_3)^a$ 张成横向空间.

所以

$$X'' \cong B(\Delta\boldsymbol{v})X'. \tag{G-9-53$'$}$$

可见 $G(\tau)$ 在任意两个 (无限邻近的) 邻点的瞬时静止惯性坐标系由一个无限小伪转动相联系, 费移可看作无限多个无限小伪转动的相继作用.

为了从群论角度求得实验室系 $X \equiv \{t, x, y, z\}$ 测得的 Thomas 进动角速度, 有必要在 p' 和 p'' 的瞬时静止惯性参考系内分别再选定一个特别的惯性坐标系, 记作 $\bar{X}$ 和 $\bar{\bar{X}}$, 定义为

$$\bar{X} = B(\bar{\boldsymbol{v}})X, \quad B(\bar{\boldsymbol{v}}) \in \mathrm{WZ}, \tag{G-9-56}$$

$$\bar{\bar{X}} = B(\bar{\boldsymbol{v}} + \delta\bar{\boldsymbol{v}})X, \quad B(\bar{\boldsymbol{v}} + \delta\bar{\boldsymbol{v}}) \in \mathrm{WZ}, \tag{G-9-57}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{v}} + \delta\bar{\boldsymbol{v}}$ 分别是回转仪在 p' 和 p'' 时相对于 X 系的 3 速. 因为伪转动 "保持" x 轴的方向, 所以 $\bar{X}$ 和 $\bar{\bar{X}}$ 系可分别看作 "X 系在 p' 和 p'' 点的代表". 如果 $G(\tau)$ 的某空间矢量场在 p' 点与 $\bar{x}$ 轴平行, 在 p'' 点与 $\bar{\bar{x}}$ 轴平行, 则 X 系认为它的空间方向在 p' 时刻不变, 即无空间转动 (在本节注 3 带引号的意义下). 然而, 沿线费移的 w^a 的表现并非如此. 由式(G-9-56) 和(G-9-57) 得

$$\bar{\bar{X}} \equiv B(\bar{\boldsymbol{v}} + \delta\bar{\boldsymbol{v}})B^{-1}(\bar{\boldsymbol{v}})\bar{X} = B(\bar{\boldsymbol{v}} + \delta\bar{\boldsymbol{v}})B(-\bar{\boldsymbol{v}})\bar{X}. \tag{G-9-58}$$

令

$$\Lambda \equiv B(\bar{\boldsymbol{v}} + \delta\bar{\boldsymbol{v}})B(-\bar{\boldsymbol{v}}), \tag{G-9-59}$$

则

$$\bar{\bar{X}} = \Lambda\bar{X}. \tag{G-9-58$'$}$$

矩阵计算表明 [见 Jackson (1975)], 在只保留 $\delta\bar{\boldsymbol{v}}$ 的一阶项时有 (这是 "方向不同的伪转动之积不是伪转动" 的实例)

$$\Lambda = R(\Delta\boldsymbol{\Omega})B(\Delta\boldsymbol{v}), \tag{G-9-60}$$

其中

$$\Delta\boldsymbol{v} = \bar{\bar{X}} \text{ 系相对于} \bar{X} \text{ 系的 3 速,}^5 \tag{G.9.3}$$

[5]请注意 $\Delta\boldsymbol{v} \neq (\bar{\boldsymbol{v}} + \delta\bar{\boldsymbol{v}}) - \bar{\boldsymbol{v}} = \delta\bar{\boldsymbol{v}}$. 读者可用相对论速度合成公式证明 $\Delta\boldsymbol{v} = \gamma^2\delta\bar{\boldsymbol{v}}_\parallel + \gamma\delta\bar{\boldsymbol{v}}_\perp$, 其中 $\delta\bar{\boldsymbol{v}}_\parallel$ 和 $\delta\bar{\boldsymbol{v}}_\perp$ 分别是 $\delta\bar{\boldsymbol{v}}$ 平行和垂直于 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 的分量. 现在讨论的是圆周运动, 有 $\delta\bar{\boldsymbol{v}} \perp \bar{\boldsymbol{v}}$, 故 $\Delta\boldsymbol{v} = \gamma\delta\bar{\boldsymbol{v}}$.

$$\Delta\boldsymbol{\Omega}=\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\bar{\boldsymbol{v}}\times\delta\bar{\boldsymbol{v}},\tag{G-9-62}$$

而 $R(\Delta\boldsymbol{\Omega})\in\mathrm{ZD}$ 则代表把坐标轴以矢量 $\Delta\boldsymbol{\Omega}$ 为轴转角度 $|\Delta\boldsymbol{\Omega}|$ 所导致的坐标变换的矩阵. 为求得 p' 时的瞬时转动角速度, 不妨设 w^a 在 p' 点与 $\bar{x}$ 轴同向, (为此只须调整 w^a 的初始方向, 不再要求 $w^a|_{p_0}$ 与 x 轴同向.) 这导致 X' 系与 $\bar{X}$ 系相同, 于是

$$\bar{\bar{X}}=R(\Delta\boldsymbol{\Omega})B(\Delta\boldsymbol{v})X'=R(\Delta\boldsymbol{\Omega})X''\quad[\text{其中第二步用到式(G-9-53}')],\ \text{因而}$$

$$X''=R(-\Delta\boldsymbol{\Omega})\bar{\bar{X}}.\tag{G-9-63}$$

注意到 $(\partial/\partial x'')^a|_{p''}=w^a|_{p''}$, 而实验室系 X 认为 $(\partial/\partial\bar{x})^a|_{p''}$ 代表 "如果 w^a 不转" 的 $w^a|_{p''}$, 可知 $X''=R(-\Delta\boldsymbol{\Omega})\bar{\bar{X}}$ 表明 X 系认为 w^a 在从 p' 到 p'' 的过程中做了 (有向) 角度为 $-\Delta\boldsymbol{\Omega}$ 的空间转动. 再以 δt 代表 X 系测得的此过程的时间, 便得 Thomas 进动角速度

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{T}}=-\lim_{\delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{\Omega}}{\delta t}=\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{a}\times\bar{\boldsymbol{v}},\tag{G-9-64}$$

其中 $\boldsymbol{a}=\lim_{\delta t\to0}\delta\bar{\boldsymbol{v}}/\delta t$ 是回转仪在 p' 时刻相对于实验室系的 3 加速. 不难验证这一 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{T}}$ 与式(G-9-47) 的 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{T}}$ 一致.

以上是用 4 维语言及费移术语对 Thomas 进动的讨论. Thomas 当年借助于对相继伪转动的计算, 首次指出电子的静止坐标系 (本书的带撇系) 在运动过程中 (例如从 X' 系列 X'' 系) 相对于 X 系出现附加转动 (静止系空间坐标轴的空间转动), 使电子自旋角动量 (本书的 w^a) 有了一个牵连角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{T}}$, 从而克服了在原子物理发展早期一度出现过的困难.

本小节主要参考文献: Misner et al. (1973); Goldstein (1980); Jackson (1975); Eisberg and Resnick (1985).

最后谈一点笔者的看法. 本小节开头第二段曾问: "从实验室系 X 看来, 设 w^a 在 $\tau=0$ 时与 $(\partial/\partial x)^a$ 同向, 在 $\tau=\tilde{\tau}$ 时还同向吗?" 作为时空矢量, $w^a|_p$ 不是 X 系的空间矢量 $[w^0(t)\neq0]$, 它与空间矢量 $(\partial/\partial x)^a$ 同向与否的问题并无意义. 要使 $w^a|_p$ [更一般地, $w^a(t)$] 的 "空间方向" 有意义, 先要定义一个把 $w^a(t)$ 变为 X 系的空间矢量 [记作 $\tilde{w}^a(t)$] 的映射. 这一定义当然应当尽量自然, 但 "自然" 一词本来就有一定的含糊性, 所以映射可以不止一种. 前面的 "代表法" 就是其一: 设 $\bar{X}$ 是 X 系派驻在 p' 点的代表, $\bar{w}$ 是 $w^a|_{p'}$ 在 $\bar{X}$ 系的分量, 则 $w^a|_{p'}$ 的像就定义为 $\bar{w}^i(\partial/\partial x^i)^a$. 这是实验室参考系 $\mathscr{R}$ 的空间矢量, 而且可以证明它与实验室坐标系 X 的选择无关. 但也存在其他的 "自然" 定义, 例如可把 $w^a(t)$ 在 X 系的同时面的投影定义为 $\tilde{w}^a(t)$, 即认为 $G(\tau)$ 线上存在 X 系的空间矢量场 $\tilde{w}^a(t)=\tilde{w}^i(t)(\partial/\partial x^i)^a$, 其分量 $\tilde{w}^i(t)$ 就是式(G-9-43a)– (G-9-43d) 的 $w^i(t)$, 其中非零的两个为

$$\begin{aligned}\tilde{w}^1(t)&=\cos\omega t\cos\omega\gamma t+\gamma\sin\omega t\sin\omega\gamma t=\cos[(\gamma-1)\omega t]+(\gamma-1)\sin\omega t\sin\omega\gamma t,\\ \tilde{w}^2(t)&=\sin\omega t\cos\omega\gamma t-\gamma\cos\omega t\sin\omega\gamma t=-\sin[(\gamma-1)\omega t]-(\gamma-1)\cos\omega t\sin\omega\gamma t.\end{aligned}\tag{G-9-65}$$

于是

$$\begin{aligned}\tilde{w}^a(t)=&\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a\cos[(\gamma-1)\omega t]-\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a\sin[(\gamma-1)\omega t]\right\}\\&+\left\{(\gamma-1)\sin\omega\gamma t\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a\sin\omega t-\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a\cos\omega t\right]\right\}.\end{aligned}\tag{G-9-66}$$

上式与代表法的结果的区别在于多了第二大项, 该项方括号内代表以 ω 为角速的转动, 但方括号前的 "振幅" 也随 t 做周期性变化, 导致时间段 $0<\omega t<\pi$ 内与 $\pi<\omega t<2\pi$ 内的转动方向相反, 因而在一个周期 $t=2\pi/\omega$ 内有很大程度的抵消. 如果所关心的物理问题不是每一时刻或每一周期而是 (例如) 十倍甚至百倍周期方可显效, 则由于振幅中因子 $\sin\omega\gamma t$ 的最大值为 1, 第二大项的时间平均就可忽略. 此外, 振幅中的因子 $\gamma-1$ 在许多情况下远小于 1 [例如处于最低能态的氢原子的电子的 $(\gamma-1)\sim 10^{-5}$], 只此就能被第一大项忽略. 不过, 无论如何, 至少从理论的角度看, 这种做法 (简称投影法) 与代表法的结果毕竟不同. 于是出现问题: 哪种映射才符合物理实在? 以下纯粹是笔者的认识, 未见文献依据. 要回答这一问题, 先要弄清物理学的一个最基本的问题: 在用实验检验理论时, 如何保证仪器所给出的一堆数 (或曲线) 真的代表理论中的各该量? 反过来说, 在用理论解释实验 (观测) 结果时, 如何保证理论上的各量真的代表实验中的各该量? 例如, 在解释水星近日点进动时, 很自然地用 Schwarzschild 坐标 r,θ,φ 作为水星的径 (角) 向位置的标志. 然而坐标是人为定义的, 为什么 Schwarzschild 坐标的确代表用天文手段观测到的水星的径 (角) 向位置? 只有对天文观测的细节以及对广义相对论都非常熟悉的人才可给出明确的回答 (证明). 又如, 人们熟悉的钟慢效应是动钟慢于静钟, 读数之比为 γ^{-1}, 与这一理论结果相应的实验安排涉及一个动钟两个静钟 (图 6-15). 但若只用两钟 (一静一动) 并约定静钟观看者在两钟相遇时左眼看静钟右眼看动钟 (图 6-19), 则读数之比不再是 γ^{-1}. 甚至还存在这样的实验安排 (图 6-20), 静钟观看者发现动钟较快! 每种理论结果对应于一种实验安排, 不可张冠李戴. 再看一个与 Thomas 进动更为接近的例子——尺缩效应. 从理论上说, 设尺子相对于 X 系匀速平动, 首先要给 "动尺长" 下个定义. 最自然的定义是: 在 X 系的某一时刻同时记下动尺头尾的位置 (X 系的两个空间点), 它们的空间距离就定义为动尺长. 翻译成 4 维语言, 就是把 X 系的同时面与尺子世界面的交线作为动尺, 其长度就定义为动尺长. 结论是动尺长只有静尺长的 γ^{-1} 倍. 粒子物理学中对大量高速粒子的实验都证实了这一结论, 重要的是每个实验所测得的 "动尺长" 的确是理论所定义的那个动尺长. 与尺长问题相较, Thomas 进动问题由于关心动尺的空间方向以及回转仪作非惯性运动而复杂得多, 存在不止一种的、都很 "自然" 的定义. 为了回答 "在同实验对比时该用哪个定义" 的问题, 必须弄清实验的具体详尽的细节, 从而确定仪器的读数所反映的是哪一个定义的空间方向. 定义并无对错之分, 但存在哪个定义才是实验所测得的对象这一微妙问题 (不可张冠李戴). 除了代表法和投影法外, 笔者认为至少还有一种很自然的、未在文献上见过的映射定义, 介绍如下.

把回转仪轴看作长为 l 的短尺, 尺的每点看作一个观者, 以线长参数 s 标志, 其世界线记作 $\gamma_s(\tau)$ (τ 为固有时), 尺头尺尾依次为 $\gamma_0(\tau)=G(\tau)$ 和 $\gamma_l(\tau)$. 所有 $\gamma_s(\tau)$ 铺出短尺的世界面 $\mathscr{S}$. 选横向曲线 $\mu(s)$ 使 $\mu(0)=\gamma_0(0)$, 且曲线在 $\mu(s)$ 点的切矢等于 $w^a(0)$. 约定每一 $\gamma_s(\tau)$ 与 $\mu(s)$ 的交点为 τ 的零点, 则 $\mathscr{S}$ 上有 2 维坐标系 $\{s,\tau\}$. 把基矢场 $Z^a\equiv(\partial/\partial\tau)^a$ 和 $\eta^a\equiv(\partial/\partial s)^a$ 在点 $(s,\tau)\in\mathscr{S}$ 的值记作 $Z^a(s,\tau)$ 和 $\eta^a(s,\tau)$, 则 $\eta^a(0,\tau)$ 可作正交分解:

$$\eta^a(0,\tau)=a(\tau)Z^a(0,\tau)+b(\tau)w^a(\tau), \tag{G-9-67}$$

可见 $b(\tau)w^a(\tau)$ 是 $G(\tau)$ 的一个邻居. 上式可用 X 系的坐标基矢展开为

$$\eta^a(0,\tau)=[a(\tau)Z^\mu(0,\tau)+b(\tau)w^\mu(\tau)]\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a\Bigg|_{G(\tau)}, \tag{G-9-68}$$

其中 $Z^\mu(0,\tau)$ 就是式(G-9-40) 的 $Z^\mu(\tau)$, 而 $w^\mu(\tau)$ 则由式(G-9-43a)–(G-9-43d) 给出 [例如 $w^0(\tau)=-R\omega\gamma\sin\gamma^2\omega\tau$]. 因 $\mathscr{S}$ 的每点可用 s,τ 刻画, 故该点在 X 系的坐标 x^μ 是 s,τ 的函数, 记作 $x^\mu(s,\tau)$, 称为 $\mathscr{S}$ 的参数式, 于是可从式(G-9-68) 读出

$$\frac{\partial x^\mu(s,\tau)}{\partial s}\bigg|_{s=0}=a(\tau)Z^\mu(0,\tau)+b(\tau)w^\mu(\tau), \tag{G-9-69}$$

借此可将 $x^\mu(s,\tau)$ 在 $s=0$ 附近展开为

$$x^\mu(s,\tau)=x^\mu(0,\tau)+s[a(\tau)Z^\mu(0,\tau)+b(\tau)w^\mu(\tau)]+O(s^2). \tag{G-9-70}$$

由式(G-9-39) 及(G-9-40) 可知上式中在 $\mu=0$ 时给出

$$t(s,\tau)=\gamma\tau+s[a(\tau)\gamma+b(\tau)w^0(\tau)]+O(s^2). \tag{G-9-71}$$

Z^a 的类时性保证 $\partial t(s,\tau)/\partial\tau>0$, 故可从上式反解出 $\tau=\tau(s,t)$, 于是 $\mathscr{S}$ 的参数式又可写成 $x^i(s,\tau)=x^i(s,\tau(s,t))$, 这其实就是 2 维面 $\mathscr{S}$ 与等 t 面的截线方程. 以 $x^i_0(t)$ 和 $x^i_l(t)$ 简记短尺头尾的空间坐标, 则

$$\begin{aligned}x^i_l(t)-x^i_0(t)&=x^i(l,\tau(l,t))-x^i(0,\tau(0,t))=l\left.\frac{\partial x^i(s,\tau(s,t))}{\partial s}\right|_{s=0}+O(l^2)\\&=l\left[\left.\frac{\partial x^i(s,\tau)}{\partial s}\right|_{s=0,\tau=\gamma^{-1}t}+\left.\frac{\partial x^i(0,\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=\gamma^{-1}t}\left.\frac{\partial\tau(s,t)}{\partial s}\right|_{s=0}\right]+O(l^2)\\&=l\left[a(\tau)Z^i(0,\gamma^{-1}t)+b(\gamma^{-1}t)w^i(\gamma^{-1}t)+Z^i(0,\gamma^{-1}t)\left.\frac{\partial\tau(s,t)}{\partial s}\right|_{s=0}\right]+O(l^2).\end{aligned} \tag{G-9-72}$$

其中最末一步用到式(G-9-70). 把 $\tau=\tau(s,t)$ 代入式(G-9-71), 则左边不是 s 的函数 (就是 t), 两边对 s 求偏导并在 $s=0$ 取值得

$$\partial\tau(s,t)/\partial s|_{s=0}=-a(\gamma^{-1}t)-\gamma^{-1}b(\gamma^{-1}t)w^0(\gamma^{-1}t),$$

代入式(G-9-72) 得

$$x^i_l(t)-x^i_0(t)=lb(\gamma^{-1}t)[w^i(\gamma^{-1}t)-\gamma^{-1}Z^i(0,\gamma^{-1}t)w^0(\gamma^{-1}t)]+O(l^2). \tag{G-9-73}$$

$\tilde w^i(t)$ 本应定义为 $[x^i_l(t)-x^i_0(t)]/l$ 的极限, 但因只关心方向, 可略去因子 $b(\gamma^{-1}t)$, 即定义

$$\tilde w^i(t)\equiv b(\gamma^{-1}t)^{-1}\lim_{l\to0}\frac{x^i_l(t)-x^i_0(t)}{l}.$$

以式(G-9-72), (G-9-40) 及(G-9-43a)–(G-9-43d) 代入便得 $\tilde w^3(t)=0$ 和

$$\begin{aligned}\tilde w^1(t)&=\cos\omega t\cos\omega\gamma t+\gamma^{-1}\sin\omega t\sin\omega\gamma t=\cos[(\gamma-1)\omega t]+(\gamma^{-1}-1)\sin\omega t\sin\omega\gamma t,\\\tilde w^2(t)&=\sin\omega t\cos\omega\gamma t-\gamma^{-1}\cos\omega t\sin\omega\gamma t=-\sin[(\gamma-1)\omega t]-(\gamma^{-1}-1)\cos\omega t\sin\omega\gamma t,\end{aligned} \tag{G-9-74}$$

因而

$$\begin{aligned}\tilde w^a(t)=&\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a\cos[(\gamma-1)\omega t]-\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a\sin[(\gamma-1)\omega t]\\&+(\gamma^{-1}-1)\sin\omega\gamma t\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a\sin\omega t-\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a\cos\omega t\right].\end{aligned} \tag{G-9-75}$$

上式与投影法的结果 [式(G-9-66)] 的差别仅在于第二大项的振幅由 $(\gamma-1)\sin\omega\gamma t$ 改为 $(\gamma^{-1}-1)\sin\omega\gamma t$. 由于同样原因, 该项在多数情况下也会被第一大项 (Thomas 项) 所忽略.

习题

1. 验证由式(G-1-1) 定义的 $I_g: G \to G$ 确为自同构映射.
*2. 验证由式(G-1-2) 定义的乘法满足群乘法的要求.
2. 验证由 §G.1 定义 8 所定义的 $\mathscr{A}(G)$ 是群.
*4. 试证定理 G-1-2, 即 $\mathscr{A}_I(G)$ 是群 $\mathscr{A}(G)$ 的正规子群.
3. 验证由 §G.1 定义 9 所定义的 $H \ltimes K$ 是群.
4. 设 $L_g: G \to G$ 是由 $g \in G$ 生成的左平移, L_g^{-1} 是 L_g 的逆映射, 试证

$$L_{g^{-1}}^{-1} = L_g^{-1}, \quad \forall g \in G.$$

*7. $\forall g \in G$ 定义右平移 $R_g: h \mapsto hg, \forall h \in G$, 试证 $R_{gh} = R_h \circ R_g$.
*8. 试证 $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] := \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ 满足 Lie 括号的条件 (见 §G.3 例 1).
*9. 试证 $[A, B] := AB - BA$ 满足 Lie 括号的条件 (见 §G.3 例 2).
*10. 设 $\mathscr{G}$ 和 $\tilde{\mathscr{G}}$ 依次是 Lie 群 G 和 $\tilde{G}$ 的 Lie 代数, $\rho_*: \mathscr{G} \to \tilde{\mathscr{G}}$ 是同态映射 $\rho: G \to \tilde{G}$ 在 $e \in G$ 诱导的推前映射, 试证 $\rho(\exp A) = \exp(\rho_* A) \quad \forall A \in \mathscr{G}$. 提示: 先用同态性证明 $\rho(\exp tA)$ 是单参子群.
*11. 试证式(G-5-10) 可由式(G-5-10′) 推出. 提示: 把式(G-5-10′) 的 v^0, u^0 之和作为式(G-5-10′) 的 v^0.
*12. SO(2) 是阿贝尔群吗? O(2) 是阿贝尔群吗?
*13. Lie 群 SL(m) [GL(m) 满足 $\det T = +1$ 的子群] 的 Lie 代数记作 $\mathscr{SL}(m)$. 试证 (a) $\mathscr{SL}(m) = \{m \times m$ 无迹实矩阵$\}$, (b) $\dim \mathrm{SL}(m) = m^2 - 1$.
5. (1) 试证存在连续曲线 $\mu: [0,1] \to \mathrm{GL}(2)$ 使 $\mu(0) = I, \mu(1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. *(2) 试证 $T \equiv \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2)$ 不属于 Lie 群 GL(2) 的任一单参子群. 提示: 假定存在矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 使 $T = \mathrm{Exp}(A)$, (a) 证明 $c \neq 0$, (b) 把 A^n (A 的 n 次方) 记作 $A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$, 证明 $\exists t_n \in \mathbb{R}$ 使 $b_n = t_n c_n, c_n = c t_n$, (c) 由 (b) 推出矛盾.
6. 补证定理 G-5-11 证明中的等式 $D = \mathrm{Exp}(\mathrm{i}\Phi)$.
7. 试用 Lie 括号所满足的 Jacobi 恒等式证明定理 G-6-1 的 (b).
8. 试证 §G.6 例 1 中的①和②.
9. 试证 §G.7 例 4 的结论, 即 $\bar{\xi} = -\bar{A}$.
10. 设 G 是矩阵 Lie 群, 试证 $\forall A \in \mathscr{G}, g \in G$ 有 $\mathscr{A}d_g A = gAg^{-1}$. (右边是 3 个矩阵的连乘积. 当 G 不是矩阵群时 gAg^{-1} 无意义, 因为 Lie 群元 g 与 Lie 代数元 B 之积没有定义.)
11. 设 $\mathscr{G}$ 和 $\tilde{\mathscr{G}}$ 依次是 Lie 群 G 和 $\tilde{G}$ 的 Lie 代数, $\rho_*: \mathscr{G} \to \tilde{\mathscr{G}}$ 是同态映射 $\rho: G \to \tilde{G}$ 在 $e \in G$ 诱导的推前映射, 试证 (a) $\rho_* \mathscr{A}d_g A = \mathscr{A}d_{\rho(g)} \rho_* A, \quad \forall g \in G, A \in \mathscr{G}$. (b) $\rho_*((L_{g^{-1}})_* X) = L_{\rho(g)^{-1}} \rho_* X, \quad \forall g \in G, X \in V_g$ (g 点的切空间), L 代表左平移.

12. 试证式(G-8-14) 和(G-8-16).

*22. 设 e 是 Lie 群 G 的恒等元, $g\in G$, 则映射 $\mathscr{A}d_g: V_e\to V_e$ 可延拓为

$$\mathscr{A}d_g:\mathscr{F}_0(1,0)\to\mathscr{F}_0(1,0)\quad[\mathscr{F}_0(1,0)\text{ 代表}G\text{ 上光滑矢量场的集合}],$$

定义为 $(\mathscr{A}d_g\bar{A})_h\equiv L_{g*}(\bar{A}_{h'})\quad\forall\bar{A}\in\mathscr{F}_0(1,0), h\in G$, 其中 $h'\equiv g^{-1}hg$. 试证: 若 $\bar{A}$ 是相应于 $A\in V_e$ 的左不变矢量场, 则 $\mathscr{A}d_g\bar{A}$ 是相应于 $\mathscr{A}d_gA\in V_e$ 的左不变矢量场. 提示: 只须证明 $(\mathscr{A}d_g\bar{A})_h=L_{h*}(\mathscr{A}d_gA), \forall h\in G$, 为此可利用 $I_g=L_g\circ R_{g^{-1}}$, 其中 R 代表右平移 (见习题 7).

13. 设 $\mathscr{G}$ 是 Lie 群 G 的 Lie 代数, $g\in G$, 试证 $\mathscr{A}d_g:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ 是 Lie 代数同构. 提示: $I_g:G\to G$ 是微分同胚保证 $\mathscr{A}d_g:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ 是矢量空间同构 (见第 4 章习题 4), 故只须补证 $\mathscr{A}d_g:\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ 保 Lie 括号, 即 $\mathscr{A}d_g[A,B]=[\mathscr{A}d_gA,\mathscr{A}d_gB]$. 由第 4 章习题 6 可知 $\mathscr{A}d_g[\bar{A},\bar{B}]=[\mathscr{A}d_g\bar{A},\mathscr{A}d_g\bar{B}]$, 再用习题 22 的结论以及 $\bar{A},\bar{B}\in\mathscr{L}\Rightarrow[\bar{A},\bar{B}]\in\mathscr{L}$ 便可.

14. 完成定理 G-9-4 证明中留作习题的一步, 即从 $R=B(-\boldsymbol{v})\Lambda$ 出发证明式(G-9-14).

15. 定理 G-9-4 中分解唯一性的另一证明的思路如下: 由 $B(\boldsymbol{v})R=B(\boldsymbol{v}')R'$ 得

$$I=B(-\boldsymbol{v})B(\boldsymbol{v}')R'R^{-1}=B(-\boldsymbol{v})B(\boldsymbol{v}')\tilde{R},\quad(\text{其中}\tilde{R}\equiv R'R^{-1}\in\mathrm{ZD})$$

故 $\tilde{R}^{-1}=B(-\boldsymbol{v})B(\boldsymbol{v}')$. 此式的 00 分量给出 $1=B^0_\mu(-\boldsymbol{v})B^\mu_0(\boldsymbol{v}')=\gamma\gamma'(1-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}')$. 试证 (作为本题) 上式当且仅当 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'$ 时成立, 可见 $B(\boldsymbol{v})=B(\boldsymbol{v}')$, 从而又有 $R'=R$. □

中册符号一览表

关于惯例的说明以及上册符号的一览表见上册的惯例与符号.下面是出现在中册 (而不出现在上册) 的符号的一览表.

- $I^+(p)$: p 点的编时未来. 首次出现于 §11.1.
- $I^+(p,U)$: p 点相对于邻域 U 的编时未来. 首次出现于 §11.1.
- $I^+(S)$: 子集 S 的编时未来. 首次出现于 §11.1.
- $J^+(p)$: p 点的因果未来. 首次出现于 §11.1.
- $J^+(S)$: 子集 S 的因果未来. 首次出现于 §11.1.
- $D^+(S)$: 子集 S 的未来依赖域. 首次出现于 §11.4.
- $H^+(S)$: 子集 S 的未来柯西视界. 首次出现于 §11.5.
- i^+: 未来类时无限远. 首次出现于 §12.2.
- i^0: 未来类空无限远. 首次出现于 §12.2.
- $\mathscr{I}^+$: 未来类光无限远. 首次出现于 §12.2.
- 把以上符号中的 $+$ 改为 $-$ 相当于把未来改为过去.
- $\mathscr{L}T^{a\cdots b\cdots}$: $\mathscr{L}T^{a\cdots b\cdots}$ 的空间投影. 出现于 §14.4.
- D_a: 与空间诱导度规 h_{ab} 适配的导数算符, 首次出现于式 (12-7-8), 详见 §14.4.
- $\mathrm{C}[a,b]$: 定义见小节 B.1.1 例 1.
- $\mathrm{L}^2[a,b]$: 定义见式 (B-1-2).
- $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$: 定义见式 (B-1-3).
- $(\cdot,\cdot)$: 内积. 定义见小节 B.1.1 定义 1.
- $A^\#$: 算符 A 的对偶算符. 定义见式 (B-1-16).
- $A^\dagger$: 算符 A 的伴随算符. 定义见式 (B-1-18). 无界算符 A 的 $A^\dagger$ 见 §B.2.
- $H \ltimes K$: 群 H 和 K 的半直积群. 定义见 §G.1 定义 9.
- $L_+^\uparrow, L_+^\downarrow, L_-^\uparrow, L_-^\downarrow$: 定义见小节 G.5.3.

参考文献

- Gel'fand, Shilov. 广义函数 I. 林坚冰译. 1965. 北京: 科学出版社
- 高思杰, 梁灿彬. 1997. 刚性参考系与转盘几何. 北京师范大学学报. 33: 211-213
- Landau, Lifshitz. 1959. 场论. 任朗, 袁炳南译. 北京: 人民教育出版社
- 梁灿彬. 1995. 转盘周长的几何剖析. 北京: 北京师范大学学报. 31: 198-203
- Smirnov. 1960. 高等数学教程. 第三卷. 第一分册. 北大数学力学系代数教研室译. 北京: 人民教育出版社
- 王永久, 唐智明. 1990. 引力理论和引力效应. 长沙: 湖南科学技术出版社
- 王永久. 2000. 黑洞物理学. 长沙: 湖南师范大学出版社
- 夏道行, 吴卓人, 严绍宗等. 1985. 实变函数论与泛函分析. 下册, 第二版. 北京: 高等教育出版社
- 赵峥. 1991. 热平衡的传递性等价于钟速同步的传递性. 中国科学 (A 辑): 285-289
- Aharonov Y and Anandan J. 1987. Phase Change during a Cyclic Quantum Evolution. *Phys. Rev. Lett.*, **58**: 1593-1596
- Aharonov Y and Bohm D. 1959. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. *Phys. Rev.*, **115**: 485-491
- Arnowitt R, Deser S, and Misner C W. 1962. The Dynamics of General Relativity, in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. L. Witten. New York: Wiley
- Ashtekar A, and Hansen R O. 1978. A Unified Treatment of Null and Spatial Infinity in General Relativity. I. Universal Structure, Asymptotic Symmetries, and Conserved Quantities at Spatial Infinity. *J. Math. Phys.*, **19**: 1542-1566
- Ashtekar A, and Magnon-Ashtekar A. 1979. Energy-Momentum in General Relativity. *Phys. Rev. Lett.*, **43**: 181-184
- Ashtekar A. 1980. Asymptotic Structure of the Gravitational Field at Spatial Infinity, in: *General Relativity and Gravitation*. Vol. 2. ed. A. Held. New York: Plenum Press
- Bardeen J, and Press W. 1972. Rotating Black Holes: Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction, and Scalar Synchrotron Radiation. *Astrophys. J.*, **178**: 347-369
- Berry M. 1984. Quantum Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A392**: 45-57
- Bleecker D. 1981. *Gauge Theory and Variational Principles*. London: Addison-Wesley Publishing Company, Inc
- Bondi H, van der Burg M G J, and Metzner A W K. 1962. Gravitational Waves in General Relativity. VII. Waves from Axi-symmetric Isolated Systems. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A269**: 21-52
- Bray H L, and Chrusciel P T. 2003. The Penrose Inequality. gr-qc/0312047
- Bröcker T, and tom Dieck T. 1985. *Representations of Compact Lie Groups*. Beijing: Springer-Verlag, World Publishing Corporation
- Brown J D, and York J W. 1992. Quasilocal Energy in General Relativity. Based on talk given at Joint Summer Research Conf. on Mathematical Aspects of Classical Field Theory, Jul 1991. e-Print: gr-qc/9209012

- Brown J D, and York J W. 1993. Quasilocal Energy and Conserved Charges Derived from the Gravitational Action. *Phys. Rev.*, **D47**: 1407-1419
- Brown J D, Lau S R, and York J W. 1997. Energy of Isolated Systems at Retarded Times as the Null Limit of Quasilocal Energy. *Phys. Rev.*, **D55**: 1977-1984. e-Print: gr-qc/9609057
- Budic R, and Sachs R K. 1974. Causal Boundaries for General Relativistic Spacetimes. *J. Math. Phys.*, **15**: 1302-1309
- Carmeli M. 1982. *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*. New York: John Wiley and Sons
- Carter B. 1966. Complete Analytic Extension of the Symmetry Axis of Kerr's Solution of Einstein's Equations. *Phys. Rev.*, **141**: 1242-1247
- Carter B. 1968. Global Structure of the Kerr Family for Gravitational Fields. *Phys. Rev.*, **174**: 1559-1572