常微分方程习题整理与解答

Ordinary Differential Equations: Exercises and Solutions

柳彬、肖冬梅、张伟年《微分方程 I》作业题

RongYu

常微分方程系列讲义

2026.9.19

Contents

1 第一次作业 2

2 第二次作业 17

3 第三次作业 35

4 第四次作业 40

1

第一次作业

习题 1.2(1)

确定下列微分方程的阶:

$$(1)\quad (\sin x - 2y^2)\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}y = 0$$

解答

解题思路: 把对称形式除以 $\mathrm{d}x$, 改写成显含 y' 的方程, 其中出现的导数的最高阶数就是方程的阶.

解答: 原方程两边除以 $\mathrm{d}x$ 得

$$(\sin x - 2y^2) + \mathrm{e}^{x+y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

即 $\mathrm{e}^{x+y}y' = 2y^2 - \sin x$. 方程中只出现 y 的一阶导数 y', 不出现二阶及更高阶导数, 故其阶为 1.

结果: 一阶微分方程.

习题 1.2(2)

判断函数

$$(3)\quad xy^3 - \mathrm{e}^{-y} - 1 = 0, \qquad 0 < x < +\infty$$

是否分别是微分方程

$$(\mathrm{iii})\quad \left(27x^3y^6 + \mathrm{e}^{-y} + 2\mathrm{e}^{-2y}xy + \mathrm{e}^{-3y}\right)y''' - y^4\left(xy^2 + \mathrm{e}^{-y}\right) = 0$$

的解.

解答

解题思路: 由隐函数关系 $xy^3 - \mathrm{e}^{-y} - 1 = 0$ 逐次求导得 y', y'', y''', 代入 (iii) 左端并利用 $\mathrm{e}^{-y} = xy^3 - 1$ 化简, 检验是否恒为零.

解答: 设 $y = y(x)$ 由 $\Phi(x, y) = xy^3 - \mathrm{e}^{-y} - 1 = 0$ 确定. 对 $\Phi = 0$ 关于 x 求导得

$$y^3 + 3xy^2y' + \mathrm{e}^{-y}y' = 0,$$

即

$$y' = -\frac{y^3}{3xy^2 + \mathrm{e}^{-y}} = -\frac{y^3}{3xy^2 + xy^3 - 1},$$

其中用到了 $\mathrm{e}^{-y} = xy^3 - 1$. 继续求导得

$$y'' = \frac{y^5\left(xy^4 + 6xy^3 + 12xy^2 - y - 6\right)}{(xy^3 + 3xy^2 - 1)^3},$$

再求导一次即得 y'''. 将 y, y', y'', y''' 代入 (iii) 的左端并化简, 结果不恒等于零. 例如在曲线上取 $y = 1$, 由 $\Phi = 0$ 得 $x = 1 + \mathrm{e}^{-1}$, 该点属于定义区间 $0 < x < +\infty$; 在该点代入 (iii) 左端所得数值约为 -26.7, 不为零.

结果: 函数 (3) 不是微分方程 (iii) 的解.

习题 1.2(4)

已知函数

$$(1)\quad y = c_1 + c_2\mathrm{e}^{x} + c_3\mathrm{e}^{-x} + (\cos 3x - 2\sin 3x)\mathrm{e}^{2x}$$

$$(2)\quad y = \sqrt{c_1 x^2 + c_2}$$

是微分方程的通解, 其中 c_1, c_2, c_3 是任意常数, 求相应的微分方程.

解答

解题思路: 通解含几个独立任意常数, 方程就是几阶的. (1) 先写出齐次部分满足的方程, 再令非齐次项等于特解的相应运算; (2) 对 $y^2 = c_1x^2 + c_2$ 求导两次消去常数.

解答: (1) 通解含 3 个独立任意常数, 相应方程为三阶. 齐次部分 $c_1 + c_2\mathrm{e}^{x} + c_3\mathrm{e}^{-x}$ 中三个函数 $1, \mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}^{-x}$ 对应特征根 $0, 1, -1$, 特征多项式为 $\lambda(\lambda-1)(\lambda+1) = \lambda^3 - \lambda$, 故它们满足 $y''' - y' = 0$. 设方程为

$$y''' - y' = f(x).$$

令 $y_p = (\cos 3x - 2\sin 3x)\mathrm{e}^{2x}$, 逐次求导得

$$\begin{aligned} y_p' &= (-4\cos 3x - 7\sin 3x)\mathrm{e}^{2x}, \\ y_p'' &= (-29\cos 3x - 2\sin 3x)\mathrm{e}^{2x}, \\ y_p''' &= (-64\cos 3x + 83\sin 3x)\mathrm{e}^{2x}. \end{aligned}$$

于是

$$f(x) = y_p''' - y_p' = (90\sin 3x - 60\cos 3x)\mathrm{e}^{2x}.$$

故相应的微分方程为

$$y''' - y' = (90\sin 3x - 60\cos 3x)\mathrm{e}^{2x}.$$

(2) 通解含 2 个独立任意常数, 相应方程为二阶. 由

$$y^2 = c_1 x^2 + c_2$$

两边对 x 求导, 得 $2yy' = 2c_1 x$, 即

$$yy' = c_1 x.$$

再求导一次, 得

$$(y')^2 + yy'' = c_1.$$

由 $c_1 = \dfrac{yy'}{x}$ 代入消去 c_1, 得

$$(y')^2 + yy'' = \frac{yy'}{x},$$

即

$$xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0.$$

结果:(1) 对应方程 $y''' - y' = (90\sin 3x - 60\cos 3x)\mathrm{e}^{2x}$; (2) 对应方程 $xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$.

习题 1.3(1)

下列微分方程中哪些是线性的?

$$(1)\quad y'(x) = (\sin x)y + \cos y$$

$$(2)\quad y'(x) = (\sin y)x + \cos x$$

$$(3)\quad y'(x) = (\sin x)y + \cos x$$

解答

解题思路: 线性指方程关于 y 及其各阶导数是线性的, 系数只能依赖自变量.
解答:(1) 中含 $\cos y$, 它是 y 的非线性函数, 故 (1) 不是线性的. (2) 中 $\sin y$ 作为 x 的系数出现, 系数依赖 y, 故 (2) 不是线性的. (3) 可写成

$$y'(x) - (\sin x)y = \cos x,$$

它关于 y 与 y' 都是一次的, 系数只含自变量 x, 故 (3) 是线性的.
结果: 只有 (3) 是线性微分方程.

习题 1.3(2)

将下列微分方程 (组) 转化为高维形式, 即一阶微分方程组:

$$(1)\quad x'''(t)+t\sin x'(t)-x(t)=0$$

$$(2)\quad x''(t)+y(t)=0,\qquad y''(t)-x(t)=0$$

$$(3)\quad x''(t)+y'(t)+tf\Big(x'(t),y(t)\Big)=0$$

解答

解题思路: 把每个未知函数及其直到最高阶的导数都设为新未知函数, 原方程就写成一阶方程组.

解答: (1) 令 $x_1=x$, $x_2=x'$, $x_3=x''$, 由 $x'''=x-t\sin x'$ 得

$$\begin{cases}x_1'=x_2,\\ x_2'=x_3,\\ x_3'=x_1-t\sin x_2.\end{cases}$$

(2) 令 $x_1=x$, $x_2=x'$, $y_1=y$, $y_2=y'$, 由 $x''=-y$ 与 $y''=x$ 得

$$\begin{cases}x_1'=x_2,\\ x_2'=-y_1,\\ y_1'=y_2,\\ y_2'=x_1.\end{cases}$$

(3) 令 $x_1=x$, $x_2=x'$, $y_1=y$, 由原方程 $x''+y'+tf(x',y)=0$ 得

$$\begin{cases}x_1'=x_2,\\ x_2'+y_1'=-tf(x_2,y_1).\end{cases}$$

原式是一个方程含两个未知函数, 故化得的一阶方程组只给出 x_2' 与 y_1' 的一个约束关系, 系统是欠定的.

结果: 一阶方程组如上.

习题 2.1(1)

求下列微分方程的通解或通积分:

$$(3)\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2t+3x-1}{t-x+1}$$

(6) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-x+2t} + 2$

解答

解题思路:(3) 右端是 t, x 的一次分式, 两直线 $2t+3x-1=0$ 与 $t-x+1=0$ 交于一点, 平移到交点后化为齐次方程, 再令 $u=\eta/\xi$ 分离变量. (6) 含 $\mathrm{e}^{-x+2t}=\mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{-x}$, 令 $u=\mathrm{e}^{x}$ 化为一阶线性方程.

解答: (3) 解方程组

$$2t+3x-1=0, \qquad t-x+1=0$$

得交点 $\left(-\dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$. 作平移

$$t=\xi-\frac{2}{5}, \qquad x=\eta+\frac{3}{5},$$

代入原方程得

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\frac{2\xi+3\eta}{\xi-\eta}.$$

令 $u=\dfrac{\eta}{\xi}$, 则 $\eta=u\xi$, $\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=u+\xi\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$, 于是

$$u+\xi\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\frac{2+3u}{1-u} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1-u}{u^2+2u+2}\,\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}.$$

注意到 $u^2+2u+2=(u+1)^2+1$, 积分得

$$2\arctan(u+1)-\frac{1}{2}\ln\Big((u+1)^2+1\Big)=\ln|\xi|+C.$$

代回 $u=\dfrac{\eta}{\xi}$, $\xi=t+\dfrac{2}{5}$, $\eta=x-\dfrac{3}{5}$, 得通积分

$$2\arctan\left(\frac{x-\frac{3}{5}}{t+\frac{2}{5}}+1\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{x-\frac{3}{5}}{t+\frac{2}{5}}+1\right)^2+1\right)=\ln\left|t+\frac{2}{5}\right|+C.$$

(6) 令 $u=\mathrm{e}^{x}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. 原方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{-x}+2$$

两边乘以 e^{x} 得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{2t}+2u, \qquad u'-2u=\mathrm{e}^{2t}.$$

积分因子为 e^{-2t}, 故

$$\left(\mathrm{e}^{-2t}u\right)'=1, \qquad \mathrm{e}^{-2t}u=t+C,$$

即 $u = \mathrm{e}^{2t}(t + C)$. 于是

$$\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{2t}(t + C) \quad \Longrightarrow \quad x = 2t + \ln(t + C),$$

其中要求 $t + C > 0$.
结果:(3) 的通积分与 (6) 的通解如上.

习题 2.1(2)

求下列初值问题的解并画出积分曲线:

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{x}{t}\Big(1 + \ln|x| - \ln|t|\Big), \\ x(1) = 2 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^{\frac{1}{3}}, \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

解答

解题思路:(2) 中 $\ln|x| - \ln|t| = \ln|x/t|$, 右端只依赖 $u = x/t$, 是齐次方程, 令 $u = x/t$ 化为变量分离方程, 再由初值定常数. (3) 中 $f(x) = x^{1/3}$ 在 $x = 0$ 处导数无界, 不满足 Lipschitz 条件, 初值问题的解不唯一, 需把非零分支与零解拼接.
解答: (2) 令 $u = \dfrac{x}{t}$, 则 $x = ut$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u + t\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. 原方程成为

$$u + t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u\Big(1 + \ln|u|\Big) \quad \Longrightarrow \quad t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u\ln|u|.$$

分离变量并积分

$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln|u|} = \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad \Longrightarrow \quad \ln|\ln|u|| = \ln|t| + C.$$

由初值 $u(1) = x(1) = 2$ 得 $C = \ln(\ln 2)$, 故 $\ln|u| = \ln 2 \cdot |t|$. 在 $t > 0$ 上 $|t| = t$, 且 $u(1) = 2 > 0$, 故

$$\ln u = t\ln 2 \quad \Longrightarrow \quad u = 2^{t} \quad \Longrightarrow \quad x = t \cdot 2^{t}.$$

积分曲线是 $x = t\,2^{t}$ 在 $t > 0$ 上的图像: 过点 $(1, 2)$, 随 $t \to 0^{+}$ 有 $x \to 0^{+}$, 随 $t \to +\infty$ 有 $x \to +\infty$, 曲线单调上升且下凸.
(3) 先求 $x \neq 0$ 时非零解. 分离变量

$$\int x^{-1/3}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{2}\,x^{2/3} = t + C.$$

由 $x(0)=0$ 得 $C=0$, 于是 $x=\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$ $(t\geq 0)$. 而 $x\equiv 0$ 显然也是解. 更一般地, 对任意 $a\geq 0$,

$$x_a(t)=\begin{cases}0, & 0\leq t\leq a,\\ \left(\frac{2}{3}(t-a)\right)^{3/2}, & t\geq a,\end{cases}$$

在 $t=a$ 处连续且左右导数均为 0, 满足 $x_a(0)=0$ 与原方程, 故 x_a 都是解. 取负号得

$$\tilde{x}_a(t)=\begin{cases}0, & 0\leq t\leq a,\\ -\left(\frac{2}{3}(t-a)\right)^{3/2}, & t\geq a\end{cases}$$

也是解. 因此该初值问题有无穷多个解. 它们的积分曲线都从原点出发: 先在 $x=0$ 上停留, 再沿抛物线 $\pm\left(\frac{2}{3}(t-a)\right)^{3/2}$ 离开, 也可以始终停在 $x=0$.

结果:(2) 的解为 $x=t\cdot 2^t$; (3) 的解不唯一, 除 $x\equiv 0$ 外还有 $x=\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$ 及上述拼接曲线.

习题 2.2(1)

求解下列微分方程:

$$(1)\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\frac{2x}{t+1}=(t+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$(3)\quad (t^2+3)\cos x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2t\sin x=t(t^2+3)$$

$$(4)\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{x}{t}=a(\ln t)x^2$$

解答

解题思路:(1) 是一阶线性方程, 用积分因子法. (3) 中 $\cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x)$, 令 $u=\sin x$ 化为线性方程. (4) 是 Bernoulli 方程 ($\alpha=2$), 除以 x^2 后令 $u=x^{-1}$ 化为线性方程.

解答: (1) 方程即 $x'-\frac{2}{t+1}x=(t+1)^{5/2}$. 积分因子

$$\mu=\mathrm{e}^{\int -\frac{2}{t+1}\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{-2\ln|t+1|}=\frac{1}{(t+1)^2}.$$

于是

$$\left(\frac{x}{(t+1)^2}\right)'=(t+1)^{1/2},$$

积分得

$$\frac{x}{(t+1)^2}=\frac{2}{3}(t+1)^{3/2}+C,$$

故通解为

$$x=\frac{2}{3}(t+1)^{7/2}+C(t+1)^2 \qquad (t>-1).$$

(3) 令 $u=\sin x$, 则 $u'=\cos x\,x'$. 方程成为

$$(t^2+3)u'+2tu=t(t^2+3), \qquad u'+\frac{2t}{t^2+3}u=t.$$

积分因子 $\mathrm{e}^{\int\frac{2t}{t^2+3}\mathrm{d}t}=t^2+3$, 得

$$\Big(u(t^2+3)\Big)'=t(t^2+3), \qquad u(t^2+3)=\frac{t^4}{4}+\frac{3t^2}{2}+C.$$

代回 $u=\sin x$:

$$\sin x=\frac{t^4+6t^2+C_1}{4(t^2+3)}, \qquad C_1=4C,$$

其中右端须落在 $[-1,1]$ 内才有实值解.

(4) 对 $x\neq 0$ 除以 x^2, 得

$$x^{-2}x'+\frac{1}{t}\,x^{-1}=a\ln t.$$

令 $u=x^{-1}$, 则 $u'=-x^{-2}x'$, 得

$$-u'+\frac{1}{t}u=a\ln t, \qquad u'-\frac{1}{t}u=-a\ln t.$$

积分因子 $\mathrm{e}^{-\ln t}=\dfrac{1}{t}$ (取 $t>0$), 得

$$\left(\frac{u}{t}\right)'=-\frac{a\ln t}{t}, \qquad \frac{u}{t}=-\frac{a}{2}(\ln t)^2+C.$$

故

$$u=Ct-\frac{at}{2}(\ln t)^2 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{1}{t\left(C-\dfrac{a}{2}(\ln t)^2\right)}.$$

另有零解 $x\equiv 0$ (不在上述 $x\neq 0$ 的通解内).

结果:(1)(3)(4) 的通解如上.

习题 2.2(3)

若已知一阶线性微分方程两个不同的解, 请写出该方程的通解; 若已知 Riccati 方程的两个不同的解, 请写出该方程的通解. 比较这两个通解之间的差异.

解答

解题思路: 线性方程两解之差满足齐次方程, 叠加原理成立, 通解是两解的仿射组合. Riccati 方程没有叠加原理, 改用比值 $\dfrac{x-x_1}{x-x_2}$, 它的对数导数只与 x_1-x_2 有关, 从而得到通解.

解答: 先看一阶线性方程

$$x' = a(t)x + f(t).$$

设 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 是两个不同的解, 则差 $u = x_1 - x_2$ 满足齐次方程 $u' = a(t)u$, 故 $u = C_0\mathrm{e}^{\int a(t)\mathrm{d}t}$ $(C_0 \neq 0)$. 由叠加原理, 对任意常数 C, 函数

$$x(t) = x_2(t) + C\Big(x_1(t) - x_2(t)\Big)$$

都是原方程的解, 且当 C 取遍实数时给出全部解. 故通解为

$$x = x_2 + C(x_1 - x_2),$$

或写成 $x = Cx_1 + (1-C)x_2$.

再看 Riccati 方程

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \qquad a(t) \not\equiv 0.$$

设 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 是两个不同的特解. 对任一解 $x(t)$, 令

$$u(t) = \frac{x(t) - x_1(t)}{x(t) - x_2(t)}.$$

对 $i = 1, 2$ 有

$$x' - x_i' = (x - x_i)\Big(a(x + x_i) + b\Big),$$

故

$$\frac{u'}{u} = \frac{x' - x_1'}{x - x_1} - \frac{x' - x_2'}{x - x_2} = a(x_1 - x_2).$$

积分得

$$u = C\mathrm{e}^{\int a(t)\Big(x_1(t) - x_2(t)\Big)\mathrm{d}t}.$$

于是 Riccati 方程的通解为

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = C\mathrm{e}^{\int a(x_1 - x_2)\mathrm{d}t},$$

等价地, 令 $\Psi = \mathrm{e}^{\int a(x_1 - x_2)\mathrm{d}t}$, 则

$$x = \frac{x_1 - Cx_2\Psi}{1 - C\Psi}.$$

两者的差异: 线性方程的通解对参数 C 是线性的, 解集构成一条仿射直线, 叠加原理成立; Riccati 方程的通解是 C 的分式线性 (Mobius) 函数, 解集不再是线性空间, 两个解的任何非平凡线性组合一般不再是解. 对线性方程, 两解之差消去非齐次项而满足齐次方程; 对 Riccati 方程, 起类似作用的是比值 $\dfrac{x-x_1}{x-x_2}$, 其对数导数等于 $a(x_1-x_2)$.

结果: 线性方程通解为 $x = x_2 + C(x_1 - x_2)$; Riccati 方程通解为 $\dfrac{x-x_1}{x-x_2} = C\mathrm{e}^{\int a(x_1-x_2)\mathrm{d}t}$.

习题 2.3(1)

判断下列微分方程是否为全微分方程, 若是, 请求出其通积分:

$$(3)\quad \left(\frac{x}{t}+t^2\right)\mathrm{d}t + (\ln t - 2x)\mathrm{d}x = 0$$

解答

解题思路: 对 $M\mathrm{d}t + N\mathrm{d}x = 0$, 检查 $\dfrac{\partial M}{\partial x} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$ 是否成立; 若成立则求 U 使 $\mathrm{d}U = M\mathrm{d}t + N\mathrm{d}x$, 通积分即 $U = C$.

解答: 这里 $M = \dfrac{x}{t} + t^2$, $N = \ln t - 2x$. 计算

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{1}{t}, \qquad \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{t},$$

二者相等, 故方程是全微分方程. 求 $U(t,x)$ 使 $U_t = M$, $U_x = N$:

$$U = \int M\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{x}{t}+t^2\right)\mathrm{d}t = x\ln t + \frac{t^3}{3} + \varphi(x).$$

由

$$U_x = \ln t + \varphi'(x) = N = \ln t - 2x$$

得 $\varphi'(x) = -2x$, 即 $\varphi(x) = -x^2$. 故

$$U = x\ln t + \frac{t^3}{3} - x^2.$$

通积分为

$$x\ln t + \frac{t^3}{3} - x^2 = C \qquad (t>0).$$

结果: 方程是全微分方程, 通积分 $x\ln t + \dfrac{t^3}{3} - x^2 = C$.

习题 2.3(2)

求下列微分方程的积分因子和通积分:

$$(1)\quad (3xt^2+2tx+x^3)\mathrm{d}t+(t^2+x^2)\mathrm{d}x=0$$

$$(4)\quad \mathrm{e}^t\mathrm{d}t+(\mathrm{e}^t\cot x+2x\cos x)\mathrm{d}x=0$$

解答

解题思路: 先算 $E=M_x-N_t$. 若 E/N 只依赖 t, 则积分因子 $\mu=\mathrm{e}^{\int\frac{E}{N}\mathrm{d}t}$; 若 E/M 只依赖 x, 则 $\mu=\mathrm{e}^{-\int\frac{E}{M}\mathrm{d}x}$. 求出积分因子后再求原函数 U, 通积分为 $U=C$.

解答: (1) $M=3xt^2+2tx+x^3$, $N=t^2+x^2$. 有

$$M_x=3t^2+2t+3x^2,\qquad N_t=2t,\qquad E=M_x-N_t=3(t^2+x^2).$$

因为

$$\frac{E}{N}=\frac{3(t^2+x^2)}{t^2+x^2}=3$$

与 x 无关, 故存在只依赖于 t 的积分因子

$$\mu(t)=\mathrm{e}^{\int 3\,\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{3t}.$$

求 U 使 $\mathrm{d}U=\mathrm{e}^{3t}M\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{3t}N\,\mathrm{d}x$:

$$U=\int \mathrm{e}^{3t}(t^2+x^2)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{3t}\left(xt^2+\frac{x^3}{3}\right)+\varphi(t).$$

由

$$U_t=3\mathrm{e}^{3t}\left(xt^2+\frac{x^3}{3}\right)+2t\mathrm{e}^{3t}x+\varphi'(t)$$

与 $\mathrm{e}^{3t}(3xt^2+2tx+x^3)$ 比较得 $\varphi'(t)=0$, 故

$$U=\mathrm{e}^{3t}\left(xt^2+\frac{x^3}{3}\right).$$

通积分为

$$\mathrm{e}^{3t}\left(3xt^2+x^3\right)=C.$$

(4) $M=\mathrm{e}^t$, $N=\mathrm{e}^t\cot x+2x\cos x$. 有

$$M_x=0,\qquad N_t=\mathrm{e}^t\cot x,\qquad E=M_x-N_t=-\mathrm{e}^t\cot x.$$

因为

$$\frac{E}{M} = -\cot x$$

与 t 无关, 故存在只依赖于 x 的积分因子

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int(-\cot x)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\int \cot x\,\mathrm{d}x} = \sin x.$$

乘以 $\sin x$ 后方程为

$$\mathrm{e}^t \sin x\,\mathrm{d}t + \left(\mathrm{e}^t \cos x + 2x \sin x \cos x\right)\mathrm{d}x = 0.$$

求 U:

$$U = \int \mathrm{e}^t \sin x\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t \sin x + \varphi(x).$$

由

$$U_x = \mathrm{e}^t \cos x + \varphi'(x) = \mathrm{e}^t \cos x + 2x \sin x \cos x$$

得 $\varphi'(x) = 2x \sin x \cos x$, 即

$$\varphi(x) = x \sin^2 x - \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}.$$

故

$$U = \mathrm{e}^t \sin x + x \sin^2 x - \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4},$$

通积分为

$$\mathrm{e}^t \sin x + x \sin^2 x - \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} = C.$$

结果:(1) 的积分因子为 e^{3t}, 通积分 $\mathrm{e}^{3t}(3xt^2 + x^3) = C$; (4) 的积分因子为 $\sin x$, 通积分如上.

习题 2.3(3)

请给出一阶微分方程 (2.19) 有形如 $\mu(t,x) = \mu(\varphi(t,x))$ 的积分因子的充要条件, 其中 $\varphi(t,x)$ 分别为 tx, e^{at+bx} $(ab \neq 0,\ a,b \in \mathbb{R})$ 和 $(t^2+x^2)^\alpha$ $(\alpha \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$

$$M(t,x)\mathrm{d}t + N(t,x)\mathrm{d}x = 0 \tag{2.19}$$

解答

解题思路: 积分因子满足 $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial x} = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial t}$. 代入 $\mu = \mu(\varphi)$ 后, 该条件化为 μ'/μ 等于某个分式, 而左端只依赖 φ, 于是得到充要条件. 再分别把三种 φ 代入化简.

解答: 设 $\mu = \mu(\varphi(t,x))$ 是方程 (2.19) 的积分因子, 则

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}.$$

记 $\varphi_t = \partial\varphi/\partial t$, $\varphi_x = \partial\varphi/\partial x$, 则 $\mu_t = \mu'(\varphi)\varphi_t$, $\mu_x = \mu'(\varphi)\varphi_x$. 展开上式得

$$\mu(M_x - N_t) = \mu'\Big(N\varphi_t - M\varphi_x\Big).$$

在 $\mu \neq 0$ 且 $N\varphi_t - M\varphi_x \neq 0$ 处,

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{M_x - N_t}{N\varphi_t - M\varphi_x}.$$

左端只依赖于 φ, 故充要条件是右端只依赖于 φ, 即存在一元函数 h, 使得

$$\frac{M_x - N_t}{N\varphi_t - M\varphi_x} = h(\varphi),$$

此时

$$\mu = \mathrm{e}^{\int h(\varphi)\mathrm{d}\varphi}.$$

若 $N\varphi_t - M\varphi_x \equiv 0$ 而 $M_x - N_t \equiv 0$, 则方程本身已恰当, 取 $\mu = 1$ 即可, 上述条件视为仍成立.
分别代入三种 φ:

1. $\varphi = tx$. 此时 $\varphi_t = x$, $\varphi_x = t$, 充要条件为

$$\frac{M_x - N_t}{xN - tM} \text{ 只依赖于} tx.$$

2. $\varphi = \mathrm{e}^{at+bx}$ $(ab \neq 0)$. 此时 $\varphi_t = a\mathrm{e}^{at+bx}$, $\varphi_x = b\mathrm{e}^{at+bx}$, 充要条件为

$$\frac{M_x - N_t}{aN - bM} \text{ 只依赖于} at + bx.$$

3. $\varphi = (t^2 + x^2)^\alpha$ $(\alpha \neq 0)$. 此时 $\varphi_t = 2\alpha t(t^2 + x^2)^{\alpha-1}$, $\varphi_x = 2\alpha x(t^2 + x^2)^{\alpha-1}$, 充要条件为

$$\frac{M_x - N_t}{tN - xM} \text{ 只依赖于} t^2 + x^2.$$

结果: 一般充要条件是 $\dfrac{M_x - N_t}{N\varphi_t - M\varphi_x}$ 只依赖于 $\varphi(t,x)$; 对 $\varphi = tx$, e^{at+bx}, $(t^2 + x^2)^\alpha$ 分别化为上述三个条件.

习题 2.4(1)

求下列微分方程的解:

$$(1)\quad \big(x'(t)\big)^2 - xx'(t) - 2x^2 = 0$$

$$(4)\quad x - tx'(t) - 4\sqrt{x'(t)} = 0$$

解答

解题思路:(1) 令 $p = x'$, 左端分解为 $(p-2x)(p+x)$, 分别解两个一阶方程. (4) 可解出 x, 是 Clairaut 方程 $x = tp + 4\sqrt{p}$ 的形式, 求导后 $p' = 0$ 给直线族, $t + f'(p) = 0$ 给奇解.

解答: (1) 令 $p = x'$, 则

$$p^2 - xp - 2x^2 = (p-2x)(p+x) = 0.$$

由 $p = x'$ 的连续性, 每个解要么处处满足 $p = 2x$, 要么处处满足 $p = -x$. 若 $p = 2x$, 即 $x' = 2x$, 得 $x = C\mathrm{e}^{2t}$. 若 $p = -x$, 即 $x' = -x$, 得 $x = C\mathrm{e}^{-t}$. 故解由两支族组成

$$x = C_1\mathrm{e}^{2t}, \qquad x = C_2\mathrm{e}^{-t},$$

C_1, C_2 为任意常数, 取零时都得到零解 $x \equiv 0$.

(4) 令 $p = x'$, 方程化为

$$x = tp + 4\sqrt{p}.$$

这是 Clairaut 方程, $f(p) = 4\sqrt{p}$, $f'(p) = \dfrac{2}{\sqrt{p}}$. 对 t 求导得

$$p = p + tp' + f'(p)p' \quad\Longrightarrow\quad p'\left(t + \frac{2}{\sqrt{p}}\right) = 0.$$

若 $p' = 0$, 则 $p = C$, 代入得直线族

$$x = Ct + 4\sqrt{C} \qquad (C \geq 0).$$

若 $t + \dfrac{2}{\sqrt{p}} = 0$, 则 $\sqrt{p} = -\dfrac{2}{t}$, 即 $p = \dfrac{4}{t^2}$ $(t < 0)$, 代入原方程得

$$x = t\cdot\frac{4}{t^2} + 4\cdot\left(-\frac{2}{t}\right) = -\frac{4}{t}.$$

这是奇解, 它是直线族 $x = Ct + 4\sqrt{C}$ 的包络, 不含在直线族中.

结果:(1) 的解为 $x = C\mathrm{e}^{2t}$ 与 $x = C\mathrm{e}^{-t}$; (4) 的通解为直线族 $x = Ct + 4\sqrt{C}$, 另有奇解 $x = -\dfrac{4}{t}$ $(t < 0)$.

习题 2.4(2)

证明: 例 2.4.2 的特解确定的光滑曲线 $x = t^2$ 是通解确定的曲线族

$$x(t) = ct - \frac{1}{4}c^2$$

的包络.

解答

解题思路: 用 C-判别式求包络: 曲线族 $\Phi(t, x, c) = 0$ 的包络由 $\Phi = 0$ 与 $\dfrac{\partial \Phi}{\partial c} = 0$ 消去 c 得到, 再验证非退化, 不含于族中以及逐点相切三条性质.

解答: 曲线族写为

$$\Phi(t, x, c) = x - ct + \frac{c^2}{4} = 0.$$

由包络判别法, 包络上的点满足

$$\Phi = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = -t + \frac{c}{2} = 0.$$

第二式给出 $c = 2t$, 代入第一式得

$$x = (2t)t - \frac{(2t)^2}{4} = 2t^2 - t^2 = t^2.$$

故 $x = t^2$ 满足 C-判别式. 非退化条件成立, 因为

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = (-c, 1) \neq (0, 0).$$

再按定义验证: (1) $x = t^2$ 不含在曲线族中, 因为族中每条曲线关于 t 是线性的, 而 t^2 不是 t 的线性函数. (2) 相切性: 对 $x = t^2$ 上任意一点 (t_0, t_0^2), 取 $c_0 = 2t_0$, 对应族中曲线

$$x = 2t_0\, t - t_0^2.$$

它在 $t = t_0$ 处取值为 $2t_0^2 - t_0^2 = t_0^2$, 即过点 (t_0, t_0^2), 且其斜率 $2t_0$ 恰等于 $x = t^2$ 在该点的斜率 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = 2t_0$. 故两条曲线在该点相切.

综上, $x = t^2$ 是曲线族 $x = ct - \dfrac{1}{4}c^2$ 的包络.

结果: 证明完毕.

2

第二次作业

习题 1

证明: 距离空间上的压缩映射是连续的.

解答

解题思路: 用连续性的 ϵ-δ 定义. 压缩不等式 $\rho(Tx,Ty)\le\alpha\rho(x,y)$ 把 $\rho(Tx,Tx_0)$ 控制成 $\rho(x,x_0)$ 的倍数, 取 $\delta=\epsilon$ 即可.

解答: 设 $T:(X,\rho)\to(X,\rho)$ 是压缩映射, 即存在 $\alpha\in[0,1)$ 使得对任意 $x,y\in X$ 有

$$\rho(Tx,Ty)\le\alpha\rho(x,y).$$

任取 $x_0\in X$. 对任意 $\epsilon>0$, 取 $\delta=\epsilon$. 当 $\rho(x,x_0)<\delta$ 时, 由压缩不等式

$$\rho(Tx,Tx_0)\le\alpha\rho(x,x_0)<\rho(x,x_0)<\delta=\epsilon.$$

故 T 在点 x_0 处连续. 由 $x_0\in X$ 的任意性, T 在 X 上连续.

结果: 距离空间上的压缩映射必是连续映射.

习题 2

证明推论 *:

推论 * 设 (X,ρ) 是完备距离空间. 对映射 $T:X\to X$, 若存在 $\alpha\in[0,1)$ 及 $n\in\mathbb{N}$ 使得对任意 $x,y\in X$ 有

$$\rho(T^nx,T^ny)\le\alpha\rho(x,y)$$

则 T 在 X 上存在唯一的不动点.

解答

解题思路: 条件说明 T^n 是 X 上的压缩映射, 先用压缩映射原理 (完备距离空间上的压缩映射有唯一不动点) 得到 T^n 的唯一不动点, 再证明该点也是 T 的不动点, 最后用 T^n 不动点的唯一性证 T 不动点的唯一性.

解答: 由假设, 对任意 $x,y\in X$,

$$\rho(T^nx,T^ny)\le\alpha\rho(x,y),\qquad\alpha\in[0,1),$$

故 T^n 是完备距离空间 X 上的压缩映射. 由压缩映射原理, T^n 在 X 上有唯一的不动点, 记为 z, 即

$$T^n z = z.$$

(1) 证 z 是 T 的不动点. 在 $T^n z = z$ 两边作用 T:

$$T(T^n z) = Tz,$$

即 $T^{n+1}z = Tz$. 于是

$$T^n(Tz) = T^{n+1}z = Tz,$$

这说明 Tz 也是 T^n 的不动点. 由 T^n 不动点的唯一性, 得 $Tz = z$. 故 z 是 T 的不动点.

(2) 证唯一性. 设 z_1, z_2 都是 T 的不动点, 则

$$Tz_1 = z_1, \qquad Tz_2 = z_2,$$

反复作用 T 得 $T^n z_1 = z_1$, $T^n z_2 = z_2$, 即 z_1, z_2 都是 T^n 的不动点. 由 T^n 不动点的唯一性, $z_1 = z_2$.

结果: T 在 X 上存在唯一的不动点.

习题 4.3(2)

求初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t + x + 1, \qquad x(0) = 0$$

的 Picard 序列, 并由此取极限求解.

解答

解题思路: 按 Picard 逐次逼近的递推公式 $x_{n+1}(t) = \int_0^t \big(s + x_n(s) + 1\big)\mathrm{d}s$ 逐次迭代, 写出前几项后归纳出通项, 再令 $n \to \infty$ 求和取极限.

解答: Picard 序列定义为 $x_0(t) \equiv 0$,

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t \big(s + x_n(s) + 1\big)\mathrm{d}s, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

逐次计算:

$$x_1(t) = \int_0^t (s+1)\mathrm{d}s = \frac{t^2}{2!} + t,$$

$$x_2(t) = \int_0^t \left(s + \frac{s^2}{2!} + s + 1\right)\mathrm{d}s = \int_0^t \left(\frac{s^2}{2!} + 2s + 1\right)\mathrm{d}s = \frac{t^3}{3!} + t^2 + t,$$

$$x_3(t) = \frac{t^4}{4!} + \frac{2t^3}{3!} + \frac{2t^2}{2!} + t.$$

归纳可得通项

$$x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!} - t, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

事实上, 若上式对 n 成立, 则

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) &= \int_0^t (s + x_n(s) + 1)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \left[s + \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{s^k}{k!} - s + 1 \right] \mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \left[\frac{s^{n+1}}{(n+1)!} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{s^k}{k!} + 1 \right] \mathrm{d}s \\ &= \frac{t^{n+2}}{(n+2)!} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} + t = \frac{t^{n+2}}{(n+2)!} + 2\sum_{j=2}^{n+1} \frac{t^j}{j!} + t \\ &= \frac{t^{n+2}}{(n+2)!} + 2\sum_{j=1}^{n+1} \frac{t^j}{j!} - t. \end{aligned}$$

即通项公式对 $n+1$ 也成立. 令 $n \to \infty$, 因 $\dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ 且 $\mathrm{e}^t = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{k!}$, 得

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} - t = 2(\mathrm{e}^t - 1) - t = 2\mathrm{e}^t - t - 2.$$

直接验证: $x'(t) = 2\mathrm{e}^t - 1$, 且 $x'(t) - x(t) = (2\mathrm{e}^t - 1) - (2\mathrm{e}^t - t - 2) = t + 1$, $x(0) = 2 - 2 = 0$. 故极限函数即初值问题的解.

结果: Picard 序列收敛到解 $x(t) = 2\mathrm{e}^t - t - 2$.

习题 4.3(5)

假设函数 $f(t, x)$ 在闭区域

$$D = \{(t, x) : 0 \le t \le a,\ |x| \le b\}$$

上连续. 进一步, 假设对于任意 x_1, x_2 $(x_1 \le x_2)$, $t \in D$, 有 $f(t, x_1) \le f(t, x_2)$, $f(t, 0) \ge 0$. 对于初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x), \qquad x(0) = 0$$

构造 Picard 序列

$$x_0(t)\equiv 0,\qquad x_n(t)=\int_0^t f\big(s,x_{n-1}(s)\big)\,\mathrm{d}s,\qquad n=1,2,\cdots$$

证明: 该序列在区间 $0\le t\le h$ 上收敛到上述初值问题的解, 其中

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},\qquad M=\max_{(t,x)\in D}|f(t,x)|$$

解答

解题思路: 由 $f(t,0)\ge 0$ 与 f 对 x 单调不减, 归纳可知 $\{x_n(t)\}$ 对每个 t 单调递增; 再由 $|f|\le M$ 得到一致有界, 故逐点收敛; 最后在积分号下取极限, 证明极限满足等价的积分方程.

解答: (1) 序列良定且落在 D 内. $x_0\equiv 0$, 显然 $|x_0|\le b$. 设 $|x_{n-1}(s)|\le b$ $(s\in[0,h])$, 则 $(s,x_{n-1}(s))\in D$, 从而 $|f(s,x_{n-1}(s))|\le M$, 于是

$$|x_n(t)|\le\int_0^t\big|f(s,x_{n-1}(s))\big|\mathrm{d}s\le Mt\le Mh\le b.$$

归纳得每个 x_n 在 $[0,h]$ 上有定义且 $|x_n(t)|\le b$.

(2) 序列单调. 因 $f(s,0)\ge 0$,

$$x_1(t)=\int_0^t f(s,0)\mathrm{d}s\ge 0=x_0(t).$$

设 $x_n(t)\ge x_{n-1}(t)$ $(t\in[0,h])$, 由 f 关于 x 单调不减, $f(s,x_n(s))\ge f(s,x_{n-1}(s))$, 故

$$x_{n+1}(t)=\int_0^t f(s,x_n(s))\mathrm{d}s\ge\int_0^t f(s,x_{n-1}(s))\mathrm{d}s=x_n(t).$$

归纳得对每个固定的 $t\in[0,h]$, $\{x_n(t)\}$ 是单调不减数列.

(3) 逐点收敛. 由 (1), $|x_n(t)|\le b$, 即 $\{x_n(t)\}$ 单调有界, 故对每个 t 有极限, 记 $x(t)=\lim_{n\to\infty}x_n(t)$, 且 $|x(t)|\le b$, 故 $(t,x(t))\in D$.

(4) 取极限. 因 f 在紧集 D 上连续, 故一致连续; 且 $|f(s,x_n(s))|\le M$ 一致有界. 由控制收敛定理 (有界收敛定理),

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t f(s,x_n(s))\mathrm{d}s=\int_0^t f(s,x(s))\mathrm{d}s.$$

在 $x_{n+1}(t)=\int_0^t f(s,x_n(s))\mathrm{d}s$ 两边令 $n\to\infty$, 得

$$x(t)=\int_0^t f(s,x(s))\mathrm{d}s.$$

右边是 t 的连续可微函数, 求导得 $x'(t)=f(t,x(t))$, 且 $x(0)=0$. 故 $x(t)$ 是该初值问题在 $[0,h]$ 上的解, 即 Picard 序列收敛到初值问题的解.

结果: Picard 序列 $\{x_n(t)\}$ 在 $0\le t\le h$ 上收敛到初值问题 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x)$, $x(0)=0$ 的解.

习题 4.4(1)

考虑与初值问题 (4.4)+(4.5) 等价的积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^t f\Big(s,x(s)\Big)\,\mathrm{d}s$$

在区间 $I=[t_0,t_0+h]$ 上 (h 的意义与 Picard 定理中的相同) 构造序列 $\{x_n(t)\}$ 如下: 对于每个正整数 n, 将区间 I 等分, 其分点为 $t_k=t_0+kd_n$, 其中 $d_n=h/n$, $k=0,1,\cdots,n$. 定义

$$x_n(t)=\begin{cases}x_0, & t\in[t_0,t_1],\\ x_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t-d_n} f\Big(s,x_n(s)\Big)\,\mathrm{d}s, & t\in[t_1,t_0+h],\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots$$

称序列

$$x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t),\ \cdots$$

为 Tonelli 序列.

用 Tonelli 序列和 Ascoli-Arzelà 引理来证明 Peano 定理.

解答

解题思路: 分四步. 先说明每个 x_n 良定且 $(t,x_n(t))\in D$; 再证明 $\{x_n\}$ 一致有界且等度连续; 由 Ascoli-Arzelà 引理取一致收敛的子列; 最后在等价的积分方程中取极限, 证明极限就是初值问题的解.

解答: 设 $D=\{(t,x):|t-t_0|\le a,\ |x-x_0|\le b\}$, $M=\max_{(t,x)\in D}|f(t,x)|$, $h=\min\{a,b/M\}$.

(1) x_n 的良定性与有界性. 对第 n 个函数, 在子区间 $[t_k,t_{k+1}]$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 上归纳定义. 在 $[t_0,t_1]$ 上 $x_n\equiv x_0$. 若 x_n 已在 $[t_0,t_k]$ 上定义, 则对 $t\in[t_k,t_{k+1}]$, 有 $t-d_n\in[t_{k-1},t_k]\subseteq[t_0,t_k]$, 右端积分中的 $x_n(s)$ $(s\le t-d_n)$ 均为已知, 故 x_n 在 $[t_k,t_{k+1}]$ 上被确定. 因而 x_n 在整个 $[t_0,t_0+h]$ 上有定义, 且在节点处取值连续, 故 x_n

连续. 又

$$|x_n(t)-x_0|\le\int_{t_0}^{t-d_n}|f(s,x_n(s))|\mathrm{d}s\le M(t-t_0)\le Mh\le b,$$

故 $(t,x_n(t))\in D$.
(2) 一致有界与等度连续. 由 (1), $|x_n(t)|\le|x_0|+b$, 故 $\{x_n\}$ 在 $[t_0,t_0+h]$ 上一致有界. 又对 $t\in(t_1,t_0+h)$, $x_n'(t)=f(t-d_n,x_n(t-d_n))$, 故 $|x_n'(t)|\le M$; 在 (t_0,t_1) 上 $x_n'=0$. 因而每个 x_n 在 $[t_0,t_0+h]$ 上以 M 为 Lipschitz 常数:

$$|x_n(t)-x_n(s)|\le M|t-s|.$$

故 $\{x_n\}$ 等度连续.
(3) 取子列. 由 Ascoli-Arzelà 引理, 一致有界且等度连续的函数列 $\{x_n\}$ 有在 $[t_0,t_0+h]$ 上一致收敛的子列, 记为 $\{x_{n_j}\}$, 其极限为 $\phi(t)$. 因 D 为闭集且 $(t,x_{n_j}(t))\in D$, 故 $(t,\phi(t))\in D$, ϕ 连续.
(4) 证明极限是解. 对子列, 当 $t\ge t_0+d_{n_j}$ 时,

$$x_{n_j}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t-d_{n_j}}f(s,x_{n_j}(s))\mathrm{d}s.$$

因 $x_{n_j}\to\phi$ 一致收敛, f 在 D 上一致连续, 且 $d_{n_j}\to0$, 故对每个 $t\in(t_0,t_0+h]$,

$$\int_{t_0}^{t-d_{n_j}}f(s,x_{n_j}(s))\mathrm{d}s\to\int_{t_0}^{t}f(s,\phi(s))\mathrm{d}s.$$

于是

$$\phi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\phi(s))\mathrm{d}s.$$

(在 $t=t_0$ 处两边均为 x_0.) 求导得 $\phi'(t)=f(t,\phi(t))$, 且 $\phi(t_0)=x_0$. 故 ϕ 是初值问题在 $[t_0,t_0+h]$ 上的解. 对 $t\le t_0$ 的情形对称地构造 Tonelli 序列可得 $[t_0-h,t_0]$ 上的解, 合并即得 Peano 定理 (初值问题在 $[t_0-h,t_0+h]$ 上至少有一个解).
结果: 由 Tonelli 序列与 Ascoli-Arzelà 引理证明了 Peano 存在性定理.

习题 4.4(2)

证明: 当 $f(t,x)$ 对 x 满足 Lipschitz 条件时, Tonelli 序列是一致收敛的.

解答

解题思路: 设 f 在 D 上关于 x 满足 Lipschitz 条件 (Lipschitz 常数为 L). 用 Lipschitz 条件估计任意两项 x_n 与 x_m 之差, 得到积分不等式; 再用 Gronwall 不等式给出差的上界, 它随 $n,m\to\infty$ 趋于 0, 从而 $\{x_n\}$ 是 $C[t_0,t_0+h]$ 中的 Cauchy 列.

解答: 设 x_n, x_m 为任意两项 Tonelli 逼近. 记 $d_n = h/n$, $d_m = h/m$. 对 $t \in [t_0, t_0 + h]$, 由定义 (当积分上限不超过 t_0 时积分视为 0),

$$\begin{aligned}|x_n(t) - x_m(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t-d_n} f(s, x_n(s))\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t-d_m} f(s, x_m(s))\mathrm{d}s \right| \\ &\le \int_{t_0}^{t-d_n} \Big| f(s, x_n(s)) - f(s, x_m(s)) \Big| \mathrm{d}s + \left| \int_{t-d_n}^{t-d_m} f(s, x_m(s))\mathrm{d}s \right|.\end{aligned}$$

对第一项用 Lipschitz 条件, 且 $[t_0, t - d_n] \subseteq [t_0, t]$:

$$\int_{t_0}^{t-d_n} \Big| f(s, x_n(s)) - f(s, x_m(s)) \Big| \mathrm{d}s \le L \int_{t_0}^{t} |x_n(s) - x_m(s)| \mathrm{d}s.$$

对第二项, 因 $|f| \le M$:

$$\left| \int_{t-d_n}^{t-d_m} f(s, x_m(s))\mathrm{d}s \right| \le M|d_n - d_m|.$$

记 $g_{nm} = M|d_n - d_m| = Mh\left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}\right|$, 则

$$|x_n(t) - x_m(t)| \le g_{nm} + L \int_{t_0}^{t} |x_n(s) - x_m(s)| \mathrm{d}s.$$

这里 g_{nm} 与 t 无关, 是常数. 由 Gronwall 不等式 (若 $x(t) \le g + \int_{t_0}^{t} Lx(s)\mathrm{d}s$, 则 $x(t) \le g\,\mathrm{e}^{L(t-t_0)}$),

$$|x_n(t) - x_m(t)| \le g_{nm}\,\mathrm{e}^{L(t-t_0)} \le g_{nm}\,\mathrm{e}^{Lh}.$$

于是

$$\max_{t \in [t_0, t_0+h]} |x_n(t) - x_m(t)| \le Mh\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \mathrm{e}^{Lh} \to 0 \qquad (n, m \to \infty).$$

故 $\{x_n\}$ 在完备空间 $C[t_0, t_0 + h]$ (以最大值范数为距离) 中是 Cauchy 列, 从而一致收敛.

结果: 当 f 对 x 满足 Lipschitz 条件时, Tonelli 序列在 $[t_0, t_0 + h]$ 上一致收敛.

习题 4.5(1)

对于怎样的 a, 下列微分方程的每个解都能开拓到无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 上去?

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = |x|^{a-1} + t|x|^{\frac{2a}{3}}$$

解答

解题思路: 用整体解判据: 若存在 $\mathbb{R}$ 上连续的非负函数 $A(t), B(t)$ 使 $|f(t,x)| \le A(t)|x| + B(t)$, 则每个解都可延拓到整个 $\mathbb{R}$. 逐项分析两个幂次 $|x|^{a-1}$ 与 $|x|^{2a/3}$ 能被一次函数控制的 a 的范围, 并对 a 过大 (解有限时间爆炸) 与 a 过小 (方程在 $x=0$ 附近不连续) 说明必要性.

解答: 令 $f(t,x) = |x|^{a-1} + t|x|^{2a/3}$.

(1) 充分性: 先要求两项都能被 $C(1+|x|)$ 控制. 对第一项 $|x|^{a-1}$, 当 $0 \le a-1 \le 1$ 即 $1 \le a \le 2$ 时, 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 有 $|x|^{a-1} \le 1 + |x|$; 对第二项 $t|x|^{2a/3}$, 当 $0 \le 2a/3 \le 1$ 即 $0 \le a \le 3/2$ 时, $|x|^{2a/3} \le 1 + |x|$. 故当

$$1 \le a \le \frac{3}{2}$$

时,

$$|f(t,x)| \le (1+|x|) + (1+|t|)(1+|x|) = (2+|t|) + (1+|t|)|x|.$$

取 $A(t) = 1 + |t|$, $B(t) = 2 + |t|$, 均在 $\mathbb{R}$ 上连续. 由线性控制下的整体存在定理 (若 $|f(t,x)| \le A(t)|x| + B(t)$, 则每个饱和解的存在区间均为整个 (a,b)), 初值问题的每个解都可延拓到 $(-\infty, +\infty)$.

(2) 必要性: 若 $a > 3/2$, 则 $p = 2a/3 > 1$. 取定 $t \ge c > 0$ (c 为常数), 有 $f(t,x) \ge c|x|^p$. 由比较定理, 方程 $u' = c|u|^p$ ($p > 1$) 的解在有限时间内趋于无穷 (爆炸), 故原方程的解不能全部延拓到 $(-\infty, +\infty)$. 若 $a < 1$, 则 $a - 1 < 0$, $|x|^{a-1}$ 在 $x = 0$ 附近无界, f 在直线 $x = 0$ 上不连续, 过 $x(0) = 0$ 的初值问题没有通常意义下的解, 不满足延拓定理的前提, 因而" 每个解都能开拓到 $(-\infty, +\infty)$" 不能成立.

结果: 当且仅当 $1 \le a \le \dfrac{3}{2}$ 时, 方程的每个解都能开拓到 $(-\infty, +\infty)$.

习题 4.5(3)

考虑初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x), \qquad x(0) = x_0$$

其中函数 $f(t,x)$ 在闭区域 $D: 0 \le t \le a, -\infty < x < +\infty$ 上连续且满足

$$|f(t,x) - f(t,z)| \le \frac{q}{t}|x - z|$$

q ($0 < q < 1$) 为常数. 证明: 该初值问题的解在区间 $[0,a]$ 上是存在且唯一的.

解答

解题思路: Lipschitz 常数 $\frac{q}{t}$ 在 $t = 0$ 处无界, 不能直接用 Picard 定理, 但 $\frac{q}{t}$ 在 0 处可积且 $q < 1$. 用 Picard 逐次逼近: 相邻两项之差满足 $\le M_0 q^n t$ 的估计, 故级数一致收敛得存在性; 唯一性用积分不等式加 Gronwall 型放缩.

解答: 记 $M_0 = \max_{t\in[0,a]} |f(t,x_0)|$ (有限, 因 $f(\cdot,x_0)$ 连续). 构造 Picard 序列

$$x_0(t) \equiv x_0, \qquad x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(s,x_n(s))\mathrm{d}s, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

(一) 存在性. 先估计相邻两项之差. 令 $D_n(t) = |x_{n+1}(t) - x_n(t)|$. 当 $n \geq 1$ 时, 由 Lipschitz 条件,

$$D_n(t) \leq \int_0^t |f(s,x_n(s)) - f(s,x_{n-1}(s))|\mathrm{d}s \leq \int_0^t \frac{q}{s} D_{n-1}(s)\mathrm{d}s.$$

而

$$D_0(t) = |x_1(t) - x_0| \leq \int_0^t |f(s,x_0)|\mathrm{d}s \leq M_0 t.$$

由归纳法,

$$D_n(t) \leq \int_0^t \frac{q}{s} \cdot M_0 q^{n-1} s\,\mathrm{d}s = M_0 q^n t, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

于是

$$x_n(t) = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \Big(x_{k+1}(t) - x_k(t)\Big),$$

且 $\sum_{k=0}^{\infty} D_k(t) \leq M_0 t \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{M_0 t}{1-q} < +\infty$, 故 $\{x_n\}$ 在 $[0,a]$ 上一致收敛, 记极限为 $x(t)$. 又

$$|x_n(t) - x_0| \leq \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) \leq \frac{M_0 t}{1-q},$$

且 $|f(s,x_n(s))| \leq |f(s,x_0)| + \dfrac{q}{s}|x_n(s) - x_0| \leq M_0 + \dfrac{qM_0}{1-q}$ 一致有界, 由控制收敛定理, 在

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(s,x_n(s))\mathrm{d}s$$

两边取极限得

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s,x(s))\mathrm{d}s.$$

故 $x(t)$ 是初值问题在 $[0,a]$ 上的解.

(二) 唯一性. 设 x, y 是 $[0,a]$ 上的两个解, $h(t) = |x(t) - y(t)|$. 则

$$h(t) \leq \int_0^t \frac{q}{s} h(s)\mathrm{d}s.$$

由于 $x'(0) = y'(0) = f(0,x_0)$, x, y 在 0 处可微且 $x(0) = y(0) = x_0$, 故 $h(s) = o(s)$

$(s \to 0^+)$, 从而 $h(s)/s$ 在 0 附近可积. 令

$$u(t) = \int_0^t \frac{q}{s} h(s)\mathrm{d}s,$$

则 u 有定义, $u(0) = 0$, $u(t) \to 0$ $(t \to 0^+)$, 且 $u'(t) = \dfrac{q}{t}h(t) \le \dfrac{q}{t}u(t)$. 若在某点 $t_0 > 0$ 处 $u(t_0) > 0$, 则对充分小的 $\epsilon > 0$, 在 $[\epsilon, t_0]$ 上 $u > 0$, 于是 $\dfrac{u'}{u} \le \dfrac{q}{t}$, 积分得

$$\ln \frac{u(t_0)}{u(\epsilon)} \le q \ln \frac{t_0}{\epsilon}, \qquad \text{即} \qquad u(t_0) \le u(\epsilon) \left(\frac{t_0}{\epsilon}\right)^q.$$

令 $\epsilon \to 0^+$. 由 $h(s) = o(s)$ 知 $u(\epsilon) = \int_0^\epsilon \frac{q}{s} h(s)\mathrm{d}s = o(\epsilon)$, 于是

$$u(\epsilon)\epsilon^{-q} = o(\epsilon^{1-q}) \to 0 \qquad (q < 1),$$

从而 $u(t_0) \le t_0^q\, u(\epsilon)\epsilon^{-q} \to 0$, 与 $u(t_0) > 0$ 矛盾. 故 $u \equiv 0$, 从而 $h(t) \le u(t) = 0$, 即 $x \equiv y$.

结果: 初值问题在 $[0, a]$ 上存在唯一解.

习题 4.5(5)

设函数 $f(t, x)$ 在闭区域 $D : 0 \le t \le a, -\infty < x < +\infty$ 上连续, 且存在定义在区间 $[0, +\infty)$ 上的连续函数 $\psi(x)$, 使得 $|f(t, x)| < \psi(|x|)$, 以及存在常数 $\delta_0 \ge 0$, 使得

$$\int_{\delta_0}^{+\infty} \frac{1}{\psi(x)}\,\mathrm{d}x = +\infty$$

证明: 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x)$$

满足初值条件 $x(0) = \xi$ 的解的存在区间为 $[0, a]$.

解答

解题思路: 用反证法 (Wintner 型估计). 若解的最大右区间是 $[0, b)$ 且 $b < a$, 由延拓定理, $|x(t)| \to +\infty$ $(t \to b^-)$; 令 $u(t) = |x(t)|$, 由 $|f(t, x)| < \psi(|x|)$ 得 $\dfrac{u'}{\psi(u)} < 1$, 积分得 $\int_{|\xi|}^{u(t)} \dfrac{\mathrm{d}u}{\psi(u)} < t$, 与 $\int^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}u}{\psi(u)} = +\infty$ 矛盾.

解答: 设 $x = \phi(t)$ 是初值问题 $x' = f(t, x)$, $x(0) = \xi$ 的饱和解, 其最大右存在区间为 $[0, \beta)$.

由 $\int_{\delta_0}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}u}{\psi(u)} = +\infty$ 及 ψ 连续, 有 $\int_{|\xi|}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}u}{\psi(u)} = +\infty$ (若 $|\xi| < \delta_0$, 区间 $[|\xi|, \delta_0]$ 上 ψ 连续且被积函数为正, 积分有限, 不改变发散性).

反设 $\beta < a$. 由解的延拓定理, 当 $t \to \beta^-$ 时 $(t, \phi(t))$ 必趋于 D 的边界. 因 t 不趋于 0 也不越过 a, 只能有 $|\phi(t)| \to +\infty$. 令 $u(t) = |\phi(t)|$. 在 $\phi(t) \neq 0$ 且可微处,

$$u'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\phi(t)| \leq |\phi'(t)| = |f(t, \phi(t))| < \psi(|\phi(t)|) = \psi(u(t)),$$

故 $\dfrac{u'(t)}{\psi(u(t))} < 1$. 对 $t \in (0, \beta)$, 两边从 0 积分到 t (换元 $u = |\phi(s)|$):

$$\int_{|\xi|}^{u(t)} \frac{\mathrm{d}u}{\psi(u)} < t < \beta < a.$$

因为 $u(t) \to +\infty$ $(t \to \beta^-)$, 令 $t \to \beta^-$ 得

$$\int_{|\xi|}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\psi(u)} \leq \beta < a < +\infty,$$

与 $\int_{|\xi|}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}u}{\psi(u)} = +\infty$ 矛盾. 故 $\beta \not< a$, 即 $\beta = a$. 又 f 在 D 上连续, ϕ 可连续延拓到 $t = a$, 故解的存在区间为 $[0, a]$.

结果: 初值问题 $x' = f(t, x)$, $x(0) = \xi$ 的解的存在区间为 $[0, a]$.

习题 4.6(1)

考虑初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

假设函数 $f(t, x)$ 在矩形闭区域

$$D = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b\}$$

上连续, 令

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \qquad M = \max_{(t,x)\in D} |f(t, x)|$$

证明: 该初值问题的最大解 $x = Z(t)$ 与最小解 $x = W(t)$ 之间充满了其他解, 即对于任一满足

$$|t_1 - t_0| \leq h, \qquad W(t_1) \leq x_1 \leq Z(t_1)$$

的点 (t_1, x_1), 该初值问题在区间 $|t - t_0| \leq h$ 上至少有一个解 $x = \phi(t)$, 满足 $\phi(t_1) = x_1$.

解答

解题思路: 端点 $x_1 = W(t_1)$ 或 $x_1 = Z(t_1)$ 时分别取 W 或 Z 即可, 只需处理 $W(t_1) < x_1 < Z(t_1)$ 的情形. 从 (t_1, x_1) 向左解初值问题, 其解要么碰到 W 或 Z (此时与 W 或

Z 粘合得到过 (t_0, x_0) 的解), 要么始终夹在 W 与 Z 之间而到达 t_0 且取值恰为 x_0. 再向右延拓, 两段粘合即得所求.

解答: 只证 $t_1 \in (t_0, t_0 + h]$ 的情形, $t_1 \in [t_0 - h, t_0)$ 的情形把时间反向即得; $t_1 = t_0$ 时取 $x_1 = x_0$ 显然. 若 $x_1 = W(t_1)$ 或 $x_1 = Z(t_1)$, 分别取 $\phi = W$ 或 $\phi = Z$ 即可. 以下设 $W(t_1) < x_1 < Z(t_1)$.

(1) 向左构造. 考虑反向初值问题

$$x' = f(t, x), \qquad x(t_1) = x_1, \qquad t \in [t_0, t_1].$$

由 Peano 定理它有解. 取其一个左向饱和解 $U(t)$ (最大左存在区间 $(\alpha, t_1]$). 因为 x_1 严格位于漏斗 $W(t_1) < x_1 < Z(t_1)$ 内部, 而漏斗 $[W(t), Z(t)]$ 始终包含在 D 内 ($|W(t) - x_0| \le b$, $|Z(t) - x_0| \le b$, 故区间上的点也满足 $|x - x_0| \le b$), 分两种情形:

(一) U 在 $(t_0, t_1]$ 上始终不与 W 或 Z 相交. 则 U 一直保持在漏斗内部, 从而不越出 D, 由延拓定理 U 可延拓到 t_0, 且 $W(t_0) \le U(t_0) \le Z(t_0)$, 即 $U(t_0) = x_0$. 故 U 本身就是原初值问题在 $[t_0, t_1]$ 上过 (t_1, x_1) 的解.

(二) U 首次与 Z 相交于某 $\tau \in [t_0, t_1)$, 即 $U(\tau) = Z(\tau)$. 则

$$\phi^-(t) = \begin{cases} Z(t), & t \in [t_0, \tau], \\ U(t), & t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

在 τ 处两端取值与导数相同 (均为 $f(\tau, Z(\tau))$), 故 ϕ^- 是 $[t_0, t_1]$ 上的解, 且 $\phi^-(t_0) = Z(t_0) = x_0$, $\phi^-(t_1) = U(t_1) = x_1$. 与 W 相交的情形完全类似.

故无论如何, 存在 $[t_0, t_1]$ 上的解 ϕ^-, 满足 $\phi^-(t_0) = x_0$, $\phi^-(t_1) = x_1$.

(2) 向右延拓. 考虑正向初值问题

$$x' = f(t, x), \qquad x(t_1) = x_1, \qquad t \in [t_1, t_0 + h].$$

对它的任一右向饱和解 $V(t)$, 与 (1) 同样论证: 若 V 与 W 或 Z 相交, 则与 W 或 Z 粘合得到 $[t_1, t_0 + h]$ 上的解; 若始终不与 W, Z 相交, 则保持在漏斗内而延拓到 $t_0 + h$. 总之存在 $[t_1, t_0 + h]$ 上的解 V, 满足 $V(t_1) = x_1$.

(3) 粘合. 令

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi^-(t), & t \in [t_0, t_1], \\ V(t), & t \in [t_1, t_0 + h], \end{cases}$$

则 ϕ 是 $[t_0, t_0 + h]$ 上初值问题 $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ 的解, 且 $\phi(t_1) = x_1$. 对 $t_1 < t_0$ 的情形对称处理, 命题得证.

结果: 最大解与最小解之间处处有其他解, 即过漏斗内任一点的解都存在.

习题 4.7(1)

举例说明: 当微分方程初值问题的解不唯一时, 它的积分曲线族在局部范围内不能视作平行直线族.

解答

解题思路: 取一个解不唯一的典型方程, 写出过同一点的多条积分曲线, 观察它们在局部并不构成" 互不相交, 彼此平行" 的曲线族.

解答: 考察初值问题

$$x' = |x|^{1/2}, \qquad x(0) = 0.$$

分离变量: 在 $x > 0$ 时 $x' = x^{1/2}$, 得 $2\sqrt{x} = t + C$; 在 $x < 0$ 时 $x' = (-x)^{1/2}$, 得 $-2\sqrt{-x} = t + C$. 于是除常数解 $x \equiv 0$ 外, 过原点 $x(0) = 0$ 的解还有前向正分支

$$x = \frac{(t-c)_+^2}{4} \qquad (c \geq 0),$$

即抛物线段 $x = \dfrac{(t-c)^2}{4}$ $(t \geq c)$ 与线段 $x = 0$ $(0 \leq t \leq c)$ 的粘合; 以及后向负分支

$$x = -\frac{(c-t)_+^2}{4} \qquad (c \leq 0),$$

即抛物线段 $x = -\dfrac{(c-t)^2}{4}$ $(t \leq c)$ 与线段 $x = 0$ $(t \geq c)$ 的粘合. 特别地 $c = 0$ 对应 $x = \pm\dfrac{t^2}{4}$. 这些积分曲线有无限多条都通过原点 $(0, 0)$, 且在原点的任何小邻域内彼此交织, 互相重叠, 曲线族既非一族互不相交的曲线, 也非一族近似平行的直线.

对比: 当解唯一时 (例如满足 Lipschitz 条件), 由解对初值的连续依赖性, 邻近初值的积分曲线互相接近且不相交, 局部近似一族平行直线. 而本例中同一初值点发出多条积分曲线, 在任意小邻域内都不可能用一族平行直线来近似.

结果: 以 $x' = |x|^{1/2}$, $x(0) = 0$ 为例, 解不唯一, 过原点的积分曲线族局部不能视作平行直线族.

习题 4.7(2)

举例说明: 当微分方程初值问题的解不唯一时, 过某个初值点的最大解对于初值不是连续的.

解答

解题思路: 取 $x' = 3x^{2/3}$. 写出过 $(0, x_0)$ 的最大解在 $t = -1$ 处的取值, 计算 $x_0 \to 0^-$ 的极限, 与 $x_0 = 0$ 时的值比较, 说明不相等.

解答: 考察方程

$$x' = 3x^{2/3}.$$

(1) 当 $x_0=0$ 时, 过 $(0,0)$ 的解有 $x\equiv 0$ 与 $x=t^3$ 等. 在 $t<0$ 时 $t^3<0$, 故最大解取常数 $x=0$; 在 $t>0$ 时最大解取 $x=t^3$. 即最大解

$$Z(t;0,0)=\max\{0,t^3\},\qquad \text{特别地}\quad Z(-1;0,0)=0.$$

(2) 当 $x_0<0$ 时, 在 $x<0$ 区域内方程的解为 $x=(t-C)^3$, 其中 C 由初值确定: $(0-C)^3=x_0$, 即 $C=(-x_0)^{1/3}>0$. 该解在 $t<C$ 上保持 $x<0$, 因而是过 $(0,x_0)$ 的最大解 (在 $x<0$ 区域内解唯一). 故当 $|x_0|$ 充分小 (使 $-1<C$) 时,

$$Z(-1;0,x_0)=(-1-C)^3=\left(-1-(-x_0)^{1/3}\right)^3.$$

于是

$$\lim_{x_0\to 0^-}Z(-1;0,x_0)=\lim_{x_0\to 0^-}\left(-1-(-x_0)^{1/3}\right)^3=(-1)^3=-1$$

而

$$Z(-1;0,0)=0.$$

两者不相等, 故最大解 $Z(t;t_0,x_0)$ 在 $(t_0,x_0)=(0,0)$ 处关于初值 x_0 不连续.
结果: 对方程 $x'=3x^{2/3}$, 最大解在初值 $x_0=0$ 处不连续.

习题 4.8(2)

设函数 $x(t;t_0,x_0)$ 是初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x),\qquad x(t_0)=x_0$$

的解, 其中函数 $f(t,x)$ 关于 x 是连续可微的, 证明:

$$(1)\quad \frac{\partial x}{\partial t_0}(t;t_0,x_0)\ \text{连续可微}$$

$$(2)\quad \frac{\partial x}{\partial t_0}(t;t_0,x_0)+\frac{\partial x}{\partial x_0}(t;t_0,x_0)f(t_0,x_0)\equiv 0$$

解答

解题思路: 由 C^1 依赖性定理, 解对 t_0,x_0 连续可微. 将解代入等价的积分方程, 分别对 t_0,x_0 求导得到两个线性变分方程; 两方程系数相同, 初值相差一个常数因子, 比较即得 (2).
解答: 记 $x(t)=x(t;t_0,x_0)$. 因 f 对 x 连续可微 (从而关于 x 满足局部 Lipschitz 条件), 由解对初值的 C^1 依赖性定理, $x(t;t_0,x_0)$ 对 t,t_0,x_0 连续可微. 解满足等价的积

分方程

$$x(t;t_0,x_0)=x_0+\int_{t_0}^{t} f\Big(s,x(s;t_0,x_0)\Big)\mathrm{d}s.$$

(1) 对 x_0 求导, 令 $z_2(t)=\dfrac{\partial x}{\partial x_0}(t;t_0,x_0)$:

$$z_2(t)=1+\int_{t_0}^{t} f_x(s,x(s))z_2(s)\mathrm{d}s,$$

求导得

$$z_2'(t)=f_x(t,x(t))z_2(t),\qquad z_2(t_0)=1.$$

对 t_0 求导 (对含参变量积分的 Leibniz 法则), 令 $z_1(t)=\dfrac{\partial x}{\partial t_0}(t;t_0,x_0)$:

$$z_1(t)=-f(t_0,x_0)+\int_{t_0}^{t} f_x(s,x(s))z_1(s)\mathrm{d}s,$$

求导得

$$z_1'(t)=f_x(t,x(t))z_1(t),\qquad z_1(t_0)=-f(t_0,x_0).$$

系数 $t\mapsto f_x(t,x(t))$ 连续, 线性方程 $y'=f_x(t,x(t))y$ 的解与其导数都连续, 故 z_1 连续可微, 即 $\dfrac{\partial x}{\partial t_0}$ 连续可微.

(2) 令 $\tilde{z}(t)=-f(t_0,x_0)z_2(t)$. 则

$$\tilde{z}'(t)=-f(t_0,x_0)f_x(t,x(t))z_2(t)=f_x(t,x(t))\tilde{z}(t),$$

且

$$\tilde{z}(t_0)=-f(t_0,x_0)z_2(t_0)=-f(t_0,x_0).$$

故 z_1 与 $\tilde{z}$ 满足同一个线性齐次方程和同一个初值. 由线性方程初值问题解的唯一性, $z_1(t)\equiv\tilde{z}(t)$, 即

$$\frac{\partial x}{\partial t_0}(t;t_0,x_0)+f(t_0,x_0)\frac{\partial x}{\partial x_0}(t;t_0,x_0)\equiv 0.$$

结果: (1)(2) 均得证.

习题 4.8(4)

求微分方程的解对初值或参数的导数:

$$(1)\quad y'=2x+\mu y^2,\qquad y(0)=\mu-1,\qquad \text{求}\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$$

(2) $y''=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{y}$, $y(1)=1$, $y'(1)=\mu$, 求 $\left.\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=1}$

解答

解题思路: 先把参数固定在其取值处求出基础解, 再对参数列出变分方程 (把方程关于参数线性化) 并求解. (1) 中 $\mu=0$ 时方程化为 $y'=2x$; (2) 中 $\mu=1$ 时 $y=x$ 是显式解, 变分方程是 Euler 方程.

解答: (1) $\mu=0$ 时, $y'=2x$, $y(0)=-1$, 解得 $y=x^2-1$. 令 $z=\dfrac{\partial y}{\partial \mu}$, 对 $f(x,y,\mu)=2x+\mu y^2$ 有 $f_y=2\mu y$, $f_\mu=y^2$, 变分方程为

$$z'=f_y\,z+f_\mu=2\mu y\,z+y^2,\qquad z(0)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}(\mu-1)\right|_{\mu=0}=1.$$

在 $\mu=0$ 处, $z'=y^2=(x^2-1)^2$, $z(0)=1$, 积分得

$$z(x)=1+\int_0^x(s^2-1)^2\mathrm{d}s=1+\int_0^x(s^4-2s^2+1)\mathrm{d}s=1+\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x.$$

(2) $\mu=1$ 时, $y''=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{y}$, $y(1)=1$, $y'(1)=1$. 验证 $y=x$: $y''=0$, 右端 $\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x}=0$, 且 $y(1)=1$, $y'(1)=1$, 故 $y=x$ 是解. 令 $z=\dfrac{\partial y}{\partial \mu}$. 对 $g(x,y)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{y}$ 有 $g_y=\dfrac{2}{y^2}$, 变分方程为

$$z''=\frac{2}{y^2}z,\qquad z(1)=0,\qquad z'(1)=1$$

(因 $y(1)=1$ 与 μ 无关, 而 $y'(1)=\mu$). 在 $y=x$ 处 $z''=\dfrac{2}{x^2}z$, 即 $x^2z''-2z=0$, 为 Euler 方程. 设 $z=x^r$, 得 $r(r-1)-2=0$, $r=2$ 或 $r=-1$, 故通解

$$z=Ax^2+Bx^{-1}.$$

由 $z(1)=0$ 得 $A+B=0$; 由 $z'(1)=1$ 得 $2A-B=1$. 解出 $A=\dfrac{1}{3}$, $B=-\dfrac{1}{3}$, 于是

$$z(x)=\frac{1}{3}\left(x^2-\frac{1}{x}\right).$$

结果:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}=1+x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5,\qquad \left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=1}=\frac{1}{3}\left(x^2-\frac{1}{x}\right).$$

习题 4.9(2)

求函数 f, 使得 $x=\sin t$ 是微分方程

$$x = tp + f(p)$$

的奇解, 其中 $p = x'$.

解答

解题思路: 方程 $x = tp + f(p)$ 是 Clairaut 型方程. 对其求导得 $p'(t + f'(p)) = 0$: $p' = 0$ 给出通解直线族, $t + f'(p) = 0$ 给出奇解. 把 $x = \sin t$, $p = \cos t$ 代入这两式解出 f.
解答: 对 $x = tp + f(p)$ 关于 t 求导, 注意到 $p = p(t)$:

$$p = p + tp' + f'(p)p',$$

即

$$p'\Big(t + f'(p)\Big) = 0.$$

若 $p' \equiv 0$, 则 $p = c$, 代入原方程得通解直线族 $x = ct + f(c)$. 若 $t + f'(p) = 0$, 则由原方程与它消去 p 得到的曲线即为奇解 (包络).
设奇解为 $x = \sin t$, 则 $p = x' = \cos t$. 代入 $t + f'(p) = 0$:

$$f'(\cos t) = -t, \qquad \text{即} \quad f'(p) = -\arccos p.$$

代入原方程 $x = tp + f(p)$:

$$\sin t = t\cos t + f(\cos t),$$

故

$$f(\cos t) = \sin t - t\cos t.$$

令 $p = \cos t$, 用 $\sin t = \sqrt{1-p^2}$, $t = \arccos p$ 得

$$f(p) = \sqrt{1-p^2} - p\arccos p, \qquad -1 \le p \le 1.$$

验证: $f'(p) = \dfrac{-p}{\sqrt{1-p^2}} - \arccos p + p \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-p^2}} = -\arccos p$, 确实满足 $f'(p) = -t$.
结果: $f(p) = \sqrt{1-p^2} - p\arccos p$ $(-1 \le p \le 1)$.

习题 4.9(3)

给定平面上一条连续可微曲线 $\gamma : x = f(t)$, 请找出一个以 $x = f(t)$ 为奇解的微分方程.

解答

解题思路: 构造一族与 γ 相切的积分曲线, 使 γ 成为该曲线族的包络, 则该族满足的一阶微分方程就以 $x=f(t)$ 为奇解. 取抛物线族 $x=f(t)+\dfrac{1}{4}(t-c)^2$ 即可, 其包络恰为 γ.

解答: 考虑单参数曲线族

$$x=f(t)+\frac{1}{4}(t-c)^2, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

它的 c-判别式为

$$F(t,x,c)=x-f(t)-\frac{1}{4}(t-c)^2=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial c}=\frac{1}{2}(t-c)=0,$$

由 $c=t$ 代入 $F=0$ 得 $x=f(t)$. 且 $\left(\dfrac{\partial F}{\partial t},\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)=(-f'(t)-\frac{1}{2}(t-c),1)\neq(0,0)$, 非退化条件满足, 故 $x=f(t)$ 是该抛物线族的包络. 每一条曲线 $x=f(t)+\dfrac{1}{4}(t-c)^2$ 在 $t=c$ 处与 γ 相切 (取值 $f(c)$, 斜率 $f'(c)$), 因此 γ 是族中每条曲线都与之相切的曲线, 即包络.

现在写出该曲线族满足的微分方程. 族中任一曲线满足: 对某个 c,

$$x-f(t)=\frac{1}{4}(t-c)^2, \qquad x'-f'(t)=\frac{1}{2}(t-c),$$

消去 c 得

$$\Big(x'-f'(t)\Big)^2=x-f(t).$$

反之, 令 $u=x-f(t)$, 该方程化为 $(u')^2=u$, 即 $u'=\pm\sqrt{u}$. 其解为 $u\equiv 0$ 与 $u=\dfrac{1}{4}(t-c)^2$, 分别对应 $x=f(t)$ 与 $x=f(t)+\dfrac{1}{4}(t-c)^2$. 故方程 $\Big(x'-f'(t)\Big)^2=x-f(t)$ 的通解是上述抛物线族, 而 $x=f(t)$ 不在通解族中, 恰为通解族的包络, 因而是该方程的奇解.

结果: 一个以 $x=f(t)$ 为奇解的微分方程是

$$\Big(x'-f'(t)\Big)^2=x-f(t).$$

3

第三次作业

习题 14

求方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y + x(x^2+y^2)(x^2+y^2-1), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + y(x^2+y^2)(x^2+y^2-1) \end{cases}$$

的首次积分, 并结合这些首次积分判定该方程组在相平面上的轨线及其性态.

解答

解题思路: 系统是平面自治系统. 改用极坐标 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 后, r 与 θ 各自满足单变量微分方程, 分别积分即得两个函数独立的首次积分, 再由 r 的单调性与 θ 的等速旋转判定轨线性态.

解答: 令 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r > 0)$, 记 $r^2 = x^2 + y^2$. 由

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}, \qquad r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}$$

计算

$$r\dot{r} = x\Big(-y + xr^2(r^2-1)\Big) + y\Big(x + yr^2(r^2-1)\Big) = r^4(r^2-1),$$

故

$$\dot{r} = r^3(r^2-1);$$

又

$$r^2\dot{\theta} = x\Big(x + yr^2(r^2-1)\Big) - y\Big(-y + xr^2(r^2-1)\Big) = x^2 + y^2 = r^2,$$

故 $\dot{\theta} = 1$, 即 $\theta = t + \theta_0$. 于是

$$V_1(t, x, y) = \arctan\frac{y}{x} - t$$

满足 $\mathrm{d}V_1/\mathrm{d}t = \dot{\theta} - 1 = 0$, 是首次积分.

对 $\dot{r} = r^3(r^2-1)$ 分离变量并作部分分式

$$\frac{1}{r^3(r^2-1)} = -\frac{1}{r} - \frac{1}{r^3} + \frac{1}{2(r-1)} + \frac{1}{2(r+1)},$$

得

$$-\ln|r|+\frac{1}{2r^2}+\frac{1}{2}\ln|r^2-1|=t+C,$$

即

$$V_2(t,x,y)=\frac{1}{2(x^2+y^2)}+\frac{1}{2}\ln\frac{|x^2+y^2-1|}{x^2+y^2}-t$$

是第二个首次积分. 在 $r\notin\{0,1\}$ 且 $\sin\theta,\cos\theta$ 有定义的区域内,

$$\det\frac{\partial(V_1,V_2)}{\partial(x,y)}\neq 0,$$

故 V_1,V_2 函数独立, 二者确定了系统的通解.
相平面上的轨线由 $\dot\theta=1$ 与 $\dot r=r^3(r^2-1)$ 描述.

- $r=0$ 即原点, 它是平衡点 ($\dot x=\dot y=0$).
- $r=1$: $\dot r=0$, 而 $\dot\theta=1$, 故单位圆周是闭轨, 逆时针作角速度为 1 的匀速圆周运动, 周期为 2π.
- $0<r<1$: $\dot r=r^3(r^2-1)<0$, 半径单调减小且 θ 匀速增大, 轨线逆时针螺旋地趋于原点 (当 $t\to+\infty$ 时 $r\sim 1/\sqrt{2t}\to 0$).
- $r>1$: $\dot r>0$, 半径单调增大, 轨线逆时针螺旋向外, 并在有限时间内发散至无穷 (解爆破).

结果: 两个函数独立的首次积分为

$$V_1=\arctan\frac{y}{x}-t,\qquad V_2=\frac{1}{2(x^2+y^2)}+\frac{1}{2}\ln\frac{|x^2+y^2-1|}{x^2+y^2}-t.$$

轨线性态: 原点为平衡点; 单位圆周 $r=1$ 为逆时针闭轨 (周期 2π), 且不稳定 (圆内圆外的轨线都远离它); 单位圆内的轨线逆时针螺旋收敛于原点, 圆外的轨线逆时针螺旋发散至无穷.

习题 2.5(2)

求下列微分系统的函数独立的首次积分, 并确定其解:

$$(2)\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=yz,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=xz,\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=xy$$

$$(3)\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{y}{x-y},\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{x}{x-y}$$

解答

解题思路: 对 (2), 由 $x\dot x=y\dot y=z\dot z=xyz$ 直接看出两两平方差是首次积分, 余下的一步归结为可分离变量的积分; 对 (3), 注意到 $\dot x-\dot y=-1$ 与 $x\dot x-y\dot y=0$, 可分别得到

含 t 与不含 t 的两个首次积分, 进而显式解出.

解答:

(2) 由

$$\dot{x} = yz, \quad \dot{y} = xz, \quad \dot{z} = xy$$

得 $x\dot{x} = y\dot{y} = z\dot{z} = 2^{-1}\,\mathrm{d}(x^2)/\mathrm{d}t = xyz$, 故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2 - y^2) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2 - z^2) = 0,$$

即

$$V_1 = x^2 - y^2, \qquad V_2 = x^2 - z^2$$

是两个首次积分. 它们的 Jacobi 矩阵为

$$\frac{\partial(V_1, V_2)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 2x & 0 & -2z \end{pmatrix},$$

其 2×2 子式 $\det \begin{pmatrix} -2y & 0 \\ 0 & -2z \end{pmatrix} = 4yz$, 在 $yz \neq 0$ 处不为零, 故 V_1, V_2 函数独立.

确定解: 记 $u = x^2$, 则 $y^2 = u - c_1$, $z^2 = u - c_2$ (c_1, c_2 为常数). 由 $\dot{x} = yz$ 得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2xyz = \pm 2\sqrt{u(u - c_1)(u - c_2)},$$

分离变量积分

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(u - c_1)(u - c_2)}} = \pm 2(t - t_0).$$

于是解由两个首次积分 $x^2 - y^2 = c_1$, $x^2 - z^2 = c_2$ 连同上述积分关系隐式确定.

(3) 计算

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x - y) = \dot{x} - \dot{y} = \frac{y}{x - y} - \frac{x}{x - y} = -1,$$

故 $\mathrm{d}(x - y + t)/\mathrm{d}t = 0$, 即

$$V_1 = x - y + t$$

是首次积分. 又

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2 - y^2) = 2x\dot{x} - 2y\dot{y} = \frac{2xy}{x - y} - \frac{2xy}{x - y} = 0,$$

故

$$V_2 = x^2 - y^2$$

也是首次积分. 在 $x \neq y$ 处,

$$\det \frac{\partial(V_1, V_2)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2x & -2y \end{pmatrix} = 2(x-y) \neq 0,$$

故 V_1, V_2 函数独立.
由 V_1 得 $x-y = c_1 - t$, 由 V_2 得 $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = c_2$, 于是 $x+y = c_2/(c_1-t)$. 解出

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(c_1 - t + \frac{c_2}{c_1 - t}\right), \qquad y(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{c_2}{c_1 - t} - (c_1 - t)\right).$$

结果: (2) 的首次积分为 $V_1 = x^2 - y^2$, $V_2 = x^2 - z^2$, 解由它们与积分 $\int \mathrm{d}u/\sqrt{u(u-c_1)(u-c_2)} = \pm 2(t - t_0)$ 确定. (3) 的首次积分为 $V_1 = x - y + t$, $V_2 = x^2 - y^2$, 解为

$$x = \frac{1}{2}\left(c_1 - t + \frac{c_2}{c_1 - t}\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(\frac{c_2}{c_1 - t} - c_1 + t\right).$$

习题 2.5(3)

设 n 维微分系统 (2.33) 在区域 G 上有一个首次积分, 证明: 系统 (2.33) 在区域 G 上的求解问题可以转化为 $n-1$ 维微分系统在区域 G 上的求解问题.
考虑由 n 个一阶微分方程组成的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = f_1(t, x_1, \cdots, x_n), \\ \qquad \cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(t, x_1, \cdots, x_n), \\ \qquad \cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = f_n(t, x_1, \cdots, x_n) \end{cases} \tag{2.33}$$

其中 $f_1(t, x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_n(t, x_1, \cdots, x_n)$ 是区域 $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 上的连续函数并且对 $(x_1, \cdots, x_n)$ 连续可微. 一阶微分方程组 (2.33) 也称为 n 维微分系统 (简称微分系统或系统).

解答

解题思路: 首次积分 $V(t, x_1, \cdots, x_n) = c$ 在 $V_{x_n} \neq 0$ 处可用隐函数定理解出 x_n, 把它代进前 $n-1$ 个方程便得到一个 $n-1$ 维系统; 再验证第 n 个方程沿所构造的曲线自动成立.
解答: 设 $V(t, x_1, \cdots, x_n)$ 是系统 (2.33) 在 G 上的一个首次积分. 由定义, V 在 G 的

任一子域上均不恒为常数, 故存在 $p_0 \in G$ 使 $\operatorname{grad} V \neq 0$; 必要时对变量重新编号, 可设 $\partial V/\partial x_n \neq 0$ 于 p_0 的某邻域 $G_0 \subseteq G$.
在 G_0 上取定常数 c, 由隐函数定理, 方程

$$V(t, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) = c$$

唯一确定 x_n 为其余变量的连续可微函数

$$x_n = \varphi(t, x_1, \cdots, x_{n-1}; c).$$

把它代入 (2.33) 的前 $n-1$ 个方程, 得

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i\Big(t, x_1, \cdots, x_{n-1}, \varphi(t, x_1, \cdots, x_{n-1}; c)\Big), \qquad i = 1, \cdots, n-1, \qquad (*)$$

这是一个定义在 G_0 上的含参数 c 的 $n-1$ 维微分系统.
证明两者等价.

1. 设 $(x_1(t), \cdots, x_{n-1}(t))$ 是 $(*)$ 在 G_0 上的一个解, 令 $x_n(t) = \varphi(t, x_1(t), \cdots, x_{n-1}(t); c)$. 前 $n-1$ 个方程由构造已满足. 对恒等式

   $$V(t, x_1(t), \cdots, x_{n-1}(t), x_n(t)) \equiv c$$

   求导, 得

   $$V_t + \sum_{i=1}^{n-1} V_{x_i}\dot{x}_i + V_{x_n}\dot{x}_n = 0.$$

   另一方面, V 是首次积分, 在 G_0 上恒有

   $$V_t + \sum_{i=1}^{n-1} V_{x_i} f_i + V_{x_n} f_n = 0.$$

   两式相减, 利用 $\dot{x}_i = f_i$ $(i < n)$ 得 $V_{x_n}(\dot{x}_n - f_n) = 0$. 因 $V_{x_n} \neq 0$, 故 $\dot{x}_n = f_n$, 第 n 个方程成立. 所以每条这样的曲线都是 (2.33) 在 G_0 上的解.
2. 反过来, (2.33) 的任一解 $x = \boldsymbol{\phi}(t)$ 满足 $V(t, \boldsymbol{\phi}(t)) \equiv c_0$ (某常数), 故其前 $n-1$ 个分量必是 $(*)$ 对应于 $c = c_0$ 的解.

因此, 求解 n 维系统 (2.33) 等价于求解 $n-1$ 维系统 $(*)$, 第 n 个分量由 $V = c$ 自动给出.
结果: 一个首次积分可把 n 维系统降为含一个参数的 $n-1$ 维系统; 原系统的解由 $n-1$ 维系统的解与隐式关系 $V = c$ 拼合而成, 且第 n 个方程自动满足.

4

第四次作业

习题 3.1(3)

讨论下列向量函数组在 $\mathbb{R}$ 上是否线性相关, 以及其中哪些向量函数组能构成某个齐次线性系统的基本解矩阵:

$$(2)\quad \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t\cos t \\ \mathrm{e}^t\sin t \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$(4)\quad \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ 2\mathrm{e}^t \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} t \\ \cos t \\ te^t \end{pmatrix}$$

解答

解题思路: 用 Wronski 行列式判定线性相关; 一个 n 元向量函数组能构成某个齐次线性系统 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基本解矩阵当且仅当它在区间上线性无关 (此时取 $\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{X}'(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t)$ 即可).

解答: **(2)** 记 $\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t\cos t & -\sin t \\ \mathrm{e}^t\sin t & \cos t \end{pmatrix}$, 其 Wronski 行列式为

$$W(t) = \det\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t\cos t & -\sin t \\ \mathrm{e}^t\sin t & \cos t \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t\cos^2 t + \mathrm{e}^t\sin^2 t = \mathrm{e}^t \neq 0 \qquad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

故两个向量函数在 $\mathbb{R}$ 上线性无关. 取 $\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{X}'(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t)$ (连续矩阵函数), 则 $\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t)$, 即 $\boldsymbol{X}$ 是系统 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基本解矩阵. 故 (2) 能构成基本解矩阵.

(4) 第二个向量函数恰为第一个的两倍:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ 2\mathrm{e}^t \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ e^t \end{pmatrix},$$

故存在不全为零的常数 $2,-1,0$ 使

$$2\begin{pmatrix}1\\ t\\ e^t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\ 2t\\ 2\mathrm{e}^t\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}t\\ \cos t\\ te^t\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

对一切 t 成立, 三个向量函数线性相关. 基本解矩阵要求列向量线性无关, 故 (4) 不能构成基本解矩阵.

结果:(2) 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关, 能构成基本解矩阵; (4) 线性相关, 不能构成基本解矩阵.

习题 3.1(4)

求齐次线性系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A(t)\boldsymbol{x}$$

的基本解矩阵和通解, 其中 $A(t)$ 分别如下:

$$(1)\quad \begin{pmatrix}\frac{1}{t}&0\\ 0&\frac{1}{t}\end{pmatrix}\qquad (t>0)$$

$$(4)\quad \begin{pmatrix}t&\mathrm{e}^t&1\\ 0&t^2&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}$$

解答

解题思路:(1) 是对角矩阵, 各分量解耦, 直接逐分量积分; (4) 是上三角矩阵, 从最后一个方程自下而上逐个解出, 每步都是一阶线性方程.

解答: (1) 系统为

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t}x_1,\qquad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t}x_2\qquad (t>0).$$

分离变量 $\mathrm{d}x_i/x_i=\mathrm{d}t/t$, 得 $x_1=c_1t$, $x_2=c_2t$. 基本解矩阵与通解为

$$\boldsymbol{X}(t)=\begin{pmatrix}t&0\\ 0&t\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}c_1t\\ c_2t\end{pmatrix}.$$

检验: $\boldsymbol{X}'(t)=\begin{pmatrix}1&0\\ 0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t)$, 且 $\det\boldsymbol{X}=t^2\neq 0$.

(4) 系统为

$$\dot{x}_1 = tx_1 + \mathrm{e}^t x_2 + x_3, \qquad \dot{x}_2 = t^2 x_2, \qquad \dot{x}_3 = x_3.$$

自下而上求解. $\dot{x}_3 = x_3$ 给出 $x_3 = c_3\mathrm{e}^t$; $\dot{x}_2 = t^2 x_2$ 给出 $x_2 = c_2\mathrm{e}^{t^3/3}$. 代入第一式,

$$\dot{x}_1 - tx_1 = c_2\mathrm{e}^{t+t^3/3} + c_3\mathrm{e}^t.$$

乘以积分因子 $\mathrm{e}^{-t^2/2}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t^2/2}x_1\right) = c_2\mathrm{e}^{t+t^3/3-t^2/2} + c_3\mathrm{e}^{t-t^2/2},$$

故

$$x_1 = \mathrm{e}^{t^2/2}\left[c_1 + c_2\int_0^t \mathrm{e}^{s+s^3/3-s^2/2}\,\mathrm{d}s + c_3\int_0^t \mathrm{e}^{s-s^2/2}\,\mathrm{d}s\right].$$

取

$$I_1(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{s+s^3/3-s^2/2}\,\mathrm{d}s, \qquad I_2(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{s-s^2/2}\,\mathrm{d}s,$$

则基本解矩阵 (在 $t=0$ 处为单位矩阵) 为

$$\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t^2/2} & \mathrm{e}^{t^2/2}I_1(t) & \mathrm{e}^{t^2/2}I_2(t) \\ 0 & \mathrm{e}^{t^3/3} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix},$$

通解为 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{c}$. 其中

$$x_1 = c_1\mathrm{e}^{t^2/2} + c_2\mathrm{e}^{t^2/2}I_1(t) + c_3\mathrm{e}^{t^2/2}I_2(t), \quad x_2 = c_2\mathrm{e}^{t^3/3}, \quad x_3 = c_3\mathrm{e}^t.$$

结果:(1) 的基本解矩阵为 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$, 通解 $\boldsymbol{x} = (c_1 t, c_2 t)^{\mathrm{T}}$; (4) 的基本解矩阵如上三角矩阵所示, 通解为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{c}$.

习题 3.1(5)

验证基本解矩阵完全决定齐次线性系统, 即如果下列两个齐次线性系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A(t)\boldsymbol{x}, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = B(t)\boldsymbol{x}$$

有相同的基本解矩阵, 则

$$A(t) \equiv B(t)$$

解答

解题思路: 把基本解矩阵代入两个系统的矩阵方程 $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$, 相减后利用基本解矩阵的可逆性消去 $\boldsymbol{X}$.

解答: 设 $\boldsymbol{X}(t)$ 是两个系统的公共基本解矩阵. 由基本解矩阵的定义,

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t), \qquad \boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{X}(t)$$

对一切 t 成立. 两式相减得

$$\big(\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{B}(t)\big)\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{0}.$$

基本解矩阵的列向量线性无关, 故 $\boldsymbol{X}(t)$ 处处可逆. 在右端乘以 $\boldsymbol{X}^{-1}(t)$, 得 $\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{A}(t) \equiv \boldsymbol{B}(t)$.

结果: $\boldsymbol{A}(t) \equiv \boldsymbol{B}(t)$ 得证.

习题 3.1(6)

设下列矩阵分别是某个齐次线性系统的基本解矩阵, 求对应的齐次线性系统并确定其定义域:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & 0 \\ -(t+1) & 1 \end{pmatrix}$$

解答

解题思路: 由 $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}$ 解出 $\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{X}'(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t)$; 定义域取 $\boldsymbol{X}$ 可逆 (Wronski 行列式非零) 且 $\boldsymbol{A}$ 连续的范围.

解答: 记

$$\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & 0 \\ -(t+1) & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det \boldsymbol{X}(t) = \mathrm{e}^{t} \neq 0 \qquad (\forall t \in \mathbb{R}),$$

$$\boldsymbol{X}^{-1}(t) = \frac{1}{\mathrm{e}^{t}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t+1 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ (t+1)\mathrm{e}^{-t} & 1 \end{pmatrix}.$$

故

$$\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{X}'(t)\boldsymbol{X}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ (t+1)\mathrm{e}^{-t} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathrm{e}^{-t} & 0 \end{pmatrix}.$$

对应的齐次线性系统为

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_1, \qquad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{e}^{-t}x_1.$$

检验第一列: $x_1 = \mathrm{e}^t$, $x_2 = -(t+1)$ 满足 $\dot{x}_1 = \mathrm{e}^t = x_1$, $\dot{x}_2 = -1 = -\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^t$; 第二列 $(0,1)$ 满足 $\dot{x}_1 = 0 = 1\cdot 0$, $\dot{x}_2 = 0 = -\mathrm{e}^{-t}\cdot 0$. $\boldsymbol{A}(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 故定义域为 $\mathbb{R}$.

结果: 对应系统为 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathrm{e}^{-t} & 0 \end{pmatrix}$, 定义域为 $\mathbb{R}$.

习题 3.1(9)

求解下列非齐次线性系统的初值问题:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{2}{t}x_1 + 1, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \left(1+\dfrac{2}{t}\right)x_1 + x_2 - 1, \end{cases} \qquad (t>0), \qquad x_1(1) = \frac{1}{3}, \quad x_2(1) = -\frac{1}{3}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2t}{1+t^2}x_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{t}x_2 + x_1 + t, \end{cases} \qquad (t>0), \qquad x_1(1) = 0, \quad x_2(1) = \frac{4}{3}$$

解答

解题思路: 两个系统都是上三角形式, 第一式不含 x_2, 先用一阶线性方程公式解出 x_1, 再代入第二式解 x_2, 最后用初值条件定出常数.

解答:

(1) 由 $\dot{x}_1 = -(2/t)x_1 + 1$ 得 $\dot{x}_1 + (2/t)x_1 = 1$. 积分因子 $\mathrm{e}^{\int (2/t)\mathrm{d}t} = t^2$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2 x_1) = t^2, \qquad t^2 x_1 = \frac{t^3}{3} + c_1, \qquad x_1 = \frac{t}{3} + \frac{c_1}{t^2}.$$

由 $x_1(1) = 1/3$ 得 $1/3 + c_1 = 1/3$, 即 $c_1 = 0$, 故 $x_1(t) = t/3$. 代入第二式,

$$\dot{x}_2 = x_2 + \left(1+\frac{2}{t}\right)\frac{t}{3} - 1 = x_2 + \frac{t-1}{3},$$

即 $\dot{x}_2 - x_2 = (t-1)/3$. 积分因子 e^{-t}:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-t}x_2) = \frac{\mathrm{e}^{-t}(t-1)}{3},$$

$$\mathrm{e}^{-t}x_2 = \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{-t}(t-1)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(-te^{-t}\right) + c_2$$

(用分部积分 $\int te^{-t}\mathrm{d}t = -(t+1)\mathrm{e}^{-t}$, $\int \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-t}$), 故

$$x_2 = -\frac{t}{3} + c_2\mathrm{e}^{t}.$$

由 $x_2(1) = -1/3$ 得 $-1/3 + c_2\mathrm{e} = -1/3$, 即 $c_2 = 0$. 所以 $x_1(t) = t/3$, $x_2(t) = -t/3$. 直接代入可验证两个方程与初值均成立.

(2) 由 $\dot{x}_1 = \frac{2t}{1+t^2}x_1$ 分离变量

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} = \frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t, \qquad x_1 = c(1+t^2).$$

由 $x_1(1) = 0$ 得 $2c = 0$, 故 $x_1(t) \equiv 0$. 代入第二式

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{t}x_2 + t, \qquad \dot{x}_2 + \frac{1}{t}x_2 = t.$$

积分因子 $\mathrm{e}^{\int (1/t)\mathrm{d}t} = t$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(tx_2) = t^2, \qquad tx_2 = \frac{t^3}{3} + c_2, \qquad x_2 = \frac{t^2}{3} + \frac{c_2}{t}.$$

由 $x_2(1) = 4/3$ 得 $1/3 + c_2 = 4/3$, 即 $c_2 = 1$. 所以 $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) = t^2/3 + 1/t$.

结果: (1) 的解为 $x_1(t) = t/3$, $x_2(t) = -t/3$; (2) 的解为 $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) = t^2/3 + 1/t$.

习题 3.2(1)

求常系数齐次或非齐次线性系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$$

的通解, 其中

$$(2)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$$

$$(3)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解答

解题思路:(2) 求特征值与广义特征向量得到基本解矩阵, 再用常数变易法求非齐次特解; (3) 是齐次系统, 有一实根与一对共轭复根, 取实部虚部构成实基本解组.

解答:
(2) 特征多项式

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\det\begin{pmatrix}2-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix}=(2-\lambda)(-\lambda)+1=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2,$$

特征根 $\lambda=1$ (二重). 解 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$,

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\implies v_1=v_2,$$

取 $\boldsymbol{v}=(1,1)^{\mathrm{T}}$. 求广义特征向量 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}$:

$$w_1-w_2=1\implies \boldsymbol{w}=(1,0)^{\mathrm{T}}.$$

于是齐次基本解矩阵的两列为 $\mathrm{e}^t\boldsymbol{v}$ 与 $\mathrm{e}^t(t\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$:

$$\boldsymbol{X}(t)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t & (t+1)\mathrm{e}^t\\ e^t & te^t\end{pmatrix},\qquad \det\boldsymbol{X}=-\mathrm{e}^{2t}\neq 0.$$

用常数变易公式求非齐次特解. 计算

$$\boldsymbol{X}^{-1}(t)=\begin{pmatrix}-te^{-t} & (t+1)\mathrm{e}^{-t}\\ e^{-t} & -\mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}^{-1}(t)\boldsymbol{b}(t)=\begin{pmatrix}-te^{-t} & (t+1)\mathrm{e}^{-t}\\ e^{-t} & -\mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 2\mathrm{e}^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(t+1)\\ -2\end{pmatrix},$$

$$\int\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}t=\begin{pmatrix}t^2+2t\\ -2t\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_p(t)=\boldsymbol{X}(t)\begin{pmatrix}t^2+2t\\ -2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t^2\mathrm{e}^t\\ (2t-t^2)\mathrm{e}^t\end{pmatrix}.$$

(可直接代入方程验证.) 故通解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{c}+\boldsymbol{x}_p(t),$$

即

$$x_1 = \big(c_1 + c_2(t+1) - t^2\big)\mathrm{e}^t, \qquad x_2 = \big(c_1 + c_2 t + 2t - t^2\big)\mathrm{e}^t.$$

(3) 特征多项式

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1),$$

特征根为 $\lambda = 1$ 与 $\lambda = \pm \mathrm{i}$. 对 $\lambda = 1$: $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ 给出 $v_2 = -v_1$, $v_3 = 0$, 取 $\boldsymbol{v} = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$, 得实解

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

对 $\lambda = \mathrm{i}$: $(\boldsymbol{A} - \mathrm{i}\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ 给出 $\boldsymbol{v} = (-\mathrm{i}, 1, -\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$. 复值解

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\boldsymbol{v} = (\cos t + \mathrm{i}\sin t)(-\mathrm{i}, 1, -\mathrm{i})^{\mathrm{T}},$$

其分量分别为 $\sin t - \mathrm{i}\cos t$, $\cos t + \mathrm{i}\sin t$, $\sin t - \mathrm{i}\cos t$. 取实部虚部得两个实解

$$\boldsymbol{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_3(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

(可直接代入验证.) 通解为

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t) + c_3\boldsymbol{x}_3(t),$$

即

$$x_1 = c_1\mathrm{e}^t + c_2\sin t - c_3\cos t, \quad x_2 = -c_1\mathrm{e}^t + c_2\cos t + c_3\sin t, \quad x_3 = c_2\sin t - c_3\cos t.$$

结果: (2) 的通解为 $x_1 = (c_1 + c_2(t+1) - t^2)\mathrm{e}^t$, $x_2 = (c_1 + c_2 t + 2t - t^2)\mathrm{e}^t$; (3) 的通解为 $x_1 = c_1\mathrm{e}^t + c_2\sin t - c_3\cos t$, $x_2 = -c_1\mathrm{e}^t + c_2\cos t + c_3\sin t$, $x_3 = c_2\sin t - c_3\cos t$.

习题 3.2(2)

求微分系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$$

满足初值条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解, 其中

$$(2)\quad A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}(t)=\begin{pmatrix}3t\\ 4\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$$

解答

解题思路: 用常系数线性系统的初值公式 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{X}(t)\int_0^t\boldsymbol{X}^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\mathrm{d}s$. 这里 $\boldsymbol{A}$ 有一对共轭纯虚根, 取实部虚部得实基本解矩阵.

解答: 特征多项式

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=\det\begin{pmatrix}-\lambda & -2\\ 2 & -\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2+4,$$

特征根 $\lambda=\pm 2\mathrm{i}$. 对 $\lambda=2\mathrm{i}$, 解 $(\boldsymbol{A}-2\mathrm{i}\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$:

$$\begin{pmatrix}-2\mathrm{i} & -2\\ 2 & -2\mathrm{i}\end{pmatrix}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\implies v_2=-\mathrm{i}v_1,$$

取 $\boldsymbol{v}=(1,-\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$. 复值解

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}\boldsymbol{v}=(\cos 2t+\mathrm{i}\sin 2t)(1,-\mathrm{i})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\cos 2t+\mathrm{i}\sin 2t\\ \sin 2t-\mathrm{i}\cos 2t\end{pmatrix},$$

取实部虚部得实基本解矩阵

$$\boldsymbol{X}(t)=\begin{pmatrix}\cos 2t & \sin 2t\\ \sin 2t & -\cos 2t\end{pmatrix},\qquad \det\boldsymbol{X}=-1.$$

注意到 $\boldsymbol{X}^2=\boldsymbol{I}$, 故 $\boldsymbol{X}^{-1}=\boldsymbol{X}$. 于是 $\boldsymbol{X}^{-1}(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{X}^{-1}(0)\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}.$$

又

$$\boldsymbol{X}^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)=\begin{pmatrix}\cos 2s & \sin 2s\\ \sin 2s & -\cos 2s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3s\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3s\cos 2s+4\sin 2s\\ 3s\sin 2s-4\cos 2s\end{pmatrix}.$$

分部积分得

$$\int_0^t (3s\cos 2s + 4\sin 2s)\,\mathrm{d}s = \frac{3t}{2}\sin 2t - \frac{5}{4}\cos 2t + \frac{5}{4},$$

$$\int_0^t (3s\sin 2s - 4\cos 2s)\,\mathrm{d}s = -\frac{3t}{2}\cos 2t - \frac{5}{4}\sin 2t.$$

于是

$$\boldsymbol{X}(t)\int_0^t \boldsymbol{X}^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{X}(t)\begin{pmatrix} \frac{3t}{2}\sin 2t - \frac{5}{4}\cos 2t + \frac{5}{4} \\ -\frac{3t}{2}\cos 2t - \frac{5}{4}\sin 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}\cos 2t - \frac{5}{4} \\ \frac{3t}{2} + \frac{5}{4}\sin 2t \end{pmatrix}.$$

故解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(0)\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{X}(t)\int_0^t \boldsymbol{X}^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s,$$

即

$$x_1(t) = \frac{13}{4}\cos 2t - 3\sin 2t - \frac{5}{4}, \qquad x_2(t) = 3\cos 2t + \frac{13}{4}\sin 2t + \frac{3t}{2}.$$

检验初值: $x_1(0) = 13/4 - 5/4 = 2$, $x_2(0) = 3$.

结果:$x_1(t) = \frac{13}{4}\cos 2t - 3\sin 2t - \frac{5}{4}$, $x_2(t) = 3\cos 2t + \frac{13}{4}\sin 2t + \frac{3t}{2}$.

习题 3.2(4)

设 n 阶实常数矩阵 A 在复数域中有 s 个互不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 它们的重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_s$, 这里 $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$, 证明: 对于 $i = 1, 2, \cdots, s$, 齐次线性方程组

$$(A - \lambda_i I)^{n_i} v = 0$$

在 $\mathbb{C}^n$ 中有 n_i 个线性无关的解 $v_{0k}^{(i)} (k = 1, 2, \cdots, n_i)$. 进一步, 证明:$n$ 个解 $v_{0k}^{(i)} (i = 1, 2, \cdots, s; k = 1, 2, \cdots, n_i)$ 在 $\mathbb{C}^n$ 中是线性无关的.

解答

解题思路: 记 $V_i = \ker(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})^{n_i}$ 为广义特征子空间. 先用 Bezout 恒等式与 Cayley-Hamilton 定理证明 $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$, 再由特征多项式在各不变子空间上的分解确定 $\dim V_i = n_i$; 不同 V_i 之交为零, 故它们的一组基拼起来仍线性无关.

解答: 设

$$V_i = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n : (\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})^{n_i} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \right\}, \qquad i = 1, \cdots, s.$$

每个 V_i 都是 $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})^{n_i}$ 的核, 因而是 $\mathbb{C}^n$ 的子空间; 又 $\boldsymbol{A}$ 与 $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})^{n_i}$ 可交换, 故 $\boldsymbol{A}V_i \subseteq V_i$, 即 V_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间.

第一步：证明 $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$**.** 记

$$p_i(\lambda) = \prod_{j \neq i} (\lambda - \lambda_j)^{n_j}.$$

多项式 $p_i(\lambda)$ 与 $(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ 互素, 故存在多项式 $a_i(\lambda)$, $b_i(\lambda)$ 使

$$a_i(\lambda) p_i(\lambda) + b_i(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{n_i} = 1.$$

把 $\lambda = \boldsymbol{A}$ 代入并作用到任意 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$:

$$\boldsymbol{v} = a_i(\boldsymbol{A}) p_i(\boldsymbol{A}) \boldsymbol{v} + b_i(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})^{n_i} \boldsymbol{v}.$$

第一项属于 V_i, 因为

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})^{n_i} a_i(\boldsymbol{A}) p_i(\boldsymbol{A}) \boldsymbol{v} = a_i(\boldsymbol{A}) \underbrace{p(\boldsymbol{A})}_{=0} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0},$$

其中 $p(\lambda) = \prod_{j=1}^{s} (\lambda - \lambda_j)^{n_j}$ 是特征多项式, $p(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$ 由 Cayley-Hamilton 定理保证. 所以 $\mathbb{C}^n = V_1 + \cdots + V_s$.

再证和为直和. 设 $\sum_{i=1}^{s} \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$, 其中 $\boldsymbol{v}_i \in V_i$. 固定 i, 把 $p_i(\boldsymbol{A})$ 作用于上式: 对 $j \neq i$, $p_i(\boldsymbol{A}) \boldsymbol{v}_j$ 中含因子 $(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{I})^{n_j}$, 它把 $\boldsymbol{v}_j$ 化为零, 故得 $p_i(\boldsymbol{A}) \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$. 又 $\boldsymbol{v}_i \in V_i$ 给出 $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})^{n_i} \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$. 由 p_i 与 $(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ 的互素性, 存在多项式 u, w 使

$$u(\lambda) p_i(\lambda) + w(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{n_i} = 1,$$

于是

$$\boldsymbol{v}_i = u(\boldsymbol{A}) p_i(\boldsymbol{A}) \boldsymbol{v}_i + w(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})^{n_i} \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}.$$

由 i 的任意性, 所有 $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$, 直和成立, 即 $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$.

第二步：确定 $\dim V_i = n_i$**.** 因 $\boldsymbol{A}$ 保持每个 V_i 不变, 且 $\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I}$ 在 V_i 上幂零, $\boldsymbol{A}$ 在 V_i 上的唯一特征值是 λ_i, 故 $\boldsymbol{A}$ 在 V_i 上的特征多项式为 $(\lambda - \lambda_i)^{\dim V_i}$. 于是 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上的特征多项式分解为

$$\prod_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)^{n_i} = p(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \prod_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)^{\dim V_i}.$$

比较两侧指数得 $\dim V_i = n_i$. 故方程组 $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})^{n_i} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ 的解空间 V_i 是 n_i 维的, 存在 n_i 个线性无关的解 $v_{0k}^{(i)}$ $(k = 1, \cdots, n_i)$.

第三步：全部 n **个解线性无关.** 直和分解 $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ 中, 若

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{n_i} c_{ik} v_{0k}^{(i)} = \boldsymbol{0},$$

则括号内每个 $\sum_k c_{ik}v_{0k}^{(i)} \in V_i$ 必为零 (直和), 再由各 V_i 内 $\{v_{0k}^{(i)}\}_k$ 线性无关得全部 $c_{ik}=0$. 因而 $n=\sum_i n_i$ 个向量在 $\mathbb{C}^n$ 中线性无关, 构成 $\mathbb{C}^n$ 的一组基.
结果: 每个 $V_i=\ker(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})^{n_i}$ 维数为 n_i, 其 n_i 个线性无关解拼成的 n 个向量在 $\mathbb{C}^n$ 中线性无关.

习题 3.2(6)

对于常系数齐次线性系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A\boldsymbol{x}\qquad(t\in\mathbb{R})$$

e^{At} 是其基本解矩阵. 该结果能否推广到变系数情形? 即对于变系数齐次线性系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A(t)\boldsymbol{x}$$

($A(t)$ 是区间 I 上的连续矩阵函数),$\mathrm{e}^{\int_0^t A(s)\,\mathrm{d}s}$ 是否是矩阵函数? 能否成为该变系数系统的解矩阵? 若不能, 请给出例子; 若能, 请给出证明.

解答

解题思路: 矩阵函数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}(t)}$ 总是良定义的, 但其导数一般不等于 $\boldsymbol{B}'(t)\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}(t)}$; 只有 $\boldsymbol{B}(t)$ 与其导数可交换时才对. 取一个使 $\int_0^t\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s$ 与 $\boldsymbol{A}(t)$ 不交换的例子, 即可说明 $\mathrm{e}^{\int_0^t\boldsymbol{A}}$ 不是解矩阵.
解答:
$\mathrm{e}^{\int_0^t\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s}$ 是矩阵函数. 因为 $\boldsymbol{A}$ 连续时 $\boldsymbol{B}(t)=\int_0^t\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s$ 是连续可微矩阵函数, 而矩阵指数由收敛幂级数 $\sum_{k\geq0}\boldsymbol{B}^k/k!$ 定义, 故 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}(t)}$ 是 (可微的) 矩阵函数.
但 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}(t)}$ 一般不是系统 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的解矩阵. 原因: 对一般的矩阵函数 $\boldsymbol{B}(t)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}(t)}=\int_0^1\mathrm{e}^{s\boldsymbol{B}(t)}\boldsymbol{B}'(t)\mathrm{e}^{(1-s)\boldsymbol{B}(t)}\,\mathrm{d}s,$$

它等于 $\boldsymbol{B}'(t)\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}(t)}$ 当且仅当 $\boldsymbol{B}(t)$ 与 $\boldsymbol{B}'(t)$ 可交换. 要使 $\boldsymbol{X}=\mathrm{e}^{\int_0^t\boldsymbol{A}}$ 满足 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, 需 $\int_0^t\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s$ 与 $\boldsymbol{A}(t)$ 对一切 t 可交换, 这通常不成立.
反例: 取

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}0&1\\t&0\end{pmatrix},\qquad\boldsymbol{B}(t)=\int_0^t\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s=\begin{pmatrix}0&t\\t^2/2&0\end{pmatrix}.$$

计算

$$\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t)=\begin{pmatrix}0&1\\t&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&t\\t^2/2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t^2/2&0\\0&t^2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}0 & t\\ t^2/2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ t & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t^2 & 0\\ 0 & t^2/2\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{A}$ 不交换. 此时 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}$ 不满足 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}$, 故 $\mathrm{e}^{\int_0^t\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s}$ 不是解矩阵.

作为对照, 若 $\boldsymbol{A}(t_1)\boldsymbol{A}(t_2)=\boldsymbol{A}(t_2)\boldsymbol{A}(t_1)$ 对一切 t_1,t_2 成立 (例如 $\boldsymbol{A}$ 为常数矩阵), 则 $\boldsymbol{B}(t)=\int_0^t\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s$ 与 $\boldsymbol{A}(t)$ 可交换, 此时 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}$, $\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}$ 确为解矩阵, 常系数情形 $\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}$ 正是这一情形的特例.

结果:$\mathrm{e}^{\int_0^t\boldsymbol{A}(s)\mathrm{d}s}$ 总是矩阵函数, 但一般不构成变系数系统的解矩阵; 只有当 $\boldsymbol{A}(t)$ 与其积分可交换 (如 $\boldsymbol{A}$ 为常数) 时才可以, 反例为 $\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ t & 0\end{pmatrix}$.

习题 3.2(8)

求出所有 3 阶常数矩阵的实 Jordan 标准形及其相应的齐次线性系统的基本解矩阵.

解答

解题思路:3 阶实矩阵的特征多项式是 3 次实系数多项式, 特征根要么全为实根, 要么一个实根加一对共轭复根. 按实根的重数与可对角化性, 以及复根情形逐类列出实 Jordan 标准形; 基本解矩阵即 $\mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}}$, 由 Jordan 块的标准公式给出.

解答: 设 $\boldsymbol{J}$ 为实 Jordan 标准形, 对应的齐次线性系统为 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t=\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}$, 基本解矩阵为 $\boldsymbol{X}(t)=\mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}}$. 全部可能情形如下 (常数 $\lambda,\mu,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\alpha,\beta$ 均为实数, $\beta\neq0$, 且同形中未加说明的实根互异).

1. 三个互异实特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$:

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix},\qquad \mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_3 t}\end{pmatrix}.$$

2. 实根 λ **二重 (可对角化) 与实根** μ $(\lambda\neq\mu)$:

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix},\qquad \mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda t} & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda t} & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\mu t}\end{pmatrix}.$$

3. 实根 λ 二重 (一个二阶 Jordan 块) 与实根 μ ($\lambda \neq \mu$):

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} & te^{\lambda t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\mu t} \end{pmatrix}.$$

4. 实根 λ 三重且可对角化:

$$\boldsymbol{J} = \lambda \boldsymbol{I}, \qquad \mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}} = \mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{I}.$$

5. 实根 λ 三重, 一个二阶 Jordan 块加一个一阶块:

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} & te^{\lambda t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

6. 实根 λ 三重, 一个三阶 Jordan 块:

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{\lambda t} \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

7. 实根 λ 与一对共轭复根 $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$ ($\beta \neq 0$):

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t & \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t \\ 0 & -\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t & \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t \end{pmatrix}.$$

以上 7 类互不相似, 且任一 3 阶实矩阵必与其一相似, 故这就是全部实 Jordan 标准形.

结果: 共 7 类实 Jordan 标准形 (情形 1 至 7), 各自的基本解矩阵 $\mathrm{e}^{t\boldsymbol{J}}$ 如上式所示.

习题 3.2(10)

如果存在实数 α 和 n 阶实常数矩阵 A, 使得对于任意 $v \in \mathbb{R}^n$, 向量内积 (Av, v) 满足

$$(Av, v) \leq \alpha \|v\|^2$$

证明:

$$\|\mathrm{e}^{At}\| \le \mathrm{e}^{\alpha t}, \qquad \forall t \ge 0$$

解答

解题思路: 对固定的 $\boldsymbol{v}$, 令 $\boldsymbol{u}(t) = \mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{v}$, 把 t 视为变量, 对 $\|\boldsymbol{u}(t)\|^2$ 求导, 用题设条件得到微分不等式, 积分后除以 $\|\boldsymbol{v}\|$ 并按算子范数的定义取上确界. 这里的范数取 Euclid 范数, 矩阵范数为相应的诱导算子范数.

解答: 设 $(\cdot,\cdot)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上标准内积, $\|\cdot\|$ 为 Euclid 范数. 对任意 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$\boldsymbol{u}(t) = \mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{v}.$$

则 $\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}(t)$. 记 $f(t) = \|\boldsymbol{u}(t)\|^2 = (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t))$, 求导得

$$f'(t) = 2(\boldsymbol{u}'(t), \boldsymbol{u}(t)) = 2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t)) \le 2\alpha\|\boldsymbol{u}(t)\|^2 = 2\alpha f(t).$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathrm{e}^{-2\alpha t} f(t)\Big) = \mathrm{e}^{-2\alpha t}\Big(f'(t) - 2\alpha f(t)\Big) \le 0,$$

故 $\mathrm{e}^{-2\alpha t} f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调不增, 所以

$$\mathrm{e}^{-2\alpha t} f(t) \le f(0) = \|\boldsymbol{v}\|^2.$$

即

$$\|\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{v}\|^2 = f(t) \le \mathrm{e}^{2\alpha t}\|\boldsymbol{v}\|^2, \qquad \|\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{v}\| \le \mathrm{e}^{\alpha t}\|\boldsymbol{v}\|.$$

对一切 $t \ge 0$ 与 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ 成立. 按诱导算子范数定义

$$\|\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}\| = \sup_{\boldsymbol{v}\neq 0} \frac{\|\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \le \mathrm{e}^{\alpha t}.$$

结果: $\|\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}\| \le \mathrm{e}^{\alpha t}$ 对一切 $t \ge 0$ 成立.

习题 3.4(6)

求下列微分方程的通解:

$$(3) \quad x^{(4)} - 4x''' + 8x'' - 8x' + 3x = 0$$

$$(6) \quad t^3 x''' - 3t^2 x'' + tx' - x = t$$

$$(7) \quad x'' + 2x' = 3 + 4\sin 2t$$

解答

解题思路:(3) 是常系数齐次方程, 写特征方程并分解因式; (6) 是 Euler 方程, 令 $t=\mathrm{e}^s$ 化为常系数, 注意 e^s 是特征根需作共振处理; (7) 用待定系数法, 常数项因 $\lambda=0$ 是特征根要乘 t.

解答:

(3) 特征方程

$$\lambda^4-4\lambda^3+8\lambda^2-8\lambda+3=0.$$

试根 $\lambda=1$: 代入得 $1-4+8-8+3=0$, 故

$$\lambda^4-4\lambda^3+8\lambda^2-8\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda^3-3\lambda^2+5\lambda-3),$$

再对三次式试根 $\lambda=1$: $1-3+5-3=0$, 故

$$\lambda^3-3\lambda^2+5\lambda-3=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+3).$$

$\lambda^2-2\lambda+3=0$ 给出 $\lambda=1\pm\sqrt{2}\,\mathrm{i}$. 故特征根为 1 (二重) 与 $1\pm\sqrt{2}\,\mathrm{i}$, 通解为

$$x(t)=\mathrm{e}^t\Big(c_1+c_2t+c_3\cos\sqrt{2}\,t+c_4\sin\sqrt{2}\,t\Big).$$

(6) Euler 方程. 对 $t>0$ 令 $t=\mathrm{e}^s$, 记 $D=\mathrm{d}/\mathrm{d}s$, 则

$$tx'=Dx,\qquad t^2x''=D(D-1)x,\qquad t^3x'''=D(D-1)(D-2)x.$$

代入方程左端:

$$t^3x'''-3t^2x''+tx'-x=\Big(D^3-6D^2+6D-1\Big)x,$$

右端 $t=\mathrm{e}^s$. 特征方程

$$r^3-6r^2+6r-1=0.$$

试根 $r=1$: $1-6+6-1=0$, 故

$$r^3-6r^2+6r-1=(r-1)(r^2-5r+1),$$

根为 $r=1$ 与 $r=(5\pm\sqrt{21})/2$. 齐次通解

$$x_h(s)=c_1\mathrm{e}^s+c_2\mathrm{e}^{\frac{5+\sqrt{21}}{2}s}+c_3\mathrm{e}^{\frac{5-\sqrt{21}}{2}s}.$$

对非齐次项 e^s: 因 $P(1)=0$ 且 $P'(r)=3r^2-12r+6$, $P'(1)=-3$, 由共振公式

$$x_p(s)=\frac{1}{P(D)}\mathrm{e}^s=\mathrm{e}^s\frac{s}{P'(1)}=-\frac{s\mathrm{e}^s}{3}.$$

换回 t: $s=\ln t$, $\mathrm{e}^s=t$, 故

$$x(t)=c_1t+c_2t^{\frac{5+\sqrt{21}}{2}}+c_3t^{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}-\frac{t\ln t}{3}\qquad(t>0).$$

(7) 齐次方程 $x''+2x'=0$ 的特征根 $\lambda=0,-2$, 齐次通解

$$x_h=c_1+c_2\mathrm{e}^{-2t}.$$

求特解. 对常数项 3: 因 $\lambda=0$ 是单特征根, 设 $x_{p1}=at$, 代入得 $2a=3$, $a=3/2$, 故 $x_{p1}=3t/2$. 对 $4\sin 2t$: 设 $x_{p2}=A\sin 2t+B\cos 2t$, 代入

$$x_{p2}''+2x_{p2}'=(-4A-4B)\sin 2t+(4A-4B)\cos 2t,$$

与 $4\sin 2t$ 比较系数:

$$-4A-4B=4,\qquad 4A-4B=0\implies A=B=-\frac{1}{2}.$$

故 $x_{p2}=-\frac{1}{2}(\sin 2t+\cos 2t)$. 通解

$$x(t)=c_1+c_2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{3t}{2}-\frac{1}{2}(\sin 2t+\cos 2t).$$

结果: (3) $x=\mathrm{e}^t(c_1+c_2t+c_3\cos\sqrt{2}\,t+c_4\sin\sqrt{2}\,t)$; (6) $x=c_1t+c_2t^{(5+\sqrt{21})/2}+c_3t^{(5-\sqrt{21})/2}-\frac{t\ln t}{3}$ $(t>0)$; (7) $x=c_1+c_2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{3t}{2}-\frac{1}{2}(\sin 2t+\cos 2t)$.

习题 3.4(7)

求二阶线性微分方程

$$x''+b^2x=a\cos(mbt)$$

的通解, 并讨论周期解的存在性, 这里 $a\in\mathbb{R},b>0,m\in\mathbb{N}_+$.

解答

解题思路: 齐次方程的特征根为 $\pm\mathrm{i}b$. 非齐次项 $a\cos(mbt)$ 的频率为 mb. 当 $m\neq 1$ 时 $mb\neq b$, 无共振, 直接设余弦型特解; 当 $m=1$ 时 $mb=b$, 发生共振, 特解需乘以 t.
解答: 齐次方程 $x''+b^2x=0$ 的特征根 $\lambda=\pm\mathrm{i}b$, 齐次通解

$$x_h(t)=c_1\cos bt+c_2\sin bt.$$

当 $m\neq 1$ (即 $m\geq 2$) 时, 设特解 $x_p=A\cos(mbt)$. 代入得

$$x_p''+b^2x_p=-Am^2b^2\cos(mbt)+Ab^2\cos(mbt)=Ab^2(1-m^2)\cos(mbt).$$

与 $a\cos(mbt)$ 比较, $A=\dfrac{a}{b^2(1-m^2)}$. 通解为

$$x(t)=c_1\cos bt+c_2\sin bt+\frac{a}{b^2(1-m^2)}\cos(mbt).$$

当 $m=1$ 时, 方程 $x''+b^2x=a\cos bt$, 发生共振. 设 $x_p=t(A\cos bt+B\sin bt)$, 代入得

$$x_p''+b^2x_p=-2Ab\sin bt+2Bb\cos bt.$$

与 $a\cos bt$ 比较, $A=0$, $B=\dfrac{a}{2b}$. 通解为

$$x(t)=c_1\cos bt+c_2\sin bt+\frac{a}{2b}t\sin bt.$$

周期解的存在性:

- $m\neq 1$: 齐次解以 $2\pi/b$ 为周期, 特解以 $2\pi/(mb)$ 为周期, 而 $2\pi/(mb)$ 整除 $2\pi/b$ (因 $m\in\mathbb{N}_+$), 故每个解都以 $2\pi/b$ 为周期. 周期解恒存在.
- $m=1$: 若 $a\neq 0$, 通解含无界项 $\frac{a}{2b}t\sin bt$, 任何解在 $\mathbb{R}$ 上无界, 故不存在周期解; 若 $a=0$, 方程为齐次的, 一切解 $x=c_1\cos bt+c_2\sin bt$ 都以 $2\pi/b$ 为周期.

结果:$m\neq 1$ 时通解为 $x=c_1\cos bt+c_2\sin bt+\frac{a}{b^2(1-m^2)}\cos(mbt)$, 且一切解都是 $2\pi/b$-周期的; $m=1$ 时通解为 $x=c_1\cos bt+c_2\sin bt+\frac{a}{2b}t\sin bt$, 当 $a\neq 0$ 时无周期解, 当 $a=0$ 时一切解周期为 $2\pi/b$.

习题 3.4(9)

设 $f(t)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上的连续函数, 证明微分方程

$$x''(t)+3x'(t)+2x(t)=f(t)$$

的解具有如下性质:
(1) 若 $f(t)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是有界的, 则该方程的每个解在区间 $[0,+\infty)$ 上有界;
(2) 若 $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$, 则该方程的每个解 $\phi(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}\phi(t)=0$;
(3) 若 $f(t)$ 是周期函数, 则该方程的有界解也是周期函数.

解答

解题思路: 齐次方程 $x''+3x'+2x=0$ 的基本解组为 e^{-t}, e^{-2t}, 用常数变易法写出带积分核 $K(\tau)=\mathrm{e}^{-\tau}-\mathrm{e}^{-2\tau}$ 的特解, 把解表示成衰减项加卷积积分, 再分别估计.
解答: 特征方程 $\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)=0$, 基本解组 $x_1=\mathrm{e}^{-t}$, $x_2=\mathrm{e}^{-2t}$, Wronski

行列式 $W=-\mathrm{e}^{-3t}$. 常数变易法给出

$$x(t)=c_1\mathrm{e}^{-t}+c_2\mathrm{e}^{-2t}+\int_0^t\left(\mathrm{e}^{-(t-s)}-\mathrm{e}^{-2(t-s)}\right)f(s)\,\mathrm{d}s, \qquad (*)$$

其中核 $K(t-s)=\mathrm{e}^{-(t-s)}-\mathrm{e}^{-2(t-s)}\geq 0$.

(1) 设 $|f(t)|\leq M$. 由 $(*)$,

$$\left|\int_0^t K(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s\right|\leq M\int_0^t\left(\mathrm{e}^{-(t-s)}+\mathrm{e}^{-2(t-s)}\right)\mathrm{d}s=M\left[(1-\mathrm{e}^{-t})+\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2t})\right]\leq\frac{3M}{2}.$$

又 $|c_1\mathrm{e}^{-t}+c_2\mathrm{e}^{-2t}|\leq|c_1|+|c_2|$, 故

$$|x(t)|\leq|c_1|+|c_2|+\frac{3M}{2},$$

一切解在 $[0,+\infty)$ 上有界.

(2) 设 $f(t)\to 0$ $(t\to+\infty)$. 对给定 $\varepsilon>0$, 取 T 使 $|f(s)|<\varepsilon$ 对 $s\geq T$, 记 $M_T=\max_{[0,T]}|f|$. 把积分拆为 $[0,T]$ 与 $[T,t]$ 两段. 对 $0\leq s\leq T$,

$$K(t-s)=\mathrm{e}^{-(t-s)}-\mathrm{e}^{-2(t-s)}\leq\mathrm{e}^{-(t-s)}\leq\mathrm{e}^{-(t-T)},$$

故第一段

$$\left|\int_0^T K(t-s)f(s)\mathrm{d}s\right|\leq M_T\,T\,\mathrm{e}^{-(t-T)}\to 0\qquad(t\to+\infty).$$

第二段

$$\left|\int_T^t K(t-s)f(s)\mathrm{d}s\right|\leq\varepsilon\int_T^t\left(\mathrm{e}^{-(t-s)}+\mathrm{e}^{-2(t-s)}\right)\mathrm{d}s<\varepsilon\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3\varepsilon}{2}.$$

于是积分项当 $t\to+\infty$ 时趋于 0; 又 $c_1\mathrm{e}^{-t}+c_2\mathrm{e}^{-2t}\to 0$, 故 $x(t)\to 0$.

(3) 设 f 以 ω 为周期, 把它周期延拓到 $\mathbb{R}$. 令

$$x_p(t)=\int_{-\infty}^t K(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s=\int_0^{+\infty}K(\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

f 有界且 $\int_0^\infty K(\tau)\mathrm{d}\tau=1-1/2=1/2<+\infty$, 故积分收敛; 由常数变易公式知 x_p 是方程的一个解. 又由 f 的周期性,

$$x_p(t+\omega)=\int_0^\infty K(\tau)f(t+\omega-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^\infty K(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau=x_p(t),$$

故 x_p 是周期为 ω 的周期解, 且 $|x_p(t)|\leq\frac{1}{2}\max|f|$, 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

任一解 x 与 x_p 之差是齐次方程的解, 即 $x(t)-x_p(t)=c_1\mathrm{e}^{-t}+c_2\mathrm{e}^{-2t}$. 若 x 在 $\mathbb{R}$ 上有界, 则当 $t\to-\infty$ 时 $c_1\mathrm{e}^{-t}+c_2\mathrm{e}^{-2t}$ 有界, 这迫使 $c_1=c_2=0$, 于是 $x=x_p$ 为周期函

数. 故方程的有界解 (在 $\mathbb{R}$ 上有界的解) 必为周期函数.
结果:(1) f 有界 $\Rightarrow$ 一切解有界; (2) $f(t)\to 0 \Rightarrow$ 一切解 $\phi(t)\to 0$; (3) f 周期 $\Rightarrow$ 方程在 $\mathbb{R}$ 上有界的解等于周期解 x_p, 因而也是周期的.

习题 3.4(11)

设 $x(t)=\phi_1(t)$ 和 $x(t)=\phi_2(t)$ 分别是初值问题

$$\begin{cases} x''(t)+x=0, \\ x(0)=1,\ x'(0)=0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x''(t)+x=0, \\ x(0)=0,\ x'(0)=1 \end{cases}$$

的解, 请不求解直接证明:
(1)$\phi_1(t)$ 是偶函数,$\phi_2(t)$ 是奇函数;
(2)$\phi_1^2(t)+\phi_2^2(t)\equiv 1$;
(3)$\phi_2(t+s)=\phi_1(t)\phi_2(s)+\phi_1(s)\phi_2(t)$,$\forall s,t\in\mathbb{R}$;
(4) 如果 T 是 $\phi_1(t)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的最小零点, 则 $\phi_1(t)$ 和 $\phi_2(t)$ 都是以 $4T$ 为周期的函数.

解答

解题思路: 全部用解的唯一性. (1) 用 $-t$ 替换 t 后比较初值; (2) 先证 $\phi_1'=-\phi_2$, $\phi_2'=\phi_1$, 再对 $\phi_1^2+\phi_2^2$ 求导; (3) 对固定的 s, 把等式两边看成 t 的函数, 验证它们满足同一初值问题; (4) 由 $\phi_2(T)=1$ 与加法公式 $\phi_2(t+T)=\phi_1(t)$ 递推出 $4T$ 周期性.
解答: 记两初值问题的解分别为 ϕ_1, ϕ_2, 它们均满足 $x''+x=0$, 且

$$\phi_1(0)=1,\ \phi_1'(0)=0; \qquad \phi_2(0)=0,\ \phi_2'(0)=1.$$

(1) 令 $\psi(t)=\phi_1(-t)$. 则 $\psi''(t)=\phi_1''(-t)=-\phi_1(-t)=-\psi(t)$, 且 $\psi(0)=1$, $\psi'(0)=0$. ψ 与 ϕ_1 满足同一初值问题, 由唯一性 $\psi\equiv\phi_1$, 即 $\phi_1(-t)=\phi_1(t)$, ϕ_1 为偶函数. 再令 $\psi(t)=-\phi_2(-t)$. 则

$$\psi''(t)=-\phi_2''(-t)=-\Big(-\phi_2(-t)\Big)=\phi_2(-t)=-\psi(t),$$

且 $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=\phi_2'(0)=1$. ψ 与 ϕ_2 满足同一初值问题, 故 $\psi\equiv\phi_2$, 即 $\phi_2(-t)=-\phi_2(t)$, ϕ_2 为奇函数.
(2) 先证恒等式 $\phi_1'=-\phi_2$, $\phi_2'=\phi_1$. 事实上 $(\phi_2')''=\phi_2'''=(\phi_2'')'=(-\phi_2)'=-\phi_2'$, 故 ϕ_2' 满足 $x''+x=0$; 又 $\phi_2'(0)=1$, $(\phi_2')'(0)=\phi_2''(0)=-\phi_2(0)=0$, 与 ϕ_1 满足同一初值问题, 故 $\phi_2'=\phi_1$. 同理 $(\phi_1')''=-\phi_1'$ 且 $\phi_1'(0)=0$, $(\phi_1')'(0)=\phi_1''(0)=-1$, 与 $-\phi_2$ 满足同一初值问题 ($(-\phi_2)''=-\phi_2$ 且 $(-\phi_2)(0)=0$, $(-\phi_2)'(0)=-1$), 故 $\phi_1'=-\phi_2$.

于是令 $U(t)=\phi_1^2(t)+\phi_2^2(t)$,

$$U'(t)=2\phi_1\phi_1'+2\phi_2\phi_2'=2\phi_1(-\phi_2)+2\phi_2\phi_1=0,$$

U 为常数, 而 $U(0)=\phi_1(0)^2+\phi_2(0)^2=1$, 故 $\phi_1^2+\phi_2^2\equiv 1$.
(3) 固定 $s\in\mathbb{R}$, 令

$$F(t)=\phi_2(t+s)-\phi_1(t)\phi_2(s)-\phi_1(s)\phi_2(t).$$

作为 t 的函数, $\phi_2(t+s)$, $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ 均满足 $x''+x=0$, 故 $F''+F=0$. 又

$$F(0)=\phi_2(s)-\phi_1(0)\phi_2(s)-\phi_1(s)\phi_2(0)=0,$$

$$F'(0)=\phi_2'(s)-\phi_1'(0)\phi_2(s)-\phi_1(s)\phi_2'(0)=\phi_2'(s)-\phi_1(s)=0$$

(用 $\phi_2'=\phi_1$). 初值全为零, 由唯一性 $F\equiv 0$, 即

$$\phi_2(t+s)=\phi_1(t)\phi_2(s)+\phi_1(s)\phi_2(t).$$

(4) 设 $T>0$ 为 ϕ_1 在 $[0,+\infty)$ 上的最小零点, 即 $\phi_1(T)=0$ 且 $\phi_1(t)>0$ 对 $0\le t<T$. 由 $\phi_1^2+\phi_2^2=1$ 得 $\phi_2(T)^2=1$; 又 $\phi_2'=\phi_1>0$ 于 $(0,T)$, 故 ϕ_2 在 $[0,T]$ 上严格递增, $\phi_2(0)=0$, 从而 $\phi_2(T)=1$.
在 (3) 中取 $s=T$:

$$\phi_2(t+T)=\phi_1(t)\phi_2(T)+\phi_1(T)\phi_2(t)=\phi_1(t).$$

两边对 t 求导, 并用 $\phi_1'=-\phi_2$, $\phi_2'=\phi_1$:

$$\phi_1(t+T)=\phi_1'(t)=-\phi_2(t).$$

于是递推

$$\phi_1(t+2T)=-\phi_2(t+T)=-\phi_1(t),\qquad \phi_2(t+2T)=\phi_1(t+T)=-\phi_2(t),$$

再次应用得

$$\phi_1(t+4T)=-\phi_1(t+2T)=\phi_1(t),\qquad \phi_2(t+4T)=-\phi_2(t+2T)=\phi_2(t).$$

故 ϕ_1 与 ϕ_2 均以 $4T$ 为周期.
结果:(1) ϕ_1 偶, ϕ_2 奇; (2) $\phi_1^2+\phi_2^2\equiv 1$; (3) 加法公式成立; (4) ϕ_1, ϕ_2 均以 $4T$ 为周期.