

Classical Differential Geometry

古典微分几何

Version 2026.10.22

容与

https://rongyu221104.github.io/

rongyu221104@163.com

Typeset with LaTeX

目录

1 曲线论 **2**

1.1 曲线的参数化 2
1.2 空间曲线的局部性质 4
1.3 空间曲线的几何图景 6
1.4 平面曲线 8

2 曲面的局部理论 **10**

2.1 曲面的参数化 10
2.2 曲面上的函数 11
2.3 切空间与切映射 13
2.4 曲面第一基本形式 17
2.5 Gauss 映射 18
2.6 曲面第二基本形式 20
2.7 曲面的曲率 23
2.8 局部曲率的计算 27

3 曲面内蕴几何学 **32**

3.1 Gauss 绝妙定理 32

1 曲线论

1.1 曲线的参数化

Def. 1 正则参数化曲线

设 $c:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, $t\mapsto c(t)$ 为一个光滑映射. 若满足 $\forall t\in[a,b]$, $c'(t)\neq 0$, 则称 c 为一条正则参数化曲线 (regular parameterized curve). 称像集 $\{c(t)\mid t\in[a,b]\}$ 为一条平面曲线 ($n=2$) 或空间曲线 ($n=3$).

Rmk 讲义中出现的参数化曲线默认正则.

Def. 2 曲线的长度

定义参数化曲线 $c:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 的长度 (length) 为

$$L(c)=\int_a^b\|c'(t)\|\,\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

Def. 3 弧长参数化

设 $c:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 为一条参数化曲线. 若 $\forall s\in[a,b]$, 均满足

$$\|c'(s)\|\equiv 1 \tag{1.2}$$

则称 c 为一个弧长参数化 (arclength parametrization), 并称 s 为 c 的弧长参数 (arclength parameter). 且其长度为

$$L(c_{[a,b]})=\int_a^b\|c'(s)\|\,\mathrm{d}s=b-a \tag{1.3}$$

Prop. 1 速度-加速度正交关系

设 $c(s)$ 为一条弧长参数化曲线, 则有

$$c'(s)\cdot c''(s)=0 \tag{1.4}$$

Pf $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|c'(s)\|^2=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(c'(s)\cdot c'(s)\Big)=2c'(s)\cdot c''(s)=0.$

Def. 4 微分同胚

设 ϕ 是一个映射, 若 ϕ 是双射, 且 ϕ 与逆映射 ϕ^{-1} 均是光滑的, 则称 ϕ 为一个微分同胚 (diffeomorphism).

Def. 5　重参数化

设 $c_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ 为一条参数化曲线, $\phi : I_2 \to I_1$ 为微分同胚. 若 $\forall s \in I_2$, $\phi'(s) \neq 0$, 则定义

$$c_2 = c_1 \circ \phi : I_2 \to \mathbb{R}^n \tag{1.5}$$

$$c_2(s) = c_1(\phi(s)) \tag{1.6}$$

称 c_2 为 c_1 通过参数变换 ϕ 的一个重参数化 (reparametrization).

1. 若 $\forall s \in I_2$, $\phi'(s) > 0$, 则称 c_2 为保定向重参数化.
2. 若 $\forall s \in I_2$, $\phi'(s) < 0$, 则称 c_2 为反定向重参数化.

Prop. 2

若 $c_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$ 为 $c_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^3$ 的一个通过 ϕ 的重参数化, 则 $L(c_2) = L(c_1)$. 即, 曲线的长度与参数化无关, 是曲线的基本几何量.

Pf　Let $\phi'(s) > 0$, then $|\phi'(s)| = \phi'(s)$. $t = \phi(s)$, $\mathrm{d}t = \phi'(s)\,\mathrm{d}s$. $c_2'(s) = c_1'(\phi(s))\phi'(s)$,

$$L(c_2) = \int_{a_2}^{b_2} \|c_2'(s)\|\,\mathrm{d}s = \int_{a_2}^{b_2} \|c_1'(\phi(s))\||\phi'(s)|\,\mathrm{d}s = \int_{a_1}^{b_1} \|c_1(t)\|\,\mathrm{d}t = L(c_1)$$

$\phi'(s) < 0$ 同理, 有 $\forall s \in [a_2, b_2]$, $|\phi'(s)| = -\phi'(s)$.

Thm. 1　弧长参数化定理

每一条正则曲线都可以被重参数化为一条弧长参数化曲线.

Pf　设微分同胚 $\phi : s \mapsto t$ 将参数化曲线 $c(t)$ 重参数化为 $\gamma(s)$. 令 $\psi = \phi^{-1}$, 可定义

$$s = \psi(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(t)\|\,\mathrm{d}t = L(c_{[t_0,t]})$$

且 $\psi'(t) = \|c'(t)\| > 0$. 由 $\phi'(s) = \dfrac{1}{\psi'(\phi(s))} = \dfrac{1}{\|c'(\phi(s))\|}$ 可得

$$\|\gamma'(s)\| = \|c'(\phi(s))\||\phi'(s)| = \|c'(\phi(s))\|\frac{1}{\|c'(\phi(s))\|} = 1$$

从而 $\gamma(s)$ 即为一条弧长参数化曲线.

1.2 空间曲线的局部性质

Def. 6 Frenet 标架

设 $c(s)$ 为一条弧长参数化曲线, 且 $c''(s) \neq 0$, 定义

1. 切向量 (tangent vector)

$$T(s) := c'(s) \tag{1.7}$$

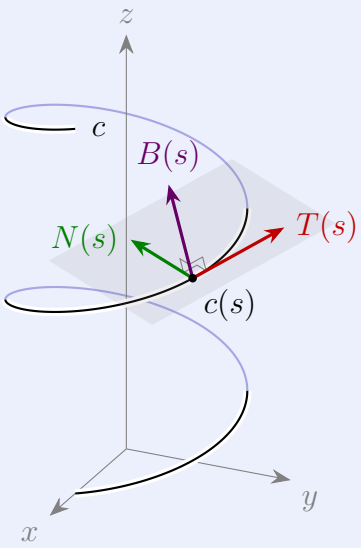
2. 法向量 (normal vector)

$$N(s) := \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|} \tag{1.8}$$

3. 从法向量 (binormal vector)

$$B(s) := T(s) \times N(s) \tag{1.9}$$

则 $\{T(s), N(s), B(s)\}$ 在 $c(s)$ 处构成一个标准正交基, 称为 Frenet 标架 (Frenet frame).



Def. 7 曲率

设 $c(s)$ 为一条弧长参数化曲线. 称

$$\kappa(s) := \|T'(s)\| = \|c''(s)\| \in [0, \infty) \tag{1.10}$$

为曲线在 $c(s)$ 处的曲率 (curvature). 从而

$$T'(s) = \kappa(s) N(s) \tag{1.11}$$

Def. 8　挠率, 挠曲线

设 $c(s)$ 为一条弧长参数化曲线. 称

$$\tau(s) = B'(s) \cdot N(s) \tag{1.12}$$

为曲线在 $c(s)$ 处的挠率 (torsion). 从而

$$B'(s) = \tau(s)N(s) \tag{1.13}$$

曲率与挠率均不为零的曲线, 称为挠曲线 (twisted curve).

Thm. 2　Frenet-Serret 公式

设 $c(s)$ 为一条弧长参数化曲线, 则其 Frenet 标架满足一阶微分方程组

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s)N(s) \\ N'(s) = -\kappa(s)T(s) - \tau(s)B(s) \\ B'(s) = \tau(s)N(s) \end{cases} \tag{1.14}$$

或可写作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Pf　$N' = (B \times T)' = B' \times T + B \times T' = \tau(N \times T) + \kappa(B \times N) = -\tau N - \kappa T.$

Thm. 3　空间曲线基本定理

若给定光滑函数 $\kappa : [0, l] \to (0, \infty)$, $\tau : [0, l] \to \mathbb{R}$, 点 $p_0 \in \mathbb{R}^3$, 标准正交基 $T_0, N_0, B_0 \in \mathbb{R}^3$. 则存在唯一的弧长参数化曲线 $c : [0, l] \to \mathbb{R}^3$, 使得

1. 其曲率为 $\kappa(s)$, 挠率为 $\tau(s)$;
2. 初始点为 $c(0) = p_0$;
3. 初始 Frenet 标架为 $T(0) = T_0$, $N(0) = N_0$, $B(0) = B_0$.

Rmk　等价地, 若不给定初始点与初始 Frenet 标架, 则曲率与挠率处处相等的两条曲线 $c, \tilde{c}$ 间只相差一个刚体变换

$$\tilde{c}(s) = Rc(s) + a \tag{1.16}$$

其中 $a \in \mathbb{R}^3$ 代表平移变换, $R \in \mathrm{SO}(3)$ 代表旋转变换.

Pf　由 F-S 公式, 可将空间曲线的存在唯一性问题转化为一阶微分方程组解的存在唯一

性问题, 于是由 Picard 定理可得空间曲线的存在唯一性定理.

Prop. 3　非弧长参数化曲线

设 $c(t)$ 为一条非弧长参数化曲线, 则

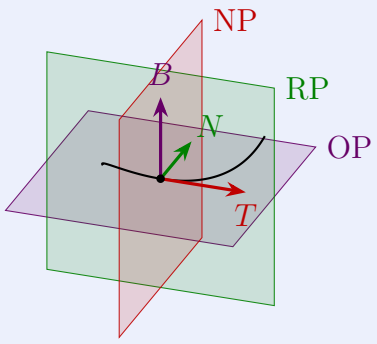
1. 切向量
$$T(t)=\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}=:\frac{c'(t)}{v(t)} \tag{1.17}$$
2. 法向量
$$N(t)=\frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}=\frac{T'(t)}{v(t)\kappa(t)} \tag{1.18}$$
3. 从法向量
$$B(t)=T(t)\times B(t)=\frac{T(t)\times T'(t)}{v(t)\kappa(t)} \tag{1.19}$$
4. 曲率
$$\kappa(t)=\frac{\|T'(t)\|}{v(t)}=\frac{\|c'(t)\times c''(t)\|}{v(t)^3} \tag{1.20}$$
5. 挠率
$$\tau(t)=\frac{B'(t)\times N(t)}{v(t)}=-\frac{[c'(t)\times c''(t)]\cdot c'''(t)}{\|c'(t)\times c''(t)\|^2} \tag{1.21}$$

Pf　设 $c(t)=\gamma(s)$, 则 $\|c'(t)\|\,\mathrm{d}t=\|\gamma'(s)\|\,\mathrm{d}s=\mathrm{d}s$, $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\|c'(t)\|=v(t)$. $T(t)=\dfrac{c'(t)}{v(t)}$.

1.3　空间曲线的几何图景

Def. 9　密切平面, 从切平面, 法平面

- 由 $T(s),N(s)$ 张成的平面 $\mathrm{Span}\{T(s),N(s)\}$ 称为密切平面 (osculating plane).
- $\mathrm{Span}\{T(s),B(s)\}$ 称为从切平面 (rectifying plane).
- $\mathrm{Span}\{N(s),B(s)\}$ 称为法平面 (normal plane).



Thm. 4　空间曲线在一点的标准展开

对弧长参数化曲线 $c(s)$ 在 s_0 附近作 Taylor 展开

$$c(s_0+\Delta s)=c(s_0)+c'(s_0)\Delta s+\frac{\Delta s^2}{2}c''(s_0)+\frac{\Delta s^3}{3!}c'''(s_0)+\cdots \tag{1.22}$$

Prop. 4　空间曲线的平面性判定

设 $c(s)$ 为一条弧长参数化曲线, 曲率 $\kappa(s)>0,\forall s$. 则 $c(s)$ 位于一个平面内 $\Longleftrightarrow \tau(s)\equiv 0$.

Pf　"⇒": 该平面必为 $\mathrm{Span}\{T,N\}$, 从而 B 为常矢量, $B'=\tau N=0$, 于是有 $\tau=0$.

"⇐": $\tau=0$, 则 $B'(t)=0$, $B(t)=\mathrm{const}\equiv B$. 令 $f(t)=[c(t)-c(0)]\cdot B$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=T\cdot B=0$, 从而 $f(t)\equiv f(0)=0$, 因此 $c(s)$ 位于与 B 垂直的平面上.

Thm. 5　空间挠曲线的球面性判定

设 $c(s)$ 为一条弧长参数化曲线, 且 $\kappa(s),\tau(s)\neq 0$. 若该曲线落在以 p 为球心, R 为半径的球面上, 则

$$c(s)=-\frac{1}{\kappa}N+\frac{1}{\tau}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{\kappa}\right)B+p \tag{1.23}$$

从而有约束方程

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left(\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{\kappa}\right)^2=\mathrm{const}=R^2 \tag{1.24}$$

反之, 若满足该约束方程, 则 $c(s)$ 或 $\kappa(s)=\mathrm{const}$, 或为球面上的曲线.

Pf　设球心为点 p, 半径为 R, 则 $\|c(s)-p\|^2=R^2$. 两边对 s 求导, 有 $2[c(s)-p]\cdot c'(s)=0$. 由于 $c(s)\neq p$, 因此 $[c(s)-p]\perp T(s)$, 从而设 $c(s)=a(s)N(s)+b(s)B(s)+p$. 由 F-S 公式

$$c'(s)=T(s)=a'N+aN'+b'B+bB'=a'N-a\kappa T-a\tau B+b'B+b\tau N$$

令 T 系数为 1 B,N 系数为 0, 则有 $a'+b\tau=0$, $a\kappa=-1$, $b'-a\tau=0$. 由前两式解得 $a=-\dfrac{1}{\kappa}$, $b=-\dfrac{1}{\tau}a'=\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\dfrac{1}{\kappa}$. 代回曲线方程 $(c(s)-p)^2=(aN+bB)^2=a^2+b^2=\left(\dfrac{1}{\kappa}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\dfrac{1}{\kappa}\right)^2=R^2=\mathrm{const}$.

反之, 则令 $A=\dfrac{1}{\kappa}$, $B=\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\dfrac{1}{\kappa}$, 满足 $\tau B=A'$. 约束方程写为 $A^2+B^2=\mathrm{const}$, 两边对 s 求导得 $AA'+BB'=(\tau A+B')B=0$. 若 $B=0$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\dfrac{1}{\kappa}=0$, $\kappa=\mathrm{const}$.

若 $\tau A+B'=0$, 即 $b'=\tau a$, 对 $c(s)-aN-bB$ 求导得

$$\begin{aligned}c'(s)-a'N-aN'-b'B-bB'&=T-a'N+a\kappa T+a\tau B-b'B-b\tau N\\&=(1+a\kappa)T-(a'+b\tau)N+(a\tau-b')B\end{aligned}$$

显然, $1+a\kappa=a'+b\tau=a\tau-b'=0$, 从而 $c(s)-aN-bB=\mathrm{const}\equiv p$, 即 $c(s)$ 在以 p 为球心

的球面上.

Prop. 5　常曲率常挠率曲线

设 $c(s)$ 为弧长参数化曲线, 若其曲率与挠率均为常数, 即 $\kappa(s)\equiv\kappa>0$, $\tau(s)\equiv\tau$, 则

$$c(s)=\left(\frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}\cos\left(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}s\right),\frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}\sin\left(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}s\right),\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}s\right) \tag{1.25}$$

从而曲率与挠率为常数的曲线可分为: 当 $\tau=0$, 以 $1/\kappa$ 为半径的圆, 当 $\tau\neq0$ 为圆柱螺线 (circular helix).

1.4　平面曲线

Def. 10　平面曲线的切向量与规定法向量

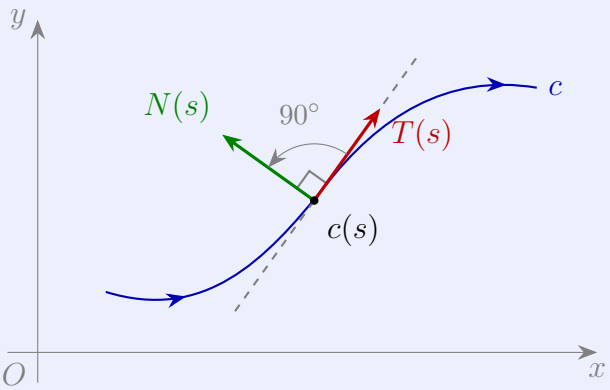
设 $c(s)$ 为一条弧长参数化的平面曲线,

$$T(s)=c'(s)=(x'(s),y'(s)) \tag{1.26}$$

为切向量,

$$N(s)=(-y'(s),x'(s)) \tag{1.27}$$

为规定的法向量, 即将切向量逆时针旋转 90° 得到的单位向量.



Def. 11　带符号曲率

设 $T'(s)=\kappa(s)N(s)$, 称其中 $\kappa(s)$ 为平面曲线 c 在 s 处的带符号曲率 (signed curvature).

Prop. 6　函数图像的带符号曲率

设曲线 $c(x)=(x,y=f(x))$ 的定向为沿 x 正方向, 则带符号曲率为

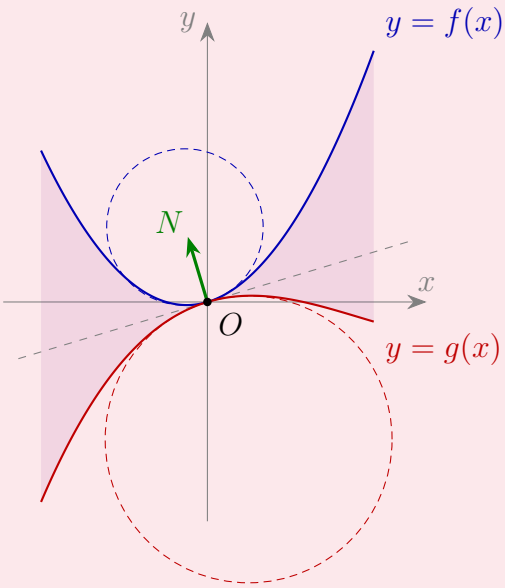
$$\kappa(x)=\frac{f''(x)}{[1+f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{1.28}$$

Pf

Thm. 6　比较定理

设 $f, g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ 为两个光滑函数, 满足 $f(x) \geq g(x)$, $f(0) = g(0)$. 则函数图像对应的曲线在原点处的带符号曲率满足

$$\kappa_f(0) \geq \kappa_g(0) \tag{1.29}$$



Def. 12　密切圆周

设 $\kappa(s) \neq 0$, 以 $c(s) + \dfrac{1}{\kappa(s)} N(s)$ 为圆心, $\left|\dfrac{1}{k(s)}\right|$ 为半径地圆周, 称为 c 在 s 处的密切圆周.

Prop. 7

设 $c : I \to \mathbb{R}^2$ 为简单光滑平面闭曲线, $\kappa(s)$ 为带符号曲率, 则

$$\int \kappa(s)\,\mathrm{d}s = 2\pi \tag{1.30}$$

2 曲面的局部理论

2.1 曲面的参数化

Def. 1 正则参数化曲面

设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为开集, 若映射

$$X : D \to \mathbb{R}^3 \quad (u,v) \mapsto X(u,v) = \Big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\Big) \tag{2.1}$$

满足

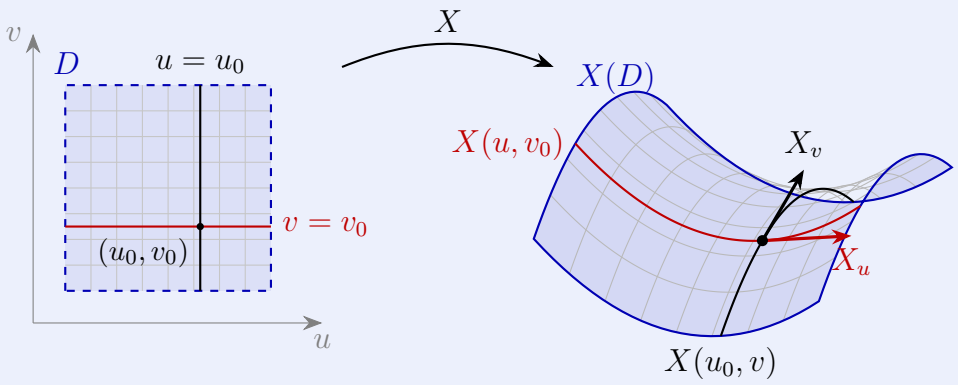
1. X 为光滑映射;
2. X_u, X_v 处处线性无关, 或等价地, Jacobi 矩阵的秩为

$$\operatorname{rank} \mathrm{d}X_{(u,v)} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2 \tag{2.2}$$

则称 X 为一个正则参数化曲面 (regular parametrized surface). 在此参数化下, 分别称

$$\gamma(u) = X(u, v = \text{const}) \qquad \gamma(v) = X(u = \text{const}, v) \tag{2.3}$$

为坐标 u 曲线 (u-coordinate curve) 与坐标 v 曲线.



Def. 2 正则光滑曲面

- 设 $S \subset \mathbb{R}$, 若 $\forall p \in S$, 存在开集 $U \subset \mathbb{R}^2$ 与 p 在 S 中的邻域 $V \subset \mathbb{R}^3$, 以及一个正则参数化曲面 $X : U \to \mathbb{R}^3$, 使得 $V = X(U)$, 则称 S 为一个正则光滑曲面 (regular smooth surface).

Rmk 讲义中出现的光滑曲面默认正则.

- 称 $X : U \to V$ 为 p 的一个局部参数化, 或者局部坐标系.
- 光滑曲面可等价地定义为: $S \subset \mathbb{R}^3$ 有一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 存在一族正则参数化曲面 $\{X_\alpha\}$, 使得 $\forall \alpha$,

$$X_\alpha(D_\alpha) = U_\alpha \cap S \tag{2.4}$$

Prop. 1 图像

若 $f : D \to \mathbb{R}$ 为一个光滑二元函数, 则其函数图像

$$S = \operatorname{Graph} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, z = f(x, y)\} \tag{2.5}$$

为一张光滑曲面, 且有全局参数化 $X(x, y) = \Big(x, y, f(x, y)\Big)$.

Prop. 2 水平集

设 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 为光滑函数, 若 $\forall c \in \mathbb{R}$,

$$S = f^{-1}(c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = c\} \tag{2.6}$$

且 $\forall p \in S$, $\nabla f(p) \neq 0$, 则 S 为一个正则光滑曲面.

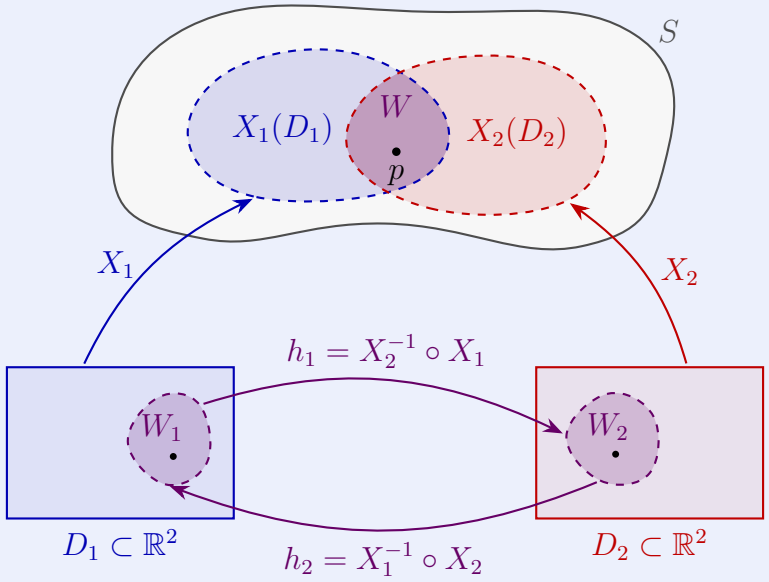
2.2 曲面上的函数

Def. 3 坐标变换的光滑性

设 $X_i : D_i \to S$ 为正则光滑曲面 S 上 p 点的两个局部参数化, 令 $W = X_1(D_1) \cap X_2(D_2)$, $W_i = X_i^{-1}(W)$, 则映射

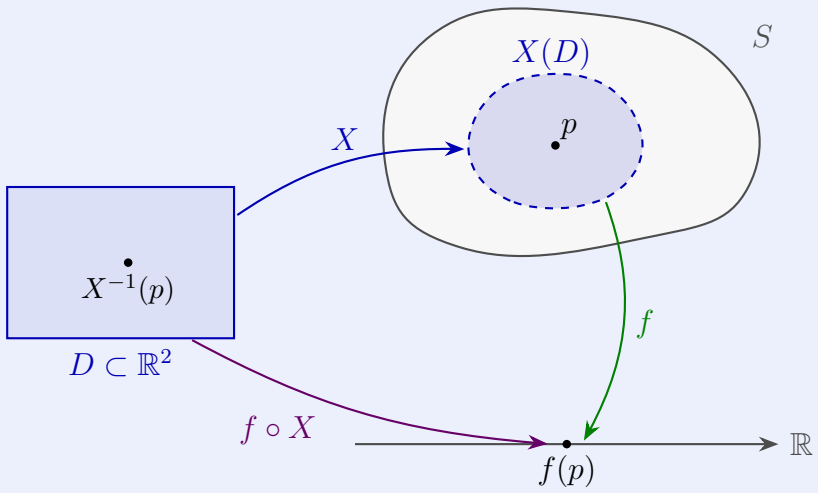
$$h_1 = X_2^{-1} \circ X_1 : W_1 \to W_2 \qquad h_2 = X_1^{-1} \circ X_2 : W_2 \to W_1 \tag{2.7}$$

是光滑的. 称 h_1, h_2 为 X_1 与 X_2 间的转移函数 (transition function), 或坐标变换.



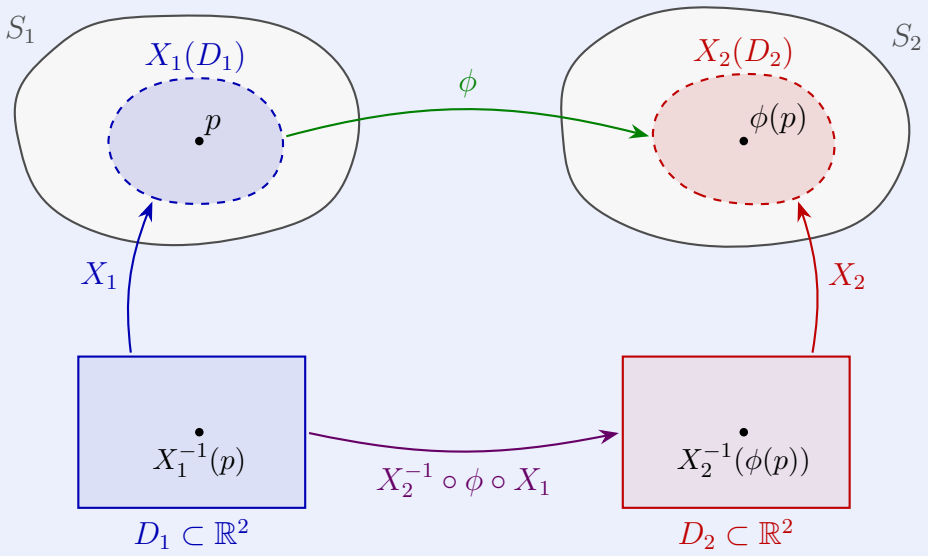
Def. 4　曲面上函数的光滑性

设 $f : S \to \mathbb{R}$ 为定义在光滑曲面 S 上的函数, 若对 $\forall p \in S$ 的任一局部参数化 $X : D \to S$, 二元函数 $f \circ X : D \to \mathbb{R}$ 在 $X^{-1}(p)$ 处是光滑的, 则称 f 在 p 处是光滑的.



Def. 5　曲面间映射的光滑性

设 $\phi : S_1 \to S_2$ 为两个光滑曲面间的映射, 若对 $\forall p \in S_1$ 的任一局部参数化 $X_1 : D_1 \to S_1$, 以及 $\phi(p)$ 的任一局部参数化 $X_2 : D_2 \to S_2$, $X_2^{-1} \circ \phi \circ X_1$ 在 $X_1^{-1}(p)$ 处是光滑的, 则称 ϕ 在 p 处是光滑的.



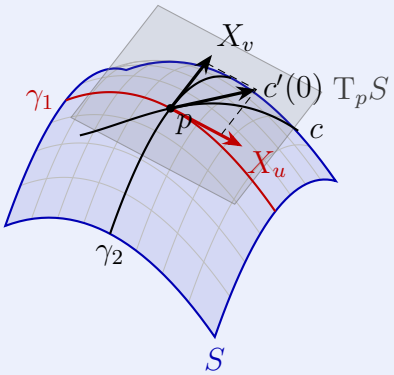
2.3 切空间与切映射

Def. 6　切向量, 切空间, 典范基

- 设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 为光滑曲面, 若存在参数化曲线 $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S$, 且 $c(0) = p$, 则称 $c'(0)$ 为曲面 S 在 p 处的一个切向量 (tangent vector).
- S 在 p 处所有切向量构成的集合, 称为 S 在 p 处的切空间 (tangent space), 记作 $\mathrm{T}_p S$.
- 设 $X : (u, v) \mapsto X(u, v)$ 为 $p = X(0, 0) \in S$ 的一个局部参数化, $\gamma_1(u) = X(u, v \equiv 0)$ 为坐标 u 曲线, $\gamma_2(v) = X(u \equiv 0, v)$ 为坐标 v 曲线. 则称

$$\{X_u(0, 0) := \gamma_1'(0), X_v(0, 0) := \gamma_2'(0)\} \tag{2.8}$$

  为由 X 诱导的 $\mathrm{T}_p S$ 的典范基 (canonical basis), 或坐标基 (coordinate basis).



Prop. 3　切空间的典范基

设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 为光滑曲面, 则 T_pS 为一个 2 维线性空间. 若取定 p 的局部参数化 X, 则有

$$\mathrm{T}_pS = \mathrm{Span}\{X_u(0,0), X_v(0,0)\} \tag{2.9}$$

$\Longleftrightarrow$ p 处的任一切向量均可由典范基线性表出, 即 $\forall \xi \in \mathrm{T}_pS$,

$$\xi = \xi^u X_u(0,0) + \xi^v X_v(0,0) \tag{2.10}$$

Pf　设 $c(t) = X(u(t), v(t))$ 满足 $c(0) = p$, $c'(0) = \xi$, 从而 $\xi = c'(0) = u'(0)X_u + v'(0)X_v$.

Prop. 4　切平面上的图像表示

任意光滑曲面 S 在给定点 $p \in S$ 附近, 总可以表成 T_pS 上一个函数的图像.

Pf　取 p 附近的局部参数化 $X : D \to S$, 设 $p = X(0,0) = (0,0,0)$. 取 T_pS 的标准正交基 $\{e_1, e_2\}$, n 为 p 处单位法向量, 则 $\{e_1, e_2, n\}$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 中的标准正交基. $\mathbb{R}^3$ 中任一点可唯一表为 $xe_1 + ye_2 + zn$.

目标: 对 p 附近曲面上任一点 $X(u,v) = xe_1 + ye_2 + zn$, 将 z 表示为 x, y 的函数 $z = \phi(x,y)$, 而 $z = X(u,v) \cdot n$ 是 (u,v) 的函数, 故只需将 u, v 均表示为 x, y 的函数 $x = X(u,v) \cdot e_1$, $y = X(u,v) \cdot e_2$. 故只需验证 $h(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ 在局部可逆.

定义 $h(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = (X(u,v) \cdot e_1, X(u,v) \cdot e_2)$. 其 Jacobi 矩阵为

$$\mathrm{d}h(0,0) = \begin{pmatrix} x_u(0,0) & x_v(0,0) \\ y_u(0,0) & y_v(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_u(0,0) \cdot e_1 & X_v(0,0) \cdot e_1 \\ X_u(0,0) \cdot e_2 & X_v(0,0) \cdot e_2 \end{pmatrix}$$

而 $\mathrm{d}h(0,0)$ 的两个列向量分别是 $X_u(0,0), X_v(0,0) \in \mathrm{T}_pS = \mathrm{Span}\{e_1, e_2\}$ 在标准正交基 $\{e_1, e_2\}$ 下的分量表示, 而 $X_u(0,0), X_v(0,0)$ 线性无关. $\mathrm{d}h(0,0)$ 满秩, h 在 $(0,0)$ 的一个邻域内可逆, 将逆映射记为 $h^{-1}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. 令 $\phi(x,y) := [X \circ h^{-1}(x,y)] \cdot n$, 则由 h, h^{-1} 的定义, S 上 p 附近的任一点可以表示为

$$X(u,v) = [X(u,v) \cdot e_1]e_1 + [X(u,v) \cdot e_2]e_2 + [X(u,v) \cdot n]n = xe_1 + ye_2 + \phi(x,y)n$$

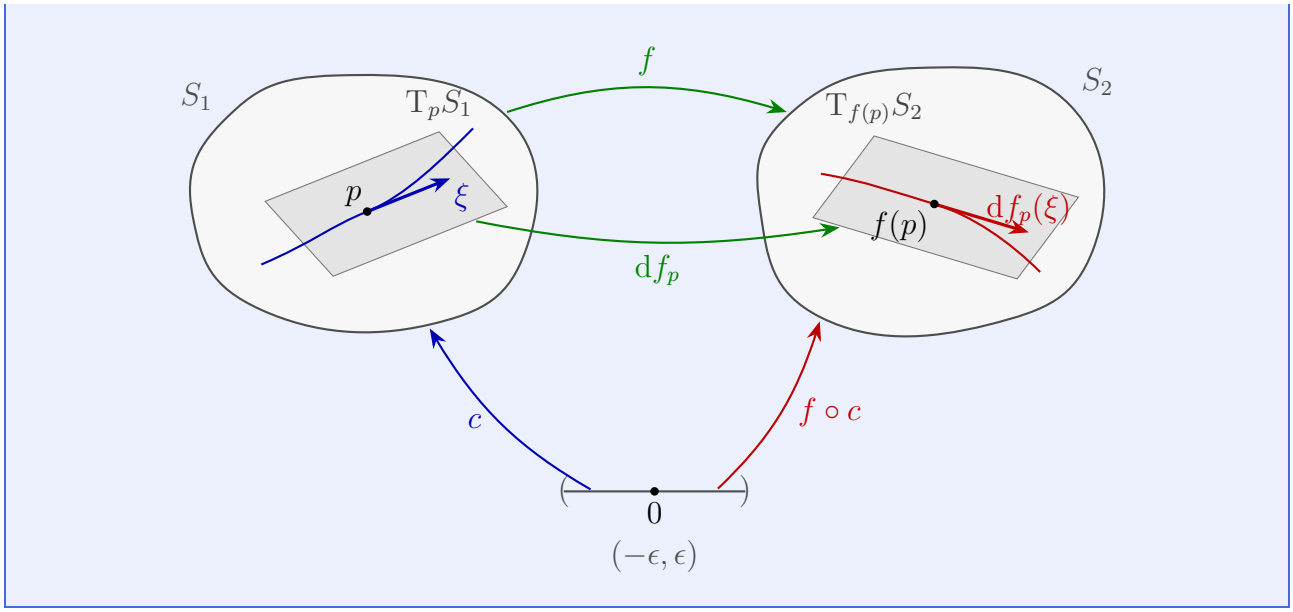
Def. 7　切映射

设 $f : S_1 \to S_2$ 为一个光滑映射. 则 f 在 $p \in S_1$ 处的切映射 (tangent map) 为

$$\mathrm{d}f_p : \mathrm{T}_pS_1 \to \mathrm{T}_{f(p)}S_2 \quad \xi \mapsto \mathrm{d}f_p(\xi) \tag{2.11}$$

取 $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S$, 使得 $c(0) = p$, $c'(0) = \xi$, 则 $f \circ c : (-\epsilon, \epsilon) \to S_2$, $f \circ c(0) = f(p)$,

$$\mathrm{d}f_p(\xi) := (f \circ c)'(0) \in \mathrm{T}_{f(p)}S_2 \tag{2.12}$$

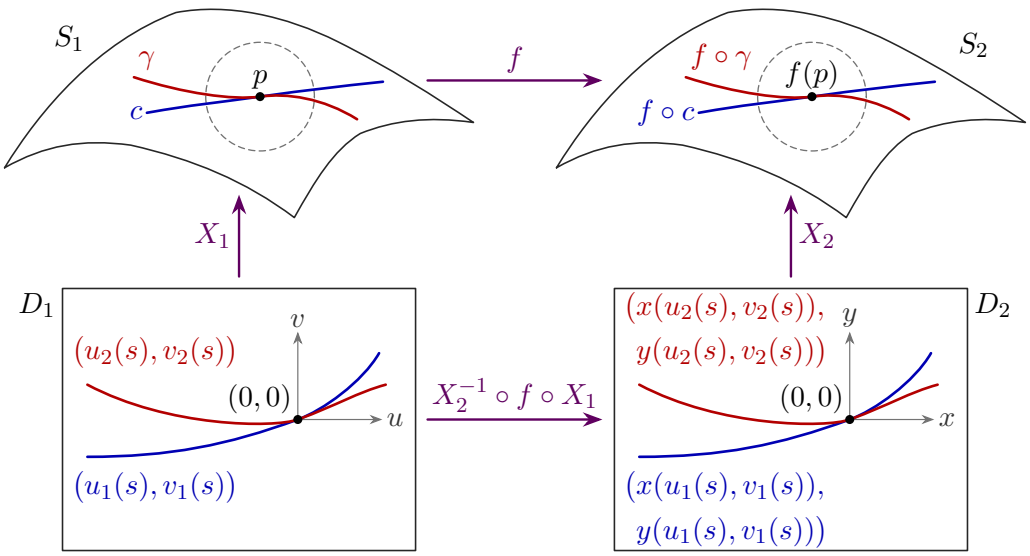


Prop. 5　切映射的线性性

切映射 $\mathrm{d}f_p:\mathrm{T}_pS_1\to\mathrm{T}_{f(p)}S_2$ 是良定义的线性映射.

Pf　在 $p\in S_1, f(p)\in S_2$ 附近分别取局部参数化

$$\begin{cases} X_1:D_1\to S_1 & (u,v)\mapsto X_1(u,v) & p=X_1(0,0)\\ X_2:D_2\to S_2 & (x,y)\mapsto X_2(x,y) & f(p)=X_2(0,0)\end{cases}$$



取 S_1 上两条曲线 $c,\gamma:(-\epsilon,\epsilon)\to S_1$, 坐标表示为

$$X_1^{-1}\circ c(s)=(u_1(s),v_1(s))\qquad X_2^{-1}\circ\gamma(s)=(u_2(s),v_2(s))$$

由 $c(0)=\gamma(0)=p$ 可得

$$(u_1(0),v_1(0))=(u_2(0),v_2(0))=(0,0)$$

由 $c'(0)=\gamma'(0)=\xi\in \mathrm{T}_pS_1$, 有

$$c'(0)=(X_1)_u u_1'(0,0)+(X_1)_v v_1'(0,0)=\gamma'(0)=(X_2)_u u_2'(0,0)+(X_2)_v v_2'(0,0)$$

其中 $(X_1)_u,(X_1)_v$ 为 T_pS_1 的典范基, 因此

$$(u_1'(0,0),v_1'(0,0))=(u_2'(0,0),v_2'(0,0))$$

令 $X_2^{-1}\circ f\circ X_1: D_1\to D_2,(u,v)\mapsto (x(u,v),y(u,v))$, 则 S_2 上两条曲线 $f\circ c, f\circ\gamma:(-\epsilon,\epsilon)\to S_2$ 的坐标表示为

$$\begin{aligned}X_2^{-1}\circ f\circ c(s)&=X_2^{-1}\circ f\circ X_1\circ X_1^{-1}\circ c(s)=X_2^{-1}\circ f\circ X_1(u_1(s),v_1(s))\\&=(x(u_1(s),v_1(s)),y(u_1(s),v_1(s)))\end{aligned}$$

同理 $X_2^{-1}\circ f\circ\gamma(s)=(x(u_2(s),v_2(s)),y(u_2(s),v_2(s)))$. 于是

$$\begin{cases}f\circ c(s)=X_2(x(u_1(s),v_1(s)),y(u_1(s),v_1(s)))\\ f\circ\gamma(s)=X_2(x(u_2(s),v_2(s)),y(u_2(s),v_2(s)))\end{cases}$$

于是 $c'(0)$ 与 $\gamma'(0)$ 在切映射下的像分别为

$$(f\circ c)'(0)=\begin{pmatrix}(X_2)_x(0,0) & (X_2)_y(0,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1'(0)\\ v_1'(0)\end{pmatrix}$$

$$(f\circ \gamma)'(0)=\begin{pmatrix}(X_2)_x(0,0) & (X_2)_y(0,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_2'(0)\\ v_2'(0)\end{pmatrix}$$

由于 $(u_1'(0,0),v_1'(0,0))=(u_2'(0,0),v_2'(0,0))$, 可得 $(f\circ c)'(0)=(f\circ\gamma)'(0)$, 因此 $c'(0)=\gamma'(0)=\xi$ 在 $\mathrm{d}f_p$ 下的像唯一, 从而 $\mathrm{d}f_p$ 是良定义的.

Cor. 1　切映射在局部参数化下的矩阵表示

$\mathrm{d}f_p:\mathrm{T}_pS_1\to \mathrm{T}_{f(p)}S_2$ 在典范基 $\{(X_1)_u(0,0),(X_1)_v(0,0)\}$ 与 $\{(X_1)_x(0,0),(X_1)_y(0,0)\}$ 下的矩阵为

$$\mathrm{d}\left(X_2^{-1}\circ f\circ X_1\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\tag{2.13}$$

Pf　由上述证明过程可得.

2.4 曲面第一基本形式

Def. 8 第一基本形式

Euclid 内积在切空间 T_pS 上的限制, 称为曲面的第一基本形式 (first fundamental form), 记作

$$\mathrm{I}_p : \mathrm{T}_pS \times \mathrm{T}_pS \to \mathbb{R} \quad (\xi, \eta) \mapsto \xi \cdot \eta \tag{2.14}$$

Rmk 曲面的第一基本形式是一个对称的 $(0,2)$-张量场, 即为 2 维曲面的 Riemann 度规. 等距变换为保持度规的微分同胚变换, 在等距变换下不变的性质, 称为曲面的内蕴性质. 第一基本形式描述曲面的内蕴度量性质, 能给出曲面上的长度、角度、面积等。

Prop. 6 第一基本形式在典范基下的表示

定义典范基的第一基本形式为

$$\begin{cases} E = \mathrm{I}_p(X_u(0,0), X_u(0,0)) = X_u(0,0) \cdot X_u(0,0) \\ F = \mathrm{I}_p(X_u(0,0), X_v(0,0)) = X_u(0,0) \cdot X_v(0,0) \\ G = \mathrm{I}_p(X_v(0,0), X_v(0,0)) = X_v(0,0) \cdot X_v(0,0) \end{cases} \tag{2.15}$$

于是对于 $\forall \alpha = a_1 X_u(0,0) + a_2 X_v(0,0), \beta = b_1 X_u(0,0) + b_2 X_v(0,0) \in \mathrm{T}_pS$, 有

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_p(\alpha, \beta) &= a_1 a_2 E + (a_1 b_2 + a_2 b_1) F + a_2 b_2 G \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.16}$$

称 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ 为第一基本形式 I_p 的矩阵表示.

Cor. 2

在 $p \in S$ 附近, 存在一个局部参数化 $X : D \to S$, 使得在典范基 $\{X_u(0,0), X_v(0,0)\}$ 下, I_p 在 T_pS 上的坐标表示恰为单位矩阵 I_2.

等价地, $\{X_u(0,0), X_v(0,0)\}$ 为 T_pS 的一个标准正交基.

Rmk 在 $(x,y) \neq (0,0)$ 处, 第一基本形式的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 + \phi_x(x,y)^2 & \phi_x(x,y)\phi_y(x,y) \\ \phi_y(x,y)\phi_x(x,y) & 1 + \phi_y(x,y)^2 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Pf 设 $X : (x,y) \mapsto xe_1 + ye_2 + \phi(x,y)n$, 且 $X(0,0) = p$, 则 $X_x(0,0) = e_1 + \phi_x(0,0)n$, $X_y(0,0) = e_2 + \phi_y(0,0)n$. 由于 $X_u(0,0), X_v(0,0) \in \mathrm{T}_pS$, 故 $\phi_x(0,0) = \phi_y(0,0) = 0$, 从而 I_p 在

$X_u(0,0), X_v(0,0)$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Def. 9　面积

若光滑曲面 S 的一个区域 (region) $R \subseteq S$ 可被一个局部参数化 X 覆盖, 即 $R \subseteq X(D)$, 则可定义其面积 (area) 为

$$A(R) = \iint_{X^{-1}(R)} \|X_u \times X_v\| \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{2.18}$$

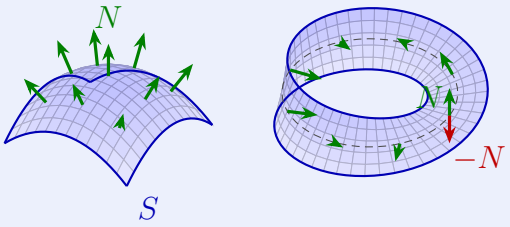
若 R 无法被单一局部参数化覆盖, 则可将其分解为多个足够小的子区域, 使得每块子区域都可被一个局部参数化覆盖, 利用面积的可数可加性即可得到 $A(R)$.

Rmk　定义 R 的面积要求 R 的局部参数化的 X 的原像集为可测集.

2.5　Gauss 映射

Def. 10　可定向曲面

- 若光滑曲面 S 上存在一个连续的单位法向量场, 即 $\forall p \in S$, $N(p) \perp \mathrm{T}_p S$, $\|N(p)\| = 1$, N 关于 p 连续. 则称 S 为一张可定向曲面 (orientable surface), 称该连续单位法向量场 N 为 S 的一个定向 (orientation).
- 否则, 称为不可定向曲面 (non-orientable surface). Möbius 带即为典型的不可定向曲面, 其逐点都存在单位法向量, 但无法连续选取.
- 若 S 可定向, 则恰有两个定向.

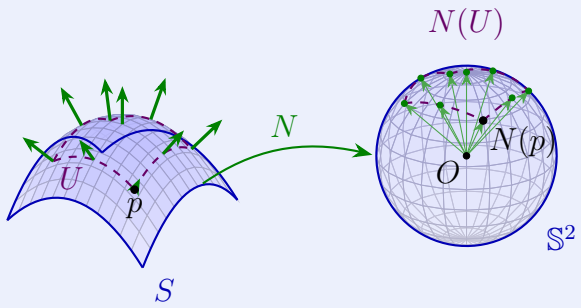


Def. 11　Gauss 映射

设 N 为可定向曲面 S 上的一个选定的单位法向量场, 则可将 N 视为从曲面 S 到单位球面 $\mathbb{S}^2$ 的映射

$$N : S \to \mathbb{S}^2 \quad p \mapsto N(p) \tag{2.19}$$

则称该映射为 S 上的 Gauss 映射 (Gauss map).



Pf $\forall p \in S$, 存在向量 $N(p) \in \mathbb{R}^3$, 满足 $\|N(p)\| = 1$. 由于 $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$, 因此 $N(p) \in \mathbb{S}^2$, $\forall p \in S$.

Def. 12　Weingarten 映射

可定向曲面 S 上的 Gauss 映射 $N : S \to \mathbb{S}^2$ 在 $p \in S$ 处的切映射

$$\mathrm{d}N_p : \mathrm{T}_pS \to \mathrm{T}_{N(p)}\mathbb{S}^2 = \mathrm{T}_pS \tag{2.20}$$

称为 S 在 p 处的 Weingarten 映射 (Weingarten map).

Rmk　Weingarten 映射是一个 $(1,1)$-型张量.

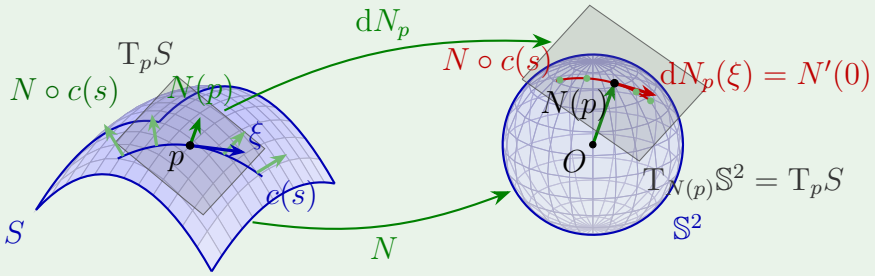
Prop. 7　Weingarten 映射的像

$\forall \xi \in \mathrm{T}_pS$, 取曲线 $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S$, 满足

$$c(0) = p \qquad c'(0) = \xi \tag{2.21}$$

则 $N \circ c(s)$ 为沿 $c(s)$ 的单位法向量场, 而

$$\mathrm{d}N_p(\xi) = (N \circ c)'(0) =: N'(0) \tag{2.22}$$



Prop. 8　自伴性

$\mathrm{d}N_p : \mathrm{T}_pS \to \mathrm{T}_pS$ 是自伴线性映射, 即 $\forall \xi, \eta \in \mathrm{T}_pS$,

$$\mathrm{d}N_p(\xi) \cdot \eta = \xi \cdot \mathrm{d}N_p(\eta) \tag{2.23}$$

Pf 取 p 附近的局部参数化 $X:D\to S$, 设 $p=X(0,0)$, 记 $N(u,v)$ 为 $X(u,v)$ 处的单位法向量. 取 $c(s)=X(s,0)$, 满足 $c(0)=X(0,0)=p$, $c'(0)=X_u(0,0)$, 则 $N(s,0)$ 为 $c(s)$ 上的单位法向量场, 因此 $\mathrm{d}N_p(X_u(0,0))=\left.\dfrac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}N(s,0)=N_u(0,0)$.

$$\mathrm{d}N_p(X_u(0,0))\cdot X_u(0,0)=X_u(0,0)\cdot\mathrm{d}N_p(X_u(0,0))$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}N_p(X_u(0,0))\cdot X_v(0,0)=N_u(0,0)\cdot X_v(0,0)&=\underbrace{(N\cdot X_v)_u|_{(0,0)}}_{=0}-N(0,0)\cdot X_{vu}(0,0)\\&=-N(0,0)\cdot X_{uv}(0,0)=X_u(0,0)\cdot\mathrm{d}N_p(X_v(0,0))\end{aligned}$$

2.6 曲面第二基本形式

Def. 13 第二基本形式

在 T_pS 上与 Weingarten 映射 $\mathrm{d}N_p$ 对应的对称二次型, 称为 $p\in S$ 处的第二基本形式 (second fundamental form), 记作 II_p.

$$\mathrm{II}_p:\mathrm{T}_pS\times\mathrm{T}_pS\to\mathbb{R}\quad(\xi,\eta)\mapsto-\mathrm{d}N_p(\xi)\cdot\eta=-\xi\cdot\mathrm{d}N_p(\eta)\tag{2.24}$$

Rmk 第二基本形式是一个对称 $(0,2)$-型张量. 第二基本形式描述曲面的外蕴弯曲性质, 即曲面如何嵌入在周围空间中.

Prop. 9 第二基本形式在典范基下的表示

定义典范基的第二基本形式为

$$\begin{cases}e=\mathrm{II}_p(X_u(0,0),X_u(0,0))=N_p\cdot X_{uu}(0,0)\\f=\mathrm{II}_p(X_u(0,0),X_v(0,0))=N_p\cdot X_{uv}(0,0)\\\quad=\mathrm{II}_p(X_v(0,0),X_u(0,0))=N_p\cdot X_{vu}(0,0)\\g=\mathrm{II}_p(X_v(0,0),X_v(0,0))=N_p\cdot X_{vv}(0,0)\end{cases}\tag{2.25}$$

于是对于 $\forall\alpha=a_1X_u(0,0)+a_2X_v(0,0),\beta=b_1X_u(0,0)+b_2X_v(0,0)\in\mathrm{T}_pS$, 有

$$\mathrm{II}_p(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}a_1&a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e&f\\f&g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\tag{2.26}$$

称 $\begin{pmatrix}e&f\\f&g\end{pmatrix}$ 为第二基本形式 II_p 的矩阵表示.

Prop. 10　第二基本形式在切平面函数图像坐标系下的矩阵表示

设 $X:(x,y)\mapsto(x,y,\phi(x,y))$ 为 $p=(0,0,0)\in S$ 处的局部参数化, 则

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} \\ \phi_{xy} & \phi_{yy} \end{pmatrix}_{(0,0)} =: \operatorname{Hess}\phi(0,0) \tag{2.27}$$

Pf　x-y 平面为 $p=(0,0,0)$ 处的切平面, 则 $\phi(0,0)=0$, $\phi_x(0,0)=\phi_y(0,0)=0$.

$$\begin{cases} X_x(x,y)=(1,0,\phi_x(x,y)) \\ X_y(x,y)=(0,1,\phi_y(x,y)) \end{cases} \Longrightarrow N(x,y)=\frac{X_x(x,y)\times X_y(x,y)}{\|X_x(x,y)\times X_y(x,y)\|}=\left.\frac{(-\phi_x,-\phi_y,1)}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+1}}\right|_{(x,y)}$$

$X_{xx}(0,0)=(0,0,\phi_{xx}(0,0))$, 从而 $e=N_p\cdot X_{xx}(0,0)=\left.\dfrac{\phi_{xx}}{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+1}}\right|_{(0,0)}=\phi_{xx}(0,0)$, 同理 $f=\phi_{xy}(0,0)$, $g=\phi_{yy}(0,0)$. 将 e,f,g 排成矩阵即可.

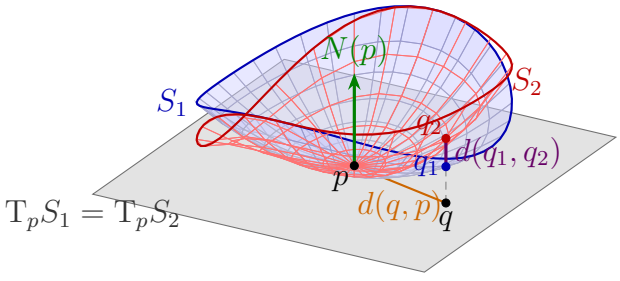
Cor. 3

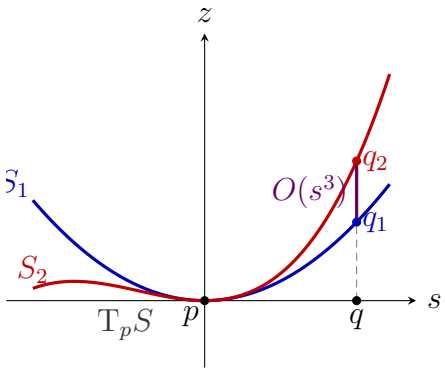
若光滑曲面 S_1,S_2 在 $p\in S_1\cap S_2$ 处有相同切平面与第二基本形式, 则 S_1,S_2 在 p 处二次密切.

设 S_1,S_2 在 p 处均为 $\mathrm{T}_pS=\mathrm{T}_pS_1=\mathrm{T}_pS_2$ 上的函数图像, 有局部参数化

$$X_1:(x,y)\mapsto(x,y,\phi(x,y)) \qquad X_2:(x,y)\mapsto(x,y,\psi(x,y)) \qquad p=(0,0,0)$$

则 $\phi(0,0)=\psi(0,0)=0$, $\nabla\phi(0,0)=\nabla\psi(0,0)=(0,0)$, $\operatorname{Hess}\psi(0,0)=\operatorname{Hess}\psi(0,0)$. 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时 $\|X_1(x,y)-X_2(x,y)\|=O(x^2+y^2)$.





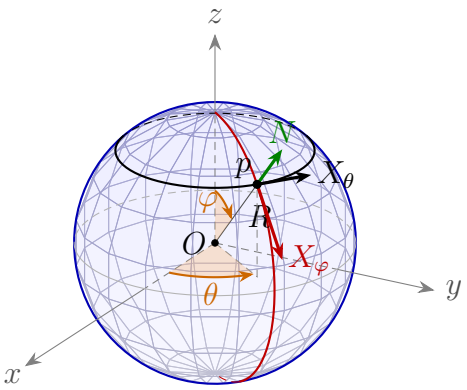
易证, $\lim\limits_{q\to p}\dfrac{d(q_1,q_2)}{d(q,p)^2}=0$.

Eg. 1　球面

设球面半径为 R, 取球坐标系 $X:(\varphi,\theta)\mapsto(R\sin\varphi\cos\theta,R\sin\varphi\sin\theta,R\cos\varphi)$, 其中 θ 为

经度角, φ 为余纬度角. $N(\varphi,\theta)=(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi)$ 为单位外法向量.

$$\begin{cases} X_\varphi(\varphi,\theta)=(R\cos\varphi\cos\theta,R\cos\varphi\sin\theta,-R\sin\varphi)\\ X_\theta(\varphi,\theta)=(-R\sin\varphi\sin\theta,R\sin\varphi\cos\theta,0)\end{cases}$$

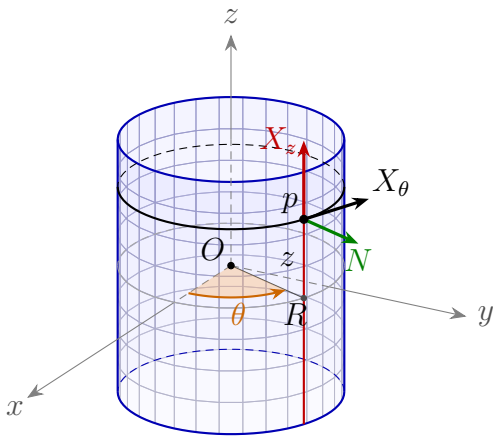


$$\begin{pmatrix} -R & 0\\ 0 & -R\sin^2\varphi\end{pmatrix}$$

Eg. 2　柱面

设柱面半径为 R, 取柱坐标系 $X:(\theta,z)\mapsto(R\cos\theta,R\sin\theta,z)$. $N(\theta,z)=(\cos\theta,\sin\theta,0)$ 为单位外法向量.

$$X_\theta(\theta,z)=(-R\sin\theta,R\cos\theta,0)\qquad X_z=(0,0,1)$$



2.7 曲面的曲率

Lem. 1

设 S 为光滑曲面, $p \in S$, $\mathrm{II}_p : \mathrm{T}_pS \times \mathrm{T}_pS \to \mathbb{R}$ 为对称二次型, 可正交对角化. 取 T_pS 的标准正交基 $\{e_1, e_2\}$, 使得 e_1, e_2 均为 II_p 的特征向量, 对应特征值为 $\kappa_1(p), \kappa_2(p)$, 即 II_p 在 (e_1, e_2) 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \kappa_1(p) & 0 \\ 0 & \kappa_2(p) \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

Def. 14 主曲率, 主方向

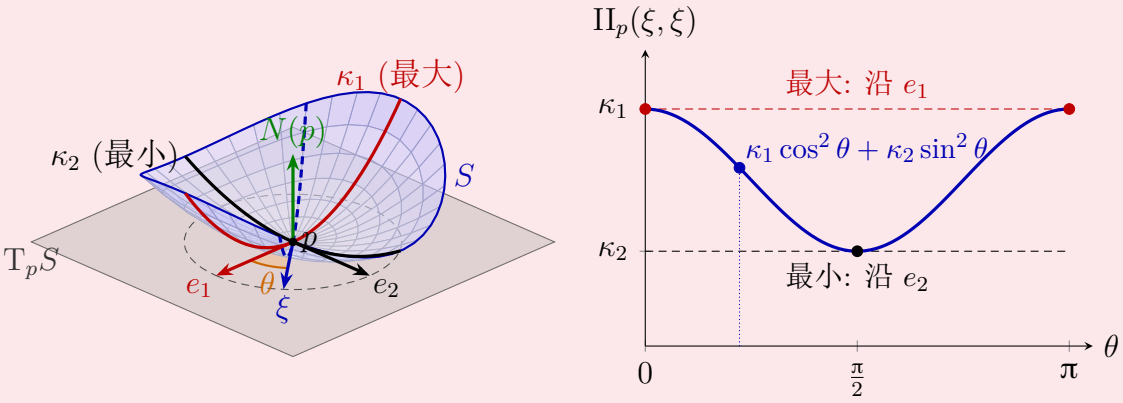
$\kappa_1(p), \kappa_2(p)$ 称为 S 在 p 处的主曲率 (principle curvature), 称 e_1, e_2 为与 $\kappa_1(p), \kappa_2(p)$ 对应的主方向 (principle direction). 且有

$$\mathrm{d}N_p(e_i) = -\kappa_i(p) e_i \tag{2.29}$$

Rmk 当且仅当 $\kappa_1(p) \neq \kappa_2(p)$ 时主方向唯一.

Thm. 1 Euler 公式

$$\mathrm{II}_p(\xi, \xi) = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta \tag{2.30}$$



Def. 15 平均曲率

$$H(p) = \frac{1}{2}\big(\kappa_1(p) + \kappa_2(p)\big) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathrm{II}_p \tag{2.31}$$

称为 S 在 p 处的平均曲率 (mean curvature).

Def. 16 Gauss 曲率

$$K(p) = \kappa_1(p)\kappa_2(p) = \det \mathrm{II}_p \tag{2.32}$$

称为 S 在 p 处的 Gauss 曲率 (Gaussian curvature).

Rmk 上述三个曲率中, 只有 Gauss 曲率 $K(p)$ 与曲面的定向无关. Gauss 曲率描述曲面的内蕴弯曲性质, 代表曲面偏离 Euclid 平面几何的程度.

Def. 17 点的分类

- 若 $K(p)>0$ ($\kappa_1(p),\kappa_2(p)$ 同号, II_p 正定或负定), 则称 p 为椭圆点 (elliptic point).
- 若 $K(p)<0$ ($\kappa_1(p),\kappa_2(p)$ 异号, II_p 不定且非退化), 则称 p 为双曲点 (hyperbolic point).
- 若 $K(p)=0$, $H(p)\neq 0$ (κ_1,κ_2 恰有一个为 0), 则称 p 为抛物点 (parabolic point).
- 若 $\kappa_1(p)=\kappa_2(p)=0$, 则称 p 为平坦点 (flat point).
- 若 $\kappa_1(p)=\kappa_2(p)$, 则称 p 为全脐点 (umbilic point).

Prop. 11 全局全脐点的曲面

若 $\forall p\in S$ 均为全脐点, 则 S 为平面或球面的一部分.

Pf 取局部参数化 $X:D\to S$, $(u,v)\mapsto X(u,v)$, 若 p 为全脐点, 设 $\kappa_1(p)=\kappa_2(p)=\kappa$, 有 $\forall\xi=\xi^1e_1+\xi^2e_2\in \mathrm{T}_pS$, $-\mathrm{d}N_p(\xi)=\xi^1\kappa e_1+\xi^2\kappa e_2=\kappa\xi$, 从而 T_pS 内的所有向量均为 $-\mathrm{d}N_p$ 属于特征值 κ 的特征向量, 即 $-\mathrm{d}N_p=\kappa\,\mathrm{id}_{\mathrm{T}_pS}$. 设 $\kappa_1=\kappa_2=\lambda(u,v)$,

$$-\mathrm{d}N_p(X_u)=-N_u=\lambda(u,v)X_u \qquad -\mathrm{d}N_p(X_v)=-N_v=\lambda(u,v)X_v$$

$$-N_{uv}=\lambda_v(u,v)X_u+\lambda(u,v)X_{uv}=-N_{vu}=\lambda_u(u,v)X_v+\lambda(u,v)X_{vu}$$

从而可得 $\lambda_u(u,v)X_v=\lambda_v(u,v)X_u$. 由于 X_u,X_v 线性无关, $\lambda_u=\lambda_v=0$, 从而 $\lambda=\mathrm{const}$.

1. 若 $\lambda=0$, 则 $N_u=N_v=0$, $N=\mathrm{const}$, 从而 S 为平面;
2. 若 $\lambda\neq 0$, 则 $(N+\lambda X)_u=(N+\lambda X)=0$, $N+\lambda X=\mathrm{const}\equiv X_0$, 于是 $N=X_0-\lambda X$, 由于 $\|N\|=1$, $\left\|X(u,v)-\dfrac{X_0}{|\lambda|}\right\|=\dfrac{1}{|\lambda|}$, 从而 S 是以 $\dfrac{X_0}{|\lambda|}$ 为球心, 以 $\dfrac{1}{|\lambda|}$ 为半径的球面.

Thm. 2 曲面局部标准模型

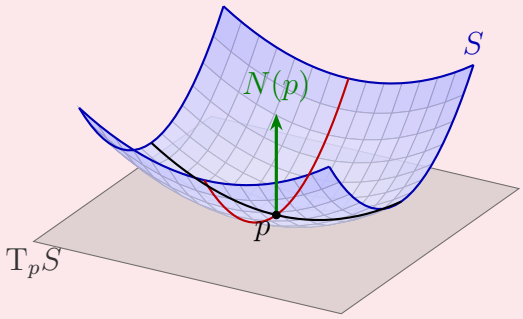
S 在 p 附近可表为 T_pS 上的函数图像, 即 $X:(x,y)\mapsto(x,y,\phi(x,y))$. II_p 在标准正交基 $\{e_1,e_2\}$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}\kappa_1 & 0\\ 0 & \kappa_2\end{pmatrix}=\mathrm{Hess}\,\phi$, 于是可得 $\phi_{xx}(0,0)=\kappa_1$, $\phi_{yy}(0,0)=\kappa_2$, $\phi_{xy}=\phi_{yx}=0$, 从而

$$\phi(x,y)=\frac{1}{2}(\kappa_1x^2+\kappa_2y^2) \tag{2.33}$$

对于五类点, 标准模型为

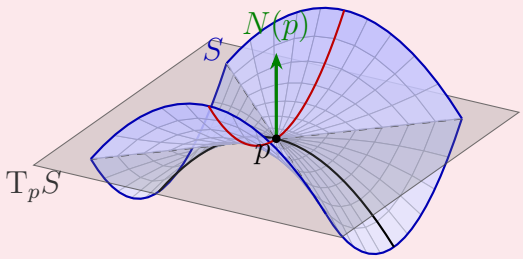
- 椭圆点: 椭圆抛物面. 设 $\kappa_1 = a$, $\kappa_2 = b$,

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2) \quad (ab > 0) \tag{2.34}$$



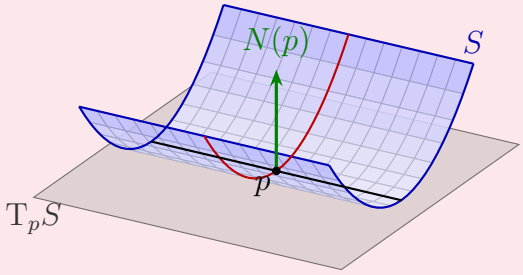
- 双曲点: 双曲抛物面. 设 $\kappa_1 = a$, $\kappa_2 = -b$,

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 - by^2) \quad (ab > 0) \tag{2.35}$$



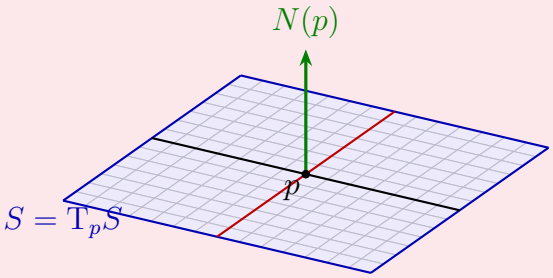
- 抛物点: 抛物柱面. 设 $\kappa_1 = a$, $\kappa_2 = 0$,

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}ax^2 \tag{2.36}$$



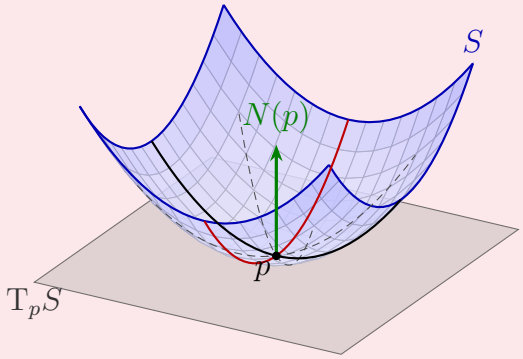
- 平坦点: 平面.

$$\phi(x, y) = 0 \tag{2.37}$$



- 全脐点: 旋转抛物面. 设 $\kappa_1 = \kappa_2 = a$,

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}a(x^2 + y^2) \tag{2.38}$$



Def. 18　法曲率

设 $c(s)$ 为可定向曲面 S 上的弧长参数化曲线, $c(0) = p$, 则 c 在 p 处的法曲率 (normal curvature) 为

$$k_{\mathrm{n}} := c''(0) \cdot N(p) \tag{2.39}$$

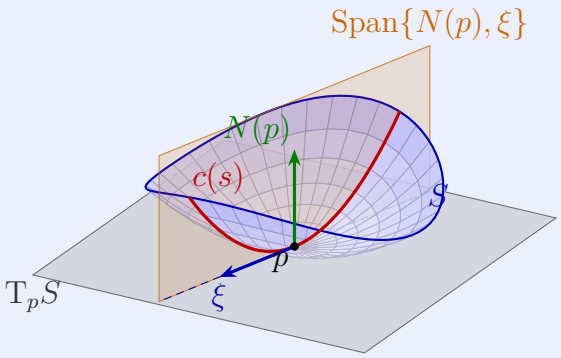
Prop. 12　法曲率与第二基本形式

$$\mathrm{II}_p(c'(0)) = k_{\mathrm{n}} \tag{2.40}$$

Pf　$\mathrm{II}_p(c'(0)) = -\mathrm{d}N_p(c'(0)) \cdot c'(0) = -N'(0) \cdot c'(0) = -\underbrace{(N(s) \cdot c'(s))'_{s=0}}_{=0} + N(0) \cdot c''(0) = k_{\mathrm{n}}$.

Def. 19　法截线

设 $\xi \in \mathrm{T}_pS$, $\|\xi\| = 1$. 由 $N(p)$ 与 ξ 张成的平面与曲面 S 所截得的曲线 $\mathrm{Span}\{N(p), \xi\} \cap S$, 称为 S 在 p 处沿 ξ 的法截线 (normal section). 对于 $c(s) \subseteq \mathrm{Span}\{N(p), \xi\} \cap S$, $c(0) = p$, 有 $c'(0) \in \mathrm{Span}\{N(p), \xi\} \cap \mathrm{T}_pS = \mathrm{Span}\{\xi\}$.



Cor. 4

$c(s)$ 为平面曲线, $\kappa(0)$ 为 c 在 0 处的带符号曲率, 则

$$\mathrm{II}_p(\xi,\xi)=N(0)\cdot c''(0)=N(0)\cdot\Big(\kappa(0)N(0)\Big)=\kappa(0) \tag{2.41}$$

2.8 局部曲率的计算

Lem. 2 自伴线性变换与对称二次型

设 $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为一个内积空间, $\mathcal{A}:V\to V$ 为自伴线性变换, 满足 $\langle\mathcal{A}(\xi),\eta\rangle=\langle\xi,\mathcal{A}(\eta)\rangle$. 任意自伴线性变换 $\mathcal{A}$ 都唯一对应一个对称二次型 $\mathcal{Q}:V\times V\to\mathbb{R}$, $(\xi,\eta)=\langle\mathcal{A}(\xi),\eta\rangle$.
设 $e_1,\cdots,e_n$ 为 V 的一个基. $\mathcal{Q}$ 在此基下的矩阵为对称矩阵 $Q=\Big(\mathcal{Q}(e_i,e_j)\Big)$, 且 Q 在基变换下的变换为合同变换, i.e. $Q'=S^{\mathrm{T}}QS$. $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵为 A, 不一定对称, 且 A 在基变换下的变换为相似变换, i.e. $A'=S^{-1}AS$. 其中可逆矩阵 S 为基变换的过渡矩阵.
设 $P=(P_{ij})=\Big(\langle e_i,e_j\rangle\Big)$, 则 $A=P^{-1}Q$. 若 $e_1,\cdots,e_n$ 为标准正交基, 则 $P=I$, $A=Q$

Pf 若 $\xi=(e_1,\cdots,e_n)\boldsymbol{x}$, $\eta=(e_1,\cdots,e_n)\boldsymbol{y}$, 则 $\mathcal{Q}(\xi,\eta)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{y}$, 其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 为 ξ,η 在基下的坐标. 设 $(e_1',\cdots,e_n')=(e_1,\cdots,e_n)S$, 则

$$\begin{cases}\xi=(e_1',\cdots,e_n')\boldsymbol{x}'=(e_1,\cdots,e_n)S\boldsymbol{x}'\\ \eta=(e_1',\cdots,e_n')\boldsymbol{y}'=(e_1,\cdots,e_n)S\boldsymbol{y}'\end{cases}$$

$$\mathcal{Q}(\xi,\eta)=\boldsymbol{x}'^{\mathrm{T}}Q'\boldsymbol{y}'=(S\boldsymbol{x}')^{\mathrm{T}}Q(S\boldsymbol{y}')=\boldsymbol{x}'^{\mathrm{T}}\underbrace{S^{\mathrm{T}}QS}_{=Q'}\boldsymbol{y}'$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\xi)&=\mathcal{A}(e_1',\cdots,e_n')\boldsymbol{x}'=(e_1',\cdots,e_n')A'\boldsymbol{x}'=(e_1,\cdots,e_n)SA'\boldsymbol{x}'\\&=\mathcal{A}(e_1,\cdots,e_n)S\boldsymbol{x}'=(e_1,\cdots,e_n)AS\boldsymbol{x}'\end{aligned}$$

$\Rightarrow SA'=AS$, $\Rightarrow A'=S^{-1}AS$. 设 $\varepsilon_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$ 为第 i 个元素为 1, 其余均为 0 的向量, 则

$$\mathcal{A}(e_i)=\mathcal{A}(e_1,\cdots,e_n)\varepsilon_i=(e_1,\cdots,e_n)A\varepsilon_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}e_k$$

$$\mathcal{Q}(e_j,e_i)=\mathcal{Q}(e_i,e_j)=\langle\mathcal{A}(e_i),e_j\rangle=\left\langle\sum_{k=1}^{n}a_{ki}e_k,e_j\right\rangle=\sum_{k=1}^{n}P_{jk}a_{ki}=(PA)_{ji}$$

从而 $Q=PA$, 或 $A=P^{-1}Q$.

Thm. 3　任一局部参数化下的 Gauss 曲率与平均曲率

负 Weingarten 映射 $-\mathrm{d}N_p$ 对应于第二基本形式 II_p, 从而 $-\mathrm{d}N_p$ 在任一典范基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} eG-fF & fG-gF \\ fE-eF & gE-fF \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

主方向 e_1, e_2 构成一个标准正交基, 从而 $-\mathrm{d}N_p$ 与 II_p 的矩阵均为 $\mathrm{diag}(\kappa_1, \kappa_2)$. 由于 $\mathrm{tr}, \det$ 均为相似不变量, 因此可定向曲面 S 在任一局部参数化下的 Gauss 曲率与平均曲率为

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \tag{2.43}$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG-2fF+gE}{EG-F^2} \tag{2.44}$$

Prop. 13　函数图像的平均曲率与 Gauss 曲率

设 $S = \mathrm{Graph}\,\phi$, 取向上的单位法向量场, 则平均曲率与 Gauss 曲率为

$$H = \frac{1}{2}\frac{\phi_{uv}(1+\phi_v^2) - 2\phi_{uv}\phi_u\phi_v + \phi_{vv}(1+\phi_u^2)}{(1+\|\nabla\phi\|^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{div}\,\frac{\nabla\phi}{\sqrt{1+\|\nabla\phi\|^2}} \tag{2.45}$$

$$K = \frac{\phi_{uu}\phi_{vv}-\phi_{uv}^2}{(1+\|\nabla\phi\|^2)^2} = \frac{\det(\mathrm{Hess}\,\phi)}{(1+\|\nabla\phi\|^2)^2} \tag{2.46}$$

Pf　$X(u,v) = (u, v, \phi(u,v))$, $X_u = (1, 0, \phi_u)$, $X_v = (0, 1, \phi_v)$. 从而

$$E = 1+\phi_u^2 \qquad F = \phi_u\phi_v \qquad G = 1+\phi_v^2$$

向上的单位法向量为 $N = \dfrac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \dfrac{(-\phi_u, -\phi_v, 1)}{\sqrt{1+\phi_u^2+\phi_v^2}}$, 从而

$$e = \frac{\phi_{uu}}{\sqrt{1+\phi_u^2+\phi_v^2}} \qquad f = \frac{\phi_{uv}}{\sqrt{1+\phi_u^2+\phi_v^2}} \qquad g = \frac{\phi_{vv}}{\sqrt{1+\phi_u^2+\phi_v^2}}$$

代入平均曲率与 Gauss 曲率公式可得结果.

Cor. 5

若 $\nabla\phi|_{(0,0)} = 0$, 则 $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$, $e = \phi_{uu}$, $f = \phi_{uv}$, $g = \phi_{vv}$, 从而 $-\mathrm{d}N_{(0,0)}$ 在典范基下的矩阵为

$$\mathrm{Hess}\,\phi = \begin{pmatrix} \phi_{uu} & \phi_{uv} \\ \phi_{uv} & \phi_{vv} \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

Cor. 6　旋转面的 Gauss 曲率

将 xy 平面正的光滑函数 $y=\phi(x)$, $x\in[a,b]$ 的图像绕 x 轴旋转一圈所得的旋转面的 Gauss 曲率为

$$K=-\frac{\phi''}{\phi(1+\phi'^2)^2} \tag{2.48}$$

Pf　$X(x,\theta)=(x,\phi(x)\cos\theta,\phi(x)\sin\theta)$, $X_x=(1,\phi'\cos\theta,\phi'\sin\theta)$, $X_\theta=(0,-\phi\sin\theta,\phi\cos\theta)$, $N=\dfrac{(\phi',-\cos\theta,-\sin\theta)}{\sqrt{1+\phi'^2}}$

Cor. 7

设 $c(s)=(\phi(s),\psi(s))$ 为 yz 平面第一象限内一条弧长参数化曲线, 记 $c(s)$ 绕 z 轴旋转一圈得到的曲面为 S, 取向外的法向量, 则有

$$K=-\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} \tag{2.49}$$

$$H=\frac{1}{2}\frac{(-\psi'\phi''+\phi'\psi'')\phi^2+\psi'\phi}{\phi^2} \tag{2.50}$$

Def. 20　极小曲面

若 $z=\phi(x,y)$ 的图像 $\operatorname{Graph}\phi$ 的平均曲率 H 恒为零, 即 $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\operatorname{div}\frac{\nabla\phi}{\sqrt{1+\|\nabla\phi\|^2}}\equiv 0 \iff \phi_{uv}(1+\phi_v^2)-2\phi_{uv}\phi_u\phi_v+\phi_{vv}(1+\phi_u^2) \tag{2.51}$$

则称 $\operatorname{Graph}\phi$ 为极小曲面 (minimal surface). 称上述方程为极小曲面方程 (minimal surface equation).

Thm. 4　Bernstein 定理

设 $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为光滑函数, 若 $\operatorname{Graph}\phi$ 为极小曲面, 则必定存在常数 $a,b,c\in\mathbb{R}$, 使得

$$\phi(x,y)=ax+by+c \tag{2.52}$$

即, $\mathbb{R}^3$ 中定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的极小曲面图像必为平面.

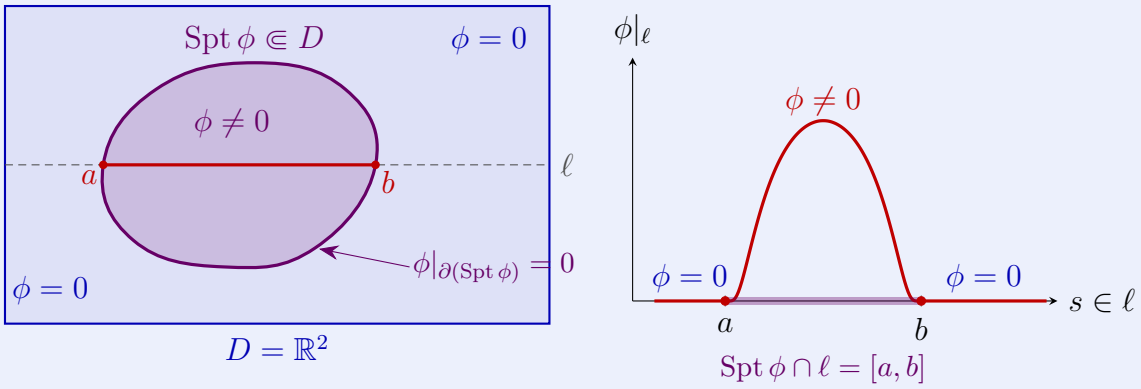
Def. 21　闭包, 支撑集, 紧集, 紧支光滑函数

- 集合 A 与其边界的并集 $\overline{A}=A\cup\partial A$ 称为 A 的闭包 (closure).
- 对于任意函数 $\phi:D\to\mathbb{R}$, 函数非零处构成的集合的闭包

$$\operatorname{Spt}\phi=\overline{\{(u,v)\in D\mid\phi(u,v)\neq 0\}} \tag{2.53}$$

称为 ϕ 的支撑集 (support).

- 若一个集合在 $\mathbb{R}^n$ 中既是闭集, 又是有界集, 则称其为一个紧集 (compact set).
- 设 $\phi: D \to \mathbb{R}$ 为一个光滑函数, 若其支撑集为 D 的紧集, 记作 $\operatorname{Spt}\phi \Subset D$, 则称 ϕ 为紧支光滑函数 (compactly supported smooth function).



Thm. 5　面积变分公式

设 S 为光滑曲面, 有局部参数化 $X: D \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto X(u,v)$, $N(u,v)$ 为光滑单位法向量场. 取 $\phi: D \to \mathbb{R}$ 为紧支光滑函数, 对 $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, 考虑曲面的法向变分

$$X_t: D \to \mathbb{R}^3 \quad (u,v) \mapsto X(u,v) + t\phi(u,v)N(u,v) \tag{2.54}$$

有变分公式

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} A(X_t) = -2\int_D \phi H\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{2.55}$$

Pf　$(X_t)_u = X_u + t(\phi_u N + \phi N_u)$, $(X_t)_v = X_v + t(\phi_v N + \phi N_v)$. $E_t = (X_t)_u \cdot (X_t)_u$,

$$E_t'|_{t=0} = 2(X_t)_u \left.\frac{\mathrm{d}(X_t)_u}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 2X_u \cdot (\phi_u N + \phi N_u) = 2\phi X_u \cdot N_u = -2\phi X_{uu}\cdot N = -2\phi e$$

同理 $F_t'|_{t=0} = -2\phi f$, $G_t'|_{t=0} = -2\phi g$. $A(X_t) = \int_D \sqrt{E_tG_t - F_t^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, 由于 ϕ 紧支于 D, 因此

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} A(X_t) &= \int_D \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \sqrt{E_tG_t - F_t^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_D \left.\frac{E_t'G_t + E_tG_t' - 2F_tF_t'}{2\sqrt{E_tG_t-F_t^2}}\right|_{t=0} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_D \frac{-2\phi eG - 2\phi gE + 4\phi fF}{2\sqrt{EG-F^2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = -\int_D \phi \underbrace{\frac{eG - 2fF + gE}{\sqrt{EG-F^2}}}_{=2\sqrt{EG-F^2}H}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

Cor. 8

当 $H \equiv 0$ 时, 有极小值 $A(X_0)$, 故称 X_0 为极小曲面.

3 曲面内蕴几何学

3.1 Gauss 绝妙定理