

Group Representation Theory

群表示论

Version 2026.9.24

容与

https://rongyu221104.github.io/

rongyu221104@163.com

Typeset with LaTeX

目录

1 群的线性表示 3

1.1 线性表示的基本概念 . . . 3

1.1.1 线性群 . . . 3

1.1.2 线性表示与矩阵表示的定义 . . . 3

1.1.3 线性表示的简单例子 . . . 5

1.1.4 置换表示 . . . 7

1.1.5 正则表示 . . . 8

1.2 线性表示的结构 . . . 9

1.2.1 子表示 . . . 9

1.2.2 表示的直和 . . . 10

1.2.3 表示的可约性 . . . 11

1.2.4 完全可约表示 . . . 12

1.3 Abel 群的不可约表示 . . . 13

1.4 非 Abel 群的不可约表示的常用构造方法 . . . 15

1.4.1 线性表示与群同态的合成 . . . 15

1.4.2 表示的提升与分解 . . . 16

1.4.3 挠表示 . . . 17

1.4.4 逆步表示 . . . 18

2 群代数 20

2.1 群代数的线性表示 . . . 20

2.2 群的线性表示与群代数上的左模 . . . 23

2.2.1 群代数上的左模 . . . 23

2.2.2 有限群 G 的正则表示与左正则 $F[G]$-模 . . . 25

2.2.3 子表示与左 $F[G]$-模的子模 . . . 25

2.2.4 群表示的直和分解与左 $F[G]$-模的直和分解 . . . 26

2.2.5 群表示的可约性与左 $F[G]$-模的可约性 . . . 26

2.2.6 群表示的等价与左 $F[G]$-模的同构 . . . 28

2.3 有限维半单代数的不可约左模 . . . 29

2.3.1 环到理想的直和分解与幂等元 . . . 29

2.3.2 有限维半单代数上的左正则模 . . . 30

2.3.3 有限维半单代数的不同构的不可约左模的个数 . . . 31

2.3.4 有限维单代数的结构 . . . 34

2.3.5 代数闭域上有限维半单代数的不可约左模的维数 . . . 37

2.4 有限群的不等价的不可约表示的个数和次数 . . . 39

3 特征标 **42**
3.1 群与群代数的特征标 42
3.2 不可约特征标的正交关系 42
3.3 不可约复表示的次数 42

4 张量积 **43**
4.1 模的张量积 43
4.2 群表示的张量积 43
4.3 群直积的表示 43

5 无限群表示论 **44**
5.1 拓扑空间 44

1 群的线性表示

1.1 线性表示的基本概念

1.1.1 线性群

Def. 1 一般线性群

- 域 F 上所有 n 阶可逆矩阵构成的集合, 对于矩阵乘法成为一个群, 称为一般线性群 (general linear group), 记作 $\mathrm{GL}_n(F)$.
- 域 F 上线性空间 V 上的所有可逆线性变换构成的集合, 对于映射的复合成为一个群, 称为 V 上的可逆线性变换群, 记作 $\mathrm{GL}(V)$.

Rmk 若 $\dim V = n$, 则 $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_n(F)$.

Prop. 1 一般线性群与特殊线性群

设域 F 的单位元为 1, 定义特殊线性群为 $\mathrm{SL}_n(F) = \{M \in \mathrm{GL}_n(F) \mid \det M = 1\}$, 有

$$\mathrm{SL}_n(F) \triangleleft \mathrm{GL}_n(F) \qquad \mathrm{GL}_n(F)/\mathrm{SL}_n(F) \cong F^\times$$

其中 $F^\times$ 为由 F 中非零元构成的乘法群.

Pf 行列式 $\det : \mathrm{GL}_n(F) \to F^\times$ 为群同态. $\forall a \in F^\times$, $\det[\mathrm{diag}(a, 1, \cdots, 1)] = a$, 因此 $\det$ 为满同态, 从而 $\mathrm{Im}(\det) = F^\times$. $\mathrm{Ker}(\det) = (F)$, 从而

1.1.2 线性表示与矩阵表示的定义

Def. 2 线性表示, 表示空间, 表示的次数

- 群 G 到 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个群同态 ρ, 称为 G 在域 F 上的一个线性表示 (linear representation), 简称为 F-表示, 记作 (ρ, V).
- 称 V 为 ρ 的表示空间 (representation space).
- 若 V 有限维, 则称 ρ 为有限维表示 (finite-dim rep), 称 $\dim_F V$ 为表示 ρ 的次数 (degree), 记作 $\deg \rho$; 若 V 无限维, 则称 ρ 为无限维表示 (infinite-dim rep).

Prop. 2 表示的核与像

$$\mathrm{Ker}\,\rho \triangleleft G \qquad \mathrm{Im}\,\rho < \mathrm{GL}(V)$$

Def. 3　忠实表示, 平凡表示, 主表示

- 若 $\operatorname{Ker}\rho = \{e_G\}$, 即 $\rho : G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$, 则称 ρ 为一个忠实表示 (faithful rep).
- 若 $\operatorname{Ker}\rho = G$, 即 $\operatorname{Im}\rho = \{\mathrm{id}_V\}$, 则称 ρ 为一个平凡表示 (trivial rep).
- G 的 1 次平凡表示称为 G 的主表示 (principle rep), 记作 ρ_0.

Def. 4　矩阵表示

群 G 到 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的一个群同态 R, 称为 G 在域 F 上的一个 n 次矩阵表示 (matrix rep).

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{GL}(V) \\ & \searrow^{R} & \updownarrow \cong \\ & & \mathrm{GL}_n(F) \end{array}$$

Rmk　V 中取一个基, 可逆线性变换 $\rho(g)$ 在基下的可逆矩阵为 $R(g)$, 则称由此得到的 R 为由 ρ 提供的矩阵表示.

$$R : G \to \mathrm{GL}_n(F) \quad g \mapsto R(g)$$

Def. 5　线性表示的等价

设群 G 有两个 F-表示 (ρ, V) 与 (σ, W), 若存在一个线性同构 $\phi : V \to W$, 使得 $\forall g \in G$, 有交换图:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & W \\ {\scriptstyle \rho(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma(g)} \\ V & \xrightarrow{\phi} & W \end{array}$$

亦即 $\forall g \in G$,

$$\sigma(g)\phi = \phi\rho(g)$$

则称 (ρ, V) 与 (σ, W) 等价 (equivalent), 记作 $\rho \approx \sigma$.
Rmk　线性表示的等价建立了 G 上所有 F-表示构成的集合上的一个等价关系.

Def. 6　矩阵表示的等价

设群 G 有两个次数相同的矩阵表示 $R, \Sigma : G \to \mathrm{GL}_n(F)$, 若存在可逆矩阵 $\Phi \in \mathrm{GL}_n(F)$, 使得 $\forall g \in G$, 均有

$$\Sigma(g) = \Phi R(g) \Phi^{-1}$$

则称 R 与 Σ 等价, 记作 $R \approx \Sigma$.

Prop. 3

有限维线性表示 $(\rho, V) \approx (\sigma, W) \iff$ 提供的矩阵表示 $R \approx \Sigma$.

Pf 在 V,W 中分别取基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$, $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$. 设

$$\rho(g)(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)R(g)\qquad \sigma(g)(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\Sigma(g)$$

"⇒": $(\rho,V)\approx(\sigma,W)$, ⇒ 存在线性同构 $\phi:V\to W$, 使得 $\forall g\in G$, $\sigma(g)\phi=\phi\rho(g)$, 且 $\phi(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\Phi$. 则有

$$\sigma(g)(\beta_1,\cdots,\beta_n)\Phi=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\Sigma(g)\Phi=\sigma(g)\phi(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\phi\rho(g)(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$
$$=\phi(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)R(g)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\Phi R(g)$$

$\Rightarrow \Sigma(g)\Phi=\Phi R(g)$, $\Rightarrow \Sigma(g)=\Phi R(g)\Phi^{-1}$.

"⇐": $\Phi\in \mathrm{GL}_n(F)$, ⇒ 存在线性同构 ϕ, 使得 $\phi(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\Phi$, 由此易得 $\rho(g)\phi=\phi\sigma(g)$.

1.1.3 线性表示的简单例子

Eg. 1 实数加法群的 1 次表示

群 G 在 F 上的一个 1 次矩阵表示 $R:G\to F^\times$ 为 G 上的 $F^\times$ 值函数, 且满足 $\forall g_1,g_2\in G$,

$$R(g_1g_2)=R(g_1)R(g_2)\qquad R(e)=1$$

其中 $e,1$ 分别为群 G 与域 F 的单位元.

- $(\mathbb{R},+)$ 的 1 次实表示 $f:(\mathbb{R},+)\to\mathbb{R}^\times$ 需满足 $\forall t,s\in\mathbb{R}$, $f(t+s)=f(t)f(s)$.

  可微的实表示必为指数型函数 $f_r(x)=\mathrm{e}^{rx}$, $r\in\mathbb{R}$.

  Rmk 若 $r=0$, $\operatorname{Ker} f_0=\mathbb{R}$, f_0 为平凡表示. 若 $r\neq 0$, $\operatorname{Ker} f_r=\{0\}$, f_r 为忠实表示.

- $(\mathbb{R},+)$ 的 1 次复表示 $f_c(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}cx}$, $c\in\mathbb{C}^\times$.

  Rmk

Eg. 2 Fourier 级数

$(\mathbb{R},+)$ 的 1 次复表示 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}=\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 构成平方可积函数空间 $L^2(0,2\pi)$ 的一个标准正交基, 即 $(f_n,f_m)=\delta_{nm}$. 于是 $\forall f\in L^2(0,2\pi)$

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_nf_n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\qquad c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x$$

Eg. 3　实数加法群的 2 次表示与平面旋转

$(\mathbb{R},+)$ 的一个 2 次实矩阵表示为

$$R:(\mathbb{R},+)\to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\quad t\mapsto \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

$(\mathbb{R},+)$ 的一个 2 次实表示为

$$\rho:(\mathbb{R},+)\to \mathrm{GL}(V)\quad t\mapsto \mathcal{R}_t$$

其中 V 为平面上所有以 O 为起点的向量所构成的实线性空间, $\mathcal{R}_t$ 为平面上绕 O 转角为 t 的旋转变换.

Rmk　$\mathrm{Ker}\,\rho=\{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$, 故 ρ 不是忠实表示.

Pf　$\forall t,s\in\mathbb{R}$,

$$R(t)R(s)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos s & -\sin s\\ \sin s & \cos s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(t+s) & -\sin(t+s)\\ \sin(t+s) & \cos(t+s)\end{pmatrix}=R(t+s)$$

Eg. 4　n 次表示

$(\mathbb{R},+)$ 的一个 n 次实表示为

$$\rho:(\mathbb{R},+)\to \mathrm{GL}(\mathbb{R}_n[x])\quad a\mapsto T_a$$

$$T_a:\mathbb{R}_n[x]\mapsto\mathbb{R}_n[x]\quad f(x)\mapsto f(x+a)$$

其中 $\mathbb{R}_n[x]=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]\mid \deg f<n\}$. 取基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$, 则 T_a 提供的矩阵表示为

$$R(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1}\\ 0 & 1 & 2a & \cdots & \mathrm{C}_{n-1}^{n-2}a^{n-2}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \mathrm{C}_{n-1}^{n-3}a^{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

Rmk　$\mathrm{Ker}\,\rho=\{a\in\mathbb{R}\mid T_a=\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[x]}\}=\{0\}$, 故 ρ 是忠实表示.

Eg. 5　无限维表示

1.1.4 置换表示

Meth. 1 群的任意 n 次线性表示的构造

1. 设群 G 在一个 n 元集合 $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ 上有一个作用.

2. 构造一个域 F 上 n 维线性空间作为表示空间.

$$V := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid a_i \in F \right\}$$

- 元素相等

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i :\Leftrightarrow a_i = b_i \quad (i = 1, \cdots, n)$$

- 加法

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) x_i$$

- 纯量乘法

$$k \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (k a_i) x_i \quad (\forall k \in F)$$

- 基向量

$$x_i = 0x_1 + \cdots + 0x_{i-1} + 1x_i + 0x_{i+1} + \cdots + 0x_n$$

从而 V 成为域 F 上的一个线性空间. $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 为 V 的一个基, $\dim_F V = n$.

3. 构造群同态 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$.

$$\rho(g) : V \to V \qquad \rho(g) \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) := \sum_{i=1}^{n} a_i (g \circ x_i)$$

易证 $\rho(g)$ 保持 V 的加法与纯量乘法, 从而 $\rho(g)$ 是 V 上的一个线性变换.

$$\left[\rho(g) \rho(g^{-1}) \right] x_i = g \circ (g^{-1} \circ x_i) = (g g^{-1}) \circ x_i = e \circ x_i = \mathrm{id}_V(x_i)$$

从而 $\rho(g)$ 可逆, $\Rightarrow \rho(g) \in \mathrm{GL}(V)$. 易证 $\forall g_1, g_2 \in G$, $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$, 因此 ρ 即为 G 的一个 n 次线性表示.

Def. 7 置换表示

由此构造出的 n 次 F-表示 ρ, 称为 G 在 F 上的一个 n 次置换表示 (permutation rep).

Prop. 4 置换矩阵表示

对于基 $x_1, \cdots, x_n$, 设置换表示 ρ 提供的矩阵表示为 R. 则 $\forall g \in G$, $R(g)$ 为置换矩阵, 即每行每列只有一个 1, 其余均为 0.

Eg. 6　对称群的置换矩阵表示

n 元对称群 S_n 在数域 K 上的 n 次置换矩阵表示为 $\forall \sigma \in S_n$

$$R(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} E_{\sigma(i),i}$$

其中 $E_{\sigma(i),i}$ 为只有 $(\sigma(i), i)$ 元为 1, 其余元均为 0 的矩阵.

Pf　构造 S_n 对 $X = \{1, \cdots, n\}$ 的作用

$$\rho : S_n \times X \to X \quad (\sigma, i) \mapsto \sigma(i)$$

ρ 的表示空间的一个基为 $1, \cdots, n$. $\rho(\sigma)1 = \sigma(1)$, 因此置换矩阵 $R(\sigma)$ 的第 i 个列向量为

$$(0, \cdots, \underset{\sigma(i)-1}{0}, \underset{\sigma(i)}{1}, \underset{\sigma(i)+1}{0}, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$$

1.1.5　正则表示

Def. 8　正则表示

利用群 G 在集合 G 上的左平移作用构造出的置换表示 ρ, 称为 G 的正则表示 (regular rep).

Prop. 5　正则表示的表示空间与次数

正则表示 ρ 的表示空间为

$$F[G] := \left\{ \sum_{g \in G} a_g g \mid a_g \in F \right\}$$

G 中所有元素构成 $F[G]$ 的一个基, 从而正则表示的次数为

$$\deg \rho = \dim_F F[G] = |G|$$

Prop. 6　正则表示的忠实性

正则表示 ρ 必为忠实表示.

Pf　$g \in \operatorname{Ker} \rho \Leftrightarrow \rho(g) = \mathrm{id}_{F[G]}, \Rightarrow \rho(g)e = ge = e \Rightarrow g = e, \Rightarrow \operatorname{Ker} \rho = \{e\}$.

Eg. 7　有限循环群的正则表示

设 $G=\langle g\rangle$, 正则 F-表示 ρ 的表示空间 $F[G]$ 的基为 $e,g,g^2,\cdots,g^{n-1}$.

$$\begin{cases}\rho(g^i)e=g^i\\ \rho(g^i)g=g^{i+1}\\ \quad\vdots\\ \rho(g^i)g^{n-i-1}=g^{n-1}\end{cases}\qquad\begin{cases}\rho(g^i)g^{n-i}=g^n=e\\ \rho(g^i)g^{n-i+1}=g\\ \quad\vdots\\ \rho(g^i)g^{n-1}=g^{i-1}\end{cases}$$

从而 ρ 提供的矩阵表示为

$$R(g^i)=\begin{pmatrix}0 & I_i\\ I_{n-i} & 0\end{pmatrix}$$

Eg. 8　二面体群的 2 次实表示

$$D_n=\left\langle r,t\mid r^n=t^2=\mathrm{id},trt=r^{-1}\right\rangle$$

1.2　线性表示的结构

1.2.1　子表示

Def. 9　表示的不变子空间

设 (ρ,V) 为群 G 的一个 F-表示, U 为 V 的一个子空间. 若 $\forall g\in G$, U 为线性变换 $\rho(g)|_U$ 的不变子空间, 则称 U 为 ρ 的 G-不变子空间 (G-invariant subspace).

Rmk　$\{0\}$ 与 V 称为平凡的 G-不变子空间.

Rmk　G-不变子空间的交与和, 仍为 G-不变子空间.

Def. 10　子表示

若 $U\neq\{0\}$ 为 ρ 的 G-不变子空间, 则

$$\rho_U:G\to\mathrm{GL}(U)\quad g\mapsto\rho(g)|_U$$

为 G 的一个 F-表示, 称 ρ_U 为 ρ 的一个子表示 (sub representation).

Prop. 7　子表示的矩阵

在 U 中取一个基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$, 扩充为 V 的一个基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$. 则 ρ 对于此

基提供的矩阵表示 R 满足 $\forall g \in G$,

$$R(g) = \begin{pmatrix} R_U(g) & C(g) \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}$$

1.2.2 表示的直和

Def. 11 G-不变补空间

设 (ρ, V) 为群 G 的一个 F-表示, U 为 V 的一个 G-不变子空间. 若存在 V 的 G-不变子空间 W, 使得

$$V = U \oplus W$$

则称 W 为 U 在 V 中的 G-不变补空间 (G-invariant complement).

Def. 12 子表示的内直和

设 (ρ, V) 为群 G 的一个 F-表示, U 与 W 均为 V 的 G-不变子空间, 且 $V = U \oplus W$, 则 $\forall v \in V$ 可唯一地表为 $v = u + w$, 其中 $u \in U$, $w \in W$. 且有 $\forall g \in G$

$$\rho(g)v = \rho(g)u + \rho(g)w = \rho_U(g)u + \rho_W(g)w$$

于是称 ρ 为其子表示 ρ_U 与 ρ_W 的内直和 (internal direct sum), 记作 $\rho = \rho_U \oplus \rho_W$.

Rmk 还可由两个线性空间 V_1, V_2 作外直和的方式构造一个大的线性空间 V, 外直和与内直和等价, 统一称为直和, 记作 $V = V_1 \oplus V_2$. 若有线性表示 (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2), 则可类似地定义线性表示的外直和 (ρ, V), 线性表示的外直和与内直和亦等价, 记作 $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$.

$$\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}(V_1 \oplus V_2) \tag{1.1}$$

Prop. 8 内直和的矩阵表示

设 $\rho_U(g) \in \mathrm{GL}(U)$ 在 U 的基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 下的矩阵为 $R_U(g)$, $\rho_W(g) \in \mathrm{GL}(W)$ 在 W 的基 $\{\beta_1, \cdots, \beta_{n-m}\}$ 下的矩阵为 $R_W(g)$. 则 $\rho = \rho_U \oplus \rho_W$ 在 V 的基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{n-m}\}$ 下的矩阵表示为

$$g \mapsto R(g) = (R_U \oplus R_W)(g) \begin{pmatrix} R_U(g) & 0 \\ 0 & R_W(g) \end{pmatrix}$$

Cor. 1 多个表示的直和

若 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$, 有线性表示 (ρ, V), (ρ_i, V_i), $i = 1, \cdots, r$. 则 $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r$, 在适

当基下提供的矩阵表示为

$$g \mapsto R(g) = \mathrm{diag}\{R_1(g), \cdots, R_r(g)\}$$

1.2.3 表示的可约性

Def. 13 不可约表示, 可约表示

设 (ρ, V) 为群 G 的一个 F-表示, 若 V 只有平凡的 G-不变子空间 $\{0\}$ 与 V, 则称 (ρ, V) 为不可约表示 (irreducible rep), 否则称为可约表示 (reducible rep).

Eg. 9

1 次表示必为不可约表示.

Prop. 9 可约表示的矩阵表示

(ρ, V) 为可约表示 $\Longleftrightarrow$ V 有非平凡的子空间 U, ρ 有子表示 ρ_U $\Longleftrightarrow$ ρ 在适当基下提供的矩阵表示 R 具有分块上三角矩阵的形式, 即 $\forall g \in G$

$$R(g) = \begin{pmatrix} R_U(g) & C(g) \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}$$

Def. 14 完全可约表示

若对于 V 的每一个 G-不变子空间, 在 V 中均有 G-不变补空间, 则称 (ρ, V) 为完全可约表示 (completely reducible rep).

Prop. 10

不可约表示 (ρ, V) 为完全可约表示.

Pf V 的 G-不变子空间只有 $\{0\}$ 与 V, 又 $V = \{0\} \oplus V$, $\Longrightarrow (\rho, V)$ 完全可约.

Prop. 11 完全可约表示的子表示封闭性

群 G 的完全可约表示 (ρ, V) 的任一子表示也为完全可约表示.

Pf 设 U 为 V 的非平凡 G-不变子空间, ρ_U 为 ρ 的子表示. 任取 U 的 G-不变子空间 U_1, 其也为 V 的 G-不变子空间. 设 U_1 在 V 中的 G-不变补空间为 W_1, 则 $W_1 \cap U$ 为 U_1 在 U 中的 G-不变补空间. 因此 (ρ_U, U) 完全可约.

1.2.4 完全可约表示

Thm. 1 有限维完全可约表示的结构

群 G 的有限维完全可约表示, 必定可以分解为有限多个不可约子表示的直和.

Pf 设 (ρ, V) 为 G 的完全可约 F-表示. 若 (ρ, V) 不可约, 得证.

若 (ρ, V) 可约, 则存在非平凡的 G-不变子空间 V_1, 且存在 V 中的 G-不变补空间 V_2, 使得 $V = V_1 \oplus V_2$. 记 $\rho_{V_i} = \rho_i$, 有 $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, 若 ρ_1, ρ_2 均不可约, 得证.

若 ρ_i 可约, 必定完全可约, 则 V_i 存在非平凡 G-不变子空间 V_{i_1}, 且 V_{i_1} 在 V_i 中有 G-不变补空间 V_{i_2}, 使得 $V_i = V_{i_1} \oplus V_{i_2}$, $\rho_i = \rho_{i_1} \oplus \rho_{i_2}$. 依此类推, 在有限次后必然终止, 得到所有的子表示均不可约.

Thm. 2 Maschke 定理

若 $\operatorname{char} F \nmid |G|$, 则有限群 G 的任一 F-表示 (ρ, V), 均为完全可约表示.

Rmk $\operatorname{char} F \nmid |G| \iff |G| \cdot 1_F \neq 0_F$.

Pf 若 (ρ, V) 不可约, 则完全可约, 得证.

设 (ρ, V) 可约, 取 V 的任一非平凡 G-不变子空间. 必定存在补空间 U', 使得 $V = U \oplus U'$.

设 $\mathcal{P}$ 为 V 上沿 U 到 U' 的投影, 有 $\operatorname{Ker} \mathcal{P} = U$, $\operatorname{Im} \mathcal{P} = U'$. 对 $\mathcal{P}$ 作群平均

$$\mathcal{B}' = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho(h) \mathcal{P} \rho(h)^{-1}$$

条件 $\operatorname{char} F \nmid |G|$ 确保 $|G|$ 在 F 中可逆, 从而 $1/|G|$ 有意义. $\forall g \in G$, 有 $\mathcal{B}' \rho(g) = \rho(g) \mathcal{B}'$, 从而 $\operatorname{Im} \mathcal{B}'$ 为 G-不变子空间.

又由 $U \subseteq \operatorname{Ker} \mathcal{B}'$; $\forall v \in V$, $v - \mathcal{B}' v \in U$. 若 $v \in \operatorname{Ker} \mathcal{B}'$, 则 $\mathcal{B}' v = 0$, 从而 $v = v - \mathcal{B}' v \in U$, 因此 $\operatorname{Ker} \mathcal{B}' = U$. 于是 $v - \mathcal{B}' v \in \operatorname{Ker} \mathcal{B}'$, 从而 $\mathcal{B}'(v - \mathcal{B}' v) = 0$, 即 $\mathcal{B}'^2 = \mathcal{B}'$. 因此

$$V = \operatorname{Ker} \mathcal{B}' \oplus \operatorname{Im} \mathcal{B}' = U \oplus \operatorname{Im} \mathcal{B}'$$

故 U 在 V 中有 G-不变补空间 $\operatorname{Im} \mathcal{B}'$, 从而 ρ 完全可约, 得证.

Cor. 2

若 $\operatorname{char} F \nmid |G|$, 则有限群 G 的任一有限维 F-表示, 必定可以分解为有限多个不可约子表示的直和.

Eg. 10

设群 G 在集合 $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ 上有一个作用, 由此构造出的 n 次置换表示 (ρ, V) 的表

示空间 $V=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i \mid a_i\in F\right\}$ 有 G-不变子空间

$$V_1=\left\langle\sum_{i=1}^{n}x_i\right\rangle=\left\{k\sum_{i=1}^{n}x_i \mid k\in F\right\}$$

$$V_2=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i \mid a_i\in F,\sum_{i=1}^{n}a_i=0\right\}$$

从而 (ρ,V) 有子表示 (ρ_1,V_1), (ρ_2,V_2), 其中 ρ_1 为平凡表示. 若 $\operatorname{char}F\nmid n$, 则有

$$\rho=\rho_1\oplus\rho_2$$

Pf $\rho(g)\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}g\circ x_i\in V_1$, $\Longrightarrow V_1$ 为 $\rho(g)$ 的 G-不变子空间, $\rho(g)|_{V_1}=\mathrm{id}_{V_1}$.

若 $\operatorname{char}F\nmid n$, 设 $\overline{a}=\dfrac{1}{n1_F}\sum_{i=1}^{n}a_i$, 则 $\forall\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\in V$,

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i}_{\in V}=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(a_i-\overline{a})x_i}_{\in V_2}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\overline{a}x_i}_{\in V_1}$$

因此 $V=V_1+V_2$. 设 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\in V_1\cap V_2$, 有 $a_1=\cdots=a_n$, $\sum_{i=1}^{n}a_i=\underbrace{(n1_F)}_{\neq 0}a_1=0$, $a_1=0$, $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=0$, $\Longrightarrow V_1\cap V_2=\{0\}$, $V=V_1\oplus V_2$, $\rho=\rho_1\oplus\rho_2$.

Eg. 11 S_n 的置换表示的分解

若 $\operatorname{char}F\nmid n$, 则 S_n 在 F 上的 n 次置换表示 ρ, 可以分解为主表示与一个 $n-1$ 次不可约子表示的直和.

1.3 Abel 群的不可约表示

Thm. 3

Abel 群的有限维不可约复表示, 均为 1 次表示.

Rmk 对无限 Abel 群也成立.

Pf 设 (ρ,V) 为 Abel 群 G 的任一有限维不可约复表示, 表示空间 V 为 $\mathbb{C}$ 上有限维线性空间. $\forall g\in G$, $\rho(g)$ 有特征值 λ_g. $\rho(g)$ 的属于 λ_g 的特征子空间 $V_{\lambda_g}=\{v\in V \mid \rho(g)v=\lambda_g v\}$.

$\forall h\in G$, 由于 G abelian, $gh=hg$, 从而 $\rho(g)\rho(h)=\rho(h)\rho(g)$.

$v \in V_{\lambda_g}$, $\rho(g)\big(\rho(h)v\big) = \rho(h)\rho(g)v = \lambda_g\rho(h)v$, $\Rightarrow \rho(h)v \in V_{\lambda_g}$, $\Rightarrow V_{\lambda_g}$ 为 G-不变子空间. 由于 ρ 不可约, $V_{\lambda_g} = V \neq \{0\}$. 从而 $\forall v \in V$, $\rho(g)v = \lambda_g v$, $\Rightarrow \rho(g) = \lambda_g \mathrm{id}_V$.

假设 $\dim_{\mathbb{C}} V > 1$, $\rho(g)$ 的矩阵表示为 $\forall g \in G$, $R(g) = \mathrm{diag}\{\lambda_g, \cdots, \lambda_g\}$, $\Rightarrow \rho$ 可约, 矛盾. 因此 $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$, (ρ, V) 为 1 次表示.

Cor. 3

在代数闭域 F 上, Abel 群的有限维不可约表示, 均为 1 次表示.

Pf $\forall f(x) \in F[x]$, $\deg f(x) > 0$, $f(x)$ 均可分解为一次因式之积, $\Rightarrow \rho(g)$ 必定有特征值.

Eg. 12 n 阶循环群的 1 次复表示

n 阶循环群 $G = \langle g \rangle$ 有 n 个 1 次复表示 $\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_{n-1}$, 其中 ρ_0 为主表示.

$$\rho_k : G \to \mathbb{C}^\times \quad g^l \mapsto \zeta_n^{kl} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\right)^{kl}$$

Pf $\rho(g^n) = \rho(g)^n = \rho(e) = 1$, 从而 $\rho(g)$ 为 $\mathbb{C}$ 上 n 次单位根. 令 $\zeta_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$, $\rho(g) = \zeta_n^k$, 其中 $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$.

Lem. 1 有限 Abel 群的结构定理

有限 Abel 群 G 可以分解为有限多个循环子群的直积

$$G = \langle g_1 \rangle \times \langle g_2 \rangle \times \cdots \times \langle g_s \rangle$$

其中 $|\langle g_j \rangle| = p_j^{n_j} =: q_j$, 且 p_j 为素数, $j = 1, \cdots, s$. $\forall g \in G$ 可以唯一的表为

$$g = g_1^{t_1} g_2^{t_2} \cdots g_s^{t_s} \quad (0 \leq t_j < q_j)$$

Thm. 4 有限 Abel 群的 1 次复表示的形式

任给 $h = g_1^{r_1} g_2^{r_2} \cdots g_s^{r_s} \in G$, 可得 G 的一个 1 次复表示为

$$\rho_h : G \to \mathbb{C}^\times \quad g = g_1^{t_1} g_2^{t_2} \cdots g_s^{t_s} \mapsto \zeta_{q_1}^{r_1 t_1} \zeta_{q_2}^{r_2 t_2} \cdots \zeta_{q_s}^{r_s t_s}$$

其中 $0 \leq t_j, r_j < q_j$, $j = 1, \cdots, s$.

Pf 任取 G 的 1 次复表示 ρ, 则 $\rho(g) = \rho(g_1)^{t_1} \rho(g_2)^{t_2} \cdots \rho(g_s)^{t_s}$. $|\langle g_j \rangle| = q_j$, $\Rightarrow g_j^{q_j} = e$, $\Rightarrow \rho(g_j)^{q_j} = 1$, $\Rightarrow \rho(g_j) = \zeta_{q_j}^{r_j}$, $r_j \in \{0, 1, \cdots, q_j - 1\}$. 因此 $\rho(g) = \zeta_{q_1}^{r_1 t_1} \zeta_{q_2}^{r_2 t_2} \cdots \zeta_{q_s}^{r_s t_s}$, 由 s 元自然数组 $(r_1, \cdots, r_s)$ 决定, 记作 $\rho_h(g)$, 其中 $h = g_1^{r_1} g_2^{r_2} \cdots g_s^{r_s}$ 与数组一一对应.

Thm. 5

记 G 的所有 1 次复表示构成的集合为 $\widehat{G}$, 且

$$G \cong \widehat{G}$$

因此 G 共有 $|G|$ 个 1 次复表示.

Pf $\forall h \in G$, $\rho_h \in \widehat{G}$, 因此 $\phi : G \to \widehat{G}, h \mapsto \rho_h$ 为满射. 由 $\rho_h = \rho_{h'}$ 得出 $h = h'$ 可证 ϕ 为单射, 从而 ϕ 为双射.

易证 $\widehat{G}$ 对函数的复合构成一个群, 且 ϕ 保持运算, 因此 ϕ 为群同态.

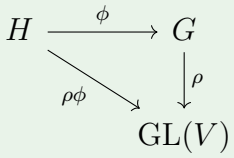
1.4 非 Abel 群的不可约表示的常用构造方法

1.4.1 线性表示与群同态的合成

Prop. 12 线性表示与群同态的合成

设群同态 $\phi : H \to G$, 与 G 的一个 F-表示 (ρ, V), 则 $\rho\phi$ 为 H 的一个 F-表示. 且有:

- $\rho\phi$ 不可约 $\Longrightarrow$ ρ 不可约;
- 若 $\phi : H \twoheadrightarrow G$ 为满同态, 则 ρ 不可约 $\Longleftrightarrow$ $\rho\phi$ 不可约.



Pf 设 (ρ, V) 为 G 的可约表示, 则 V 有非平凡的 G-不变子空间 U. $\forall u \in U$, $h \in H$

$$(\rho\phi)(h)u = \rho(\phi h)u \in U$$

从而 U 为 H-不变子空间, $\rho\phi$ 可约.

设 $(\rho\phi, V)$ 为 H 的可约表示, 则 V 有非平凡的 H-不变子空间 W. $\forall g \in H$, 若 ϕ 为满射, 则 $\exists h \in H$, 使得 $\phi(h) = g$. 于是 $\forall w \in W$

$$\rho(g)w = \rho(\phi h)w = [(\rho\phi)h]u \in W$$

取逆否命题即得证.

1.4.2 表示的提升与分解

Def. 15 表示的提升

设 $N \triangleleft G$, 自然同态 $\pi : G \twoheadrightarrow G/N$. $(\overline{\rho}, V)$ 为 G/N 的一个 F-表示, 则称 G 的 F-表示 $\rho := \overline{\rho}\pi$ 为 $\overline{\rho}$ 的提升 (lifting). $\forall g \in G$, $\rho(g) = \overline{\rho}(gN)$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & G/N \\ & \searrow^{\rho=\overline{\rho}\pi} & \downarrow \overline{\rho} \\ & & \mathrm{GL}(V) \end{array}$$

Prop. 13

若 ρ 为 $\overline{\rho}$ 的提升, 则有

$$N \subseteq \operatorname{Ker}\rho$$

Pf $\forall n \in N$, $\rho(n) = \overline{\rho}(nN) = \overline{\rho}(N) = \mathrm{id}_V$, $\Rightarrow n \in \operatorname{Ker}\rho$, $\Rightarrow N \subseteq \operatorname{Ker}\rho$.

Def. 16 表示的分解

设 (ρ, V) 为群 G 的一个 F-表示, $N \triangleleft G$, 且 $N \subseteq \operatorname{Ker}\rho$.

$$\overline{\rho} : G/N \to \mathrm{GL}(V) \quad gN \mapsto \rho(g)$$

为 G/N 的一个 F-表示, 称 $\overline{\rho}$ 为 ρ 对正规子群 N 的分解 (factoring).

Pf 设 $g_1N = g_2N$, 则有 $g_2 = g_1n$, $n \in N$. $\rho(g_2) = \rho(g_1)\underbrace{\rho(n)}_{=\mathrm{id}} = \rho(g_1)$, 因此 $\overline{\rho}$ 是一个映射. 易证 $\overline{\rho}$ 保持运算, 因此为 G/N 的 F-表示.

Thm. 6 提升对应定理

设 $\mathrm{Rep}_F(G/N) = \{\overline{\rho} : G/N \to \mathrm{GL}(V)\}$, $\mathrm{Rep}_F(G; N) = \{\rho : G \to \mathrm{GL}(V) \mid N \subseteq \operatorname{Ker}\rho\}$, 其间有一个双射

$$\pi^* : \mathrm{Rep}(G/N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}(G; N) \quad \overline{\rho} \mapsto \rho = \overline{\rho}\pi$$

称 π^* 为提升映射, 或称膨胀映射 (inflation).

Rmk 唯有满足 $\operatorname{Ker}\rho \supseteq N$ 的表示 ρ 才由唯一的 $\overline{\rho}$ 提升而来, 或者对 N 有分解. 因此由提升对应只能得到满足 $\operatorname{Ker}\rho \supseteq N$ 的表示, 无法得到全部的表示.

Pf ρ 由 $\overline{\rho}$ 所唯一决定, 因此每个 $\overline{\rho}$ 有唯一的提升, 从而 π^* 是映射.

$\forall n \in N$, $\rho(n) = \overline{\rho}(nN) = \mathrm{id}_V$, 因此 $N \subseteq \operatorname{Ker}\rho$, 从而 π^* 良定义.

$\forall g \in G$, $\rho_1 = \rho_2$, $\Rightarrow \rho_1(g) = \rho_2(g) = \overline{\rho}_1(gN) = \overline{\rho}_2(gN)$, $\Rightarrow \overline{\rho}_1 = \overline{\rho}_2$, 因此 π^* 是单射.

$\forall \rho \in \mathrm{Rep}(G)$, ρ 均可对于 N 分解为 $\overline{\rho}$, 因此 π^* 是满射, 从而是双射.

Cor. 4

ρ 不可约 $\Longleftrightarrow$ $\bar{\rho}$ 不可约.

Pf $\pi : G \twoheadrightarrow G/N$.

Lem. 2

群 G 的导群为 $G' = \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\} \triangleleft G$, 且 G/G' 为 Abel 群.
设 $N \triangleleft G$, 则 $N \supseteq G' \Longleftrightarrow G/N$ 为 Abel 群.

Thm. 7

设 G 与 G/G' 的所有 1 次 F-表示为 $\widehat{G}_F$ 与 $\widehat{G/G'}_F$, 则

$$\widehat{G/G'}_F \cong \widehat{G}_F$$

Pf $\forall g_1, g_2 \in G$, $\rho(g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}) = \rho(g_1)\rho(g_2)\rho(g_1)^{-1}\rho(g_2)^{-1} = 1$, $\Rightarrow G' \subseteq \operatorname{Ker}\rho$.

Meth. 2　有限非 Abel 群的所有 1 次复表示的求解

1. 求出非 Abel 群 G 的导群 G', 作商得到 Abel 群 G/G';
2. 求出商群 G/G' 的所有 1 次复表示;
3. 提升得到 G 的所有 1 次复表示.

1.4.3　挠表示

Def. 17　通过群的自同构的挠表示

设 (ρ, V) 为群 G 的一个 F-表示, $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ 为 G 的自同构, 则 $\rho^\phi := \rho\phi$ 也是 G 的一个 F-表示, 称 ρ^ϕ 为 ρ 通过自同构 ϕ 的挠表示 (twisted rep).

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi \in \mathrm{Aut}(G)} & G \\ & {\scriptstyle \rho^\phi} \searrow & \downarrow {\scriptstyle \rho} \\ & & \mathrm{GL}(V) \end{array}$$

Prop. 14

ρ^ϕ 不可约 $\Longleftrightarrow$ ρ 不可约.

Pf $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ 为满射.

Prop. 15　通过群的内自同构的挠表示

设 G 的 F-表示 (ρ, V) 与内自同构 $\mathrm{ad}_g : x \mapsto gxg^{-1}, \forall x \in G$. 则 ρ^{ad_g} 为 G 的一个 F-表示, 且有

$$\rho^{\mathrm{ad}_g} \approx \rho$$

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\mathrm{ad}_g \in \mathrm{Inn}(N)} & N \\ & {\scriptstyle \rho^g} \searrow & \downarrow {\scriptstyle \rho} \\ & & \mathrm{GL}(V) \end{array}$$

Pf　$\forall x \in G$, $\rho^{\mathrm{ad}_g}(x) = \rho\,\mathrm{ad}_g(x) = \rho(gxg^{-1}) = \rho(g)\rho(x)\rho(g)^{-1}$, $\Rightarrow \rho^{\mathrm{ad}_g}(x)\rho(g) = \rho(g)\rho(x)$.

Def. 18　共轭表示

设 $N \triangleleft G$, (ρ, V) 为 N 的一个 F-表示. 给定 $g \in G$, $\forall x \in N$, $\mathrm{ad}_g : x \mapsto gxg^{-1}$ 为 N 的一个自同构, $\rho^g := \rho^{\mathrm{ad}_g} = \rho\,\mathrm{ad}_g$ 为 N 的一个 F-表示, 称 ρ^g 为 ρ 的共轭表示.

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\mathrm{ad}_g \in \mathrm{Aut}(N)} & N \\ & {\scriptstyle \rho^g} \searrow & \downarrow {\scriptstyle \rho} \\ & & \mathrm{GL}(V) \end{array}$$

Def. 19　惯性群

$$I(\rho) = \{g \in G \mid \rho^g \approx \rho\} < G$$

称为 ρ 在 G 中的惯性群.

Prop. 16

$N \subseteq I(\rho)$.

Pf　$\forall n \in N$, $\mathrm{ad}_n \in \mathrm{Inn}(N)$, $\Longrightarrow \rho^n \approx \rho$.

1.4.4　逆步表示

Def. 20　逆步表示

设 (ρ, V) 为 G 的一个 F-表示, V^* 为 V 的对偶空间, 定义 $\forall g \in G$

$$\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*) \quad g \mapsto \rho^*(g)$$

$$\rho^*(g) : V^* \to V^* \quad f \mapsto \rho^*(g)f = f\rho(g^{-1})$$

则 (ρ^*, V^*) 为 G 的一个 F-表示, 称为 (ρ, V) 的逆步表示 (contragredient rep).

Rmk 由 $\rho^*(g)f = f\rho(g)$ 定义的 ρ 不是一个 F-表示.

Pf $[\rho^*(g^{-1})\rho^*(g)]f = \rho^*(g^{-1})[f\rho(g^{-1})] = f\rho(g^{-1})\rho(g) = f$, $\Longrightarrow \rho^*(g^{-1})\rho^*(g) = \mathrm{id}_{V^*}$, 从而 $\rho^*(g)$ 有逆 $\rho^*(g^{-1})$, $\rho^*(g) \in \mathrm{GL}(V^*)$.

$\forall g_1, g_2 \in G$, $\rho^*(g_1g_2)f = f\rho(g_2^{-1}g_1^{-1}) = f\rho(g_2^{-1})\rho(g_1^{-1}) = [\rho^*(g_2)f]\rho(g_1^{-1}) = \rho^*(g_1)\rho^*(g_2)f$, $\Longrightarrow \rho^*(g_1g_2) = \rho^*(g_1)\rho^*(g_2)$. 从而 $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ 为群同态, (ρ^*, V^*) 为 G 的 F-表示.

Prop. 17 逆步表示的矩阵

逆步表示在对偶基 $f_1, \cdots, f_n$ 下的矩阵为

$$R^*(g) = R(g^{-1})^{\mathrm{T}}$$

Prop. 18 逆步表示的直和

若 (ρ, V), (σ, U) 为 G 的两个 F-表示, 则

$$(\rho \oplus \sigma)^* \approx \rho^* \oplus \sigma^*$$

2 群代数

2.1 群代数的线性表示

Def. 1 代数

设非空集合 A 与域 F. 若 A 上定义了加法与乘法运算:

$$A \times A \to A \quad (a,b) \mapsto a+b$$

$$A \times A \to A \quad (a,b) \mapsto ab$$

F 与 A 定义了纯量乘法运算:

$$F \times A \to A \quad (k,a) \mapsto ka$$

且 A 对于加法和乘法成为一个环, 对加法和纯量乘法成为域 F 上的一个线性空间, 即满足 $\forall a,b,c \in A,\ k,l \in F$

1. 加法结合律: $(a+b)+c = a+(b+c)$;
2. 加法交换律: $a+b = b+a$;
3. 有零元: $\exists 0_A \in A$, s.t. $a+0_A = 0_A+a = a$;
4. 有负元: $\exists (-a) \in A$, s.t. $a+(-a) = (-a)+a = 0_A$;
5. 有纯量乘法幺元: $1_F a = a$;
6. 纯量乘法结合律: $(kl)a = k(la)$;
7. 纯量乘法对标量加法的结合律: $(k+l)a = ka+la$;
8. 纯量乘法对加法的结合律: $k(a+b) = ka+kb$;
9. 乘法结合律: $(ab)c = a(bc)$;
10. 乘法对加法的分配律: $(a+b)c = ac+bc$, $a(b+c) = ab+ac$;
11. 有乘法幺元: $\exists 1_A \in A$, s.t. $1_A a = a 1_A = a$;
12. 乘法与纯量乘法满足相容性: $\forall a,b \in A,\ k \in F$

$$k(ab) = (ka)b = a(kb)$$

则称 A 为域 F 上的一个代数 (algebra), 简称 F-代数.

- 称 A 作为域 F 上线性空间的维数, 为 A 的代数维数.
- 称 A 作为环的单位元, 为代数 A 的单位元 1_A;
- 称上述定义的代数 A 为一个含幺结合 F-代数.
  - 若不要求乘法结合律 (9), 则称 A 为一个非结合 F-代数.
  - 若不要求存在乘法幺元 (11), 则称 A 为一个非幺 F-代数.
  - 若要求满足乘法交换律: $a, b \in A$, $ab = ba$, 则称 A 为交换 F-代数.

Eg. 1　一些代数的简单例子

域 F 上的一元多项式代数 $F[x]$, 域 F 上的 n 阶全矩阵代数 $M_n(F)$, 域 F 上的线性空间 V 上的线性变换代数 $\mathrm{End}_F(V) = \mathrm{Hom}_F(V, V)$.

Def. 2　群代数

在有限群 G 的正则表示 ρ 的表示空间 $F[G]$ 上定义乘法

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{h\in G} b_h h\right) := \sum_{g,h\in G} (a_g b_h)(gh) = \sum_{t\in G}\left(\sum_{g\in G} a_g b_{g^{-1}t}\right) t \in F[G]$$

易证 $F[G]$ 对于加法和乘法成为一个幺环, $1_{F[G]} = e_G$, 且有 $\forall \alpha, \beta \in F[G]$, $k \in F$

$$k(\alpha\beta) = (k\alpha)\beta = \alpha(k\beta)$$

从而 $F[G]$ 成为域 F 上的一个代数, 称为 G 在 F 上的群代数 (group algebra).

Def. 3　代数同态

设 A 与 A' 均为域 F 上的代数, 若映射 $f : A \to A'$ 满足 $\forall a_1, a_2, a \in A$, $k \in F$

1. 保持加法
$$f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$$
2. 保持纯量乘法
$$f(ka) = kf(a)$$
3. 保持乘法
$$f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2)$$
4. 保持幺元
$$f(1_A) = 1_{A'}$$

则称 f 为 A 到 A' 的一个代数同态 (algebra homomorphism).

- 若 $f: A \xrightarrow{\sim} A'$ 为双射, 则称 f 为一个代数同构 (algebra isomorphism), 称 A 与 A' 同构.

Def. 4　代数的线性表示

- 设 A 为域 F 上的代数, V 为 F 上的线性空间. 代数同态 $\tau: A \to \mathrm{End}_F(V)$ 称为 A 在域 F 上的一个线性表示.
- 若 V 有限维, 则称 V 的维数为表示 τ 的次数, $\deg \tau = \dim_F V$.
- 设 A 有两个线性表示 (τ, V) 与 (τ', V'). 若有线性同构 $\phi: V \to V'$, 使得 $\forall a \in A$, 下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & V' \\ {\scriptstyle \tau(a)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau'(a)} \\ V & \xrightarrow{\phi} & V' \end{array}$$

亦即 $\forall a \in A$,

$$\tau'(a)\phi = \phi\tau(a)$$

则称 τ 与 τ' 等价.

Def. 5　群代数的线性表示

设 (ρ, V) 为群 G 的一个 F-表示, 将 ρ 扩充到 $F[G]$ 上, 有

$$\tilde{\rho}: F[G] \to \mathrm{End}_F(V) \quad \sum_{g\in G} a_g g \mapsto \tilde{\rho}\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} a_g \rho(g)$$

易证 $\tilde{\rho}$ 保持加法, 乘法, 纯量乘法与单位元, 为 $F[G]$ 到 $\mathrm{End}_F(V)$ 上的一个代数同态, 称 $\tilde{\rho}$ 为群代数 $F[G]$ 在域 F 上的一个线性表示.

Rmk　若 $(\tilde{\rho}, V)$ 为 $F[G]$ 的一个线性表示, 则将 $\tilde{\rho}$ 限制到 G 上: $\rho(g) = \tilde{\rho}(g)$, $\forall g \in G$, 即可得到 G 的 F-表示 ρ.

Def. 6　子代数

设 A_1 为 F-代数 A 的非空子集. 若 A_1 为 A 作为环的含幺 1_A 的子环, 为 A 作为 F-线性空间的子空间, 则称 A_1 为 A 的子代数 (subalgebra).

Def. 7　代数的中心

$$\mathrm{Z}(A) := \{c \in A \mid ca = ac, \forall a \in A\}$$

为 A 的一个子代数, 称 $\mathrm{Z}(A)$ 为代数 A 中心 (center, Zentrum)

Pf　非空: $0a = a0 = 0$, $\Longrightarrow 0 \in \mathrm{Z}(A)$, 从而 $\mathrm{Z}(A) \neq \varnothing$.

对加法封闭: $\forall c_1, c_2 \in \mathrm{Z}(A)$, $\forall a \in A$, $(c_1 + c_2)a = c_1a + c_2a = ac_1 + ac_2 = a(c_1 + c_2)$, $\Longrightarrow c_1 + c_2 \in \mathrm{Z}(A)$.

对纯量乘法封闭: $\forall k \in F$, $(kc)a = k(ca) = k(ac) = a(kc)$, $\Longrightarrow kc \in \mathrm{Z}(A)$.

对乘法封闭: $(c_1c_2)a = c_1(c_2a) = c_1(ac_2) = (c_1a)c_2 = (ac_1)c_2 = a(c_1c_2)$, $\Longrightarrow c_1c_2 \in \mathrm{Z}(A)$.

2.2　群的线性表示与群代数上的左模

2.2.1　群代数上的左模

Def. 8　环上的模

设 M 为一个 Abel 加法群, R 为一个幺环. 若有映射 $R \times M \to M$, $(r, m) \mapsto rm$, 且满足 $\forall m, m_1, m_2 \in M$, $r, r_1, r_2 \in R$,

1. 对模加法的分配律: $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$;
2. 对环加法的分配律: $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$;
3. 结合律: $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$;
4. 有单位元: $1_Rm = m$,

则称 M 为环 R 上的左模, 简称左 R-模 (left R-module).

Def. 9　代数上的模

设 A 为域 F 上的一个代数. 若 M 为 A 作为环上的左模, 则称 M 为代数 A 上的左模, 简称左 A-模.

Prop. 1　代数上模的性质

设 M 为一个左 A-模. 定义域 F 与左 A-模 M 的纯量乘法为 $\forall k \in F$, $m \in M$,

$$km := (k1_A)m$$

易证, M 对于加法和纯量乘法, 成为域 F 上的一个线性空间. 且纯量乘法与 A 在 M 上的

作用满足相容性: $\forall k \in F, a \in A, m \in M$,

$$k(am) = (ka)m = a(km)$$

Pf $1_F m = (1_F 1_A)m = 1_A m = m$.
$(k_1 k_2)m = [(k_1 k_2)1_A]m = [(k_1 1_A)(k_2 1_A)]m = (k_1 1_A)[(k_2 1_A)m] = k_1(k_2 m)$.
$(k_1 + k_2)m = [(k_1 + k_2)1_A]m = (k_1 1_A + k_2 1_A)m = (k_1 1_A)m + (k_2 1_A)m = k_1 m + k_2 m$.
$k(m_1 + m_2) = (k1_A)(m_1 + m_2) = (k1_A)m_1 + (k1_A)m_2 = km_1 + km_2$.
$k(am) = (k1_A)(am) = [k(1_A a)]m = (ka)m$.
$(ka)m = [k(a1_A)]m = [a(k1_A)]m = a[(k1_A)m] = a(km)$.

Prop. 2　群代数上的左模

若 $(\tilde{\rho}, V)$ 为群代数 $F[G]$ 在域 F 上的一个线性表示.

- $\forall a \in F[G], v \in V$, 定义 a 对 v 的作用为

$$av := \tilde{\rho}(a)v$$

- $\tilde{\rho}(a) \in \mathrm{End}_F(V)$, 因此 $\forall v, v_1, v_2 \in V$, $k \in F$,

$$a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$$

$$a(kv) = k(av)$$

- $\tilde{\rho} : F[G] \to \mathrm{End}_F(V)$ 为代数同态, 因此 $\forall a, a_1, a_2 \in F[G]$, $k \in F$, $v \in V$,

$$(a_1 + a_2)v = a_1 v + a_2 v$$

$$(ka)v = k(av)$$

$$(a_1 a_2)v = a_1(a_2 v)$$

$$1_A v = v$$

于是 V 是群代数 $F[G]$ 上的一个左模.

Cor. 1　群代数上的左模

设 V 为群代数 $F[G]$ 上的任一左模, 则

- V 为域 F 上的一个线性空间.
- 若定义 $\tilde{\rho}(a)v := av$, $\forall v \in V$, 则 $\tilde{\rho} \in \mathrm{End}_F(V)$, 且 $\tilde{\rho} : F[G] \to \mathrm{End}_F(V)$ 为代数同态.

- 从而 $(\tilde{\rho}, V)$ 为群代数 $F[G]$ 的一个线性表示, 称为左 $F[G]$-模 V 提供的表示.
- 将 $\tilde{\rho}$ 限制到 G 上得到 G 的一个 F-表示 ρ, 称为左 $F[G]$-模 V 提供的群 G 的表示.

Rmk 可以通过研究群代数 $F[G]$ 上的左模, 来研究有限群 G 的 F-表示.

2.2.2 有限群 G 的正则表示与左正则 $F[G]$-模

Def. 10 左正则模

设 R 为一个幺环. 定义环 R 对加法群 R 的作用:

$$R \times R \to R \quad (r, a) \mapsto ra$$

则加法群 R 成为环 R 上的一个左模, 称为环 R 上的左正则模, 简称左正则 R-模.
设 A 为域 F 上的一个代数, 环 A 上的左正则模 A, 称为代数 A 上的左正则模, 简称左正则 A-模 (left regular A-module).

Prop. 3 群代数上的左正则模

群 G 的正则表示 ρ 的表示空间 $F[G]$, 为左正则 $F[G]$-模.

Pf 任给群代数中元素 $x = \sum_{g \in G} a_g g \in F[G]$, 有 $\forall y = \sum_{h \in G} b_h h \in F[G]$,

$$x \circ y = \tilde{\rho}(x) y = \left(\sum_{g \in G} a_g \rho(g) \right) y = \sum_{g \in G} a_g \left(\sum_{h \in G} b_h (gh) \right) = \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) \left(\sum_{h \in G} b_h h \right) = xy$$

Cor. 2 群代数上的左正则模

左正则 $F[G]$-模 $F[G]$ 提供的 G 的表示, 即为 G 的正则表示.

2.2.3 子表示与左 $F[G]$-模的子模

Def. 11 子模

设 N 为左 R-模 M 的一个非空子集. 若 N 为 M 作为加法群的子群, 且 $\forall r \in R, n \in N$, $rn \in N$, 则称 N 为 M 的一个子模 (submodule), 记作 $N < M$.
Rmk I 是左正则 R-模 R 的子模 $\iff$ I 为环 R 的左理想.

Prop. 4

设 N 为域 F 上代数 A 上左模 M 的一个子模, 则 N 为 M 作为域 F 上线性空间的一个子空间.

Pf $\forall n \in N, k \in F$, $kn = (k1_A)n \in N$, 故 N 对 M 的纯量乘法封闭; 由于 N 为加法群 M 的子群, 故对加法封闭.

Prop. 5 子表示与左 $F[G]$-模的子模

(ρ_U, U) 为 (ρ, V) 的子表示 $\Longleftrightarrow$ U 为左 $F[G]$-模 V 的一个子模.

Pf (ρ_U, U) 为 (ρ, V) 的子表示, $\Longleftrightarrow$ V 的子空间 U 为 G-不变子空间, $\Longleftrightarrow$ $\forall a \in F[G], u \in U$, $\tilde{\rho}(a)u = au \in U$, $\Longleftrightarrow$ U 为 V 的一个子模.

2.2.4 群表示的直和分解与左 $F[G]$-模的直和分解

Def. 12 子模的直和

设 N_1 与 N_2 均为左 R-模 M 的子模, 称 $N_1 + N_2 := \{n_1 + n_2 \mid n_1 \in N_1, n_2 \in N_2\}$ 为 N_1, N_2 的和. 若 $\forall y \in N_1 + N_2$ 可唯一地表为 $y = y_1 + y_2$, 其中 $y_1 \in N_1$, $y_2 \in N_2$, 则称 $N_1 + N_2$ 为 N_1, N_2 的直和, 记作 $N_1 \oplus N_2$.

Prop. 6 群表示的子表示直和分解与左 $F[G]$-模的子模直和分解

群 G 的 F-表示 (ρ, V) 满足 $\rho = \rho_U \oplus \rho_W \Longleftrightarrow V = U \oplus W$, 其中 U, W 均为左 $F[G]$-模 V 的子模.

Pf 存在 (ρ, V) 的子表示 (ρ_U, U) 与 (ρ_W, W) s.t. $\rho = \rho_U \oplus \rho_W$,
$\Longleftrightarrow$ 存在表示空间 V 的 G-不变子空间 U 与 W, s.t. $V = U \oplus W$,
$\Longleftrightarrow$ 存在左 $F[G]$-模 V 的子模 U 与 W, s.t. $V = U \oplus W$.

2.2.5 群表示的可约性与左 $F[G]$-模的可约性

Def. 13 模的可约性

若左 R-模 M 没有非平凡的子模, 则称 M 为一个单模 (simple module), 或称 M 为不可约模 (irreducible module). 否则, 称 M 为可约模 (reducible module).

Prop. 7 不可约表示与不可约左 $F[G]$-模

群 G 的 F-表示 (ρ, V) 不可约 $\Longleftrightarrow$ V 为不可约左 $F[G]$-模.
(ρ, V) 可约 $\Longleftrightarrow$ V 为可约左 $F[G]$-模.

Pf (ρ, V) 不可约 $\Longleftrightarrow$ 表示空间 V 没有非平凡的 G-不变子空间, $\Longleftrightarrow$ 左 $F[G]$-模 V 不可约.

Def. 14 完全可约的左模

若对于左 R-模 M 的每一个子模 N, 均存在 M 的子模 N', 使得

$$M = N \oplus N'$$

则称 M 为完全可约的.

Prop. 8 完全可约表示与完全可约左 $F[G]$-模

群 G 的 F-表示 (ρ, V) 完全可约 $\Longleftrightarrow$ V 为完全可约左 $F[G]$-模.

Pf (ρ, V) 完全可约, $\Longleftrightarrow$ 对于表示空间 V 的每个 G-不变子空间 U, 均存在 G-不变补空间 $W \subseteq V$, 有 $V = U \oplus W$, $\Longleftrightarrow$ 对于左 $F[G]$-模 V 的每个子模 U, 均存在子模 W, 使得 $V = U \oplus W$, $\Longleftrightarrow$ 左 $F[G]$-模 V 完全可约.

Prop. 9

F-代数 A 上的完全可约左模 V 的子模, 也是完全可约的.

Pf 设 U 为 V 的子模, U 亦为 V 的子空间. 任取子模 $U_1 < U$, 有 $U_1 < V$. 存在子模 $W < V$, 使得 $V = U_1 \oplus W$, 从而 $U = U_1 \oplus (W \cap U)$. $W \cap U < V$, $\Longrightarrow W \cap U < U$, 因此 U 完全可约.

Cor. 3 完全可约模的直和分解

设 A 为 F-代数, 有限维完全可约左 A-模必定可以分解为有限多个不可约子模的直和.

Pf 与有限维完全可约表示的结构类似.

Cor. 4

设 G 为有限群, 若 $\operatorname{char} F \nmid |G|$, 则每一个左 $F[G]$-模均为完全可约的.

Pf 由 Maschke 定理可得.

2.2.6 群表示的等价与左 $F[G]$-模的同构

Def. 15 模同态

设 M 与 M' 均为左 R-模. 若存在群同态 $\eta : M \to M'$, 且 η 与 R 的作用可交换, 即 $\forall r \in R, m \in M$,

$$\eta(rm) = r\eta(m)$$

则称 η 为 M 到 M' 的一个模同态 (module homomorphism).
若 $\eta : M \xrightarrow{\sim} M'$ 为双射, 则称 η 为模同构 (module isomorphism), 记作 $M \cong M'$.

Prop. 10

群 G 的两个 F-表示 (ρ, V) 与 (σ, W) 等价 $\iff$ 左 $F[G]$-模 V 与 W 模同构.

Pf 将 (ρ, V) 与 (σ, W) 线性扩充为群代数 $F[G]$ 的线性表示 $(\tilde{\rho}, V)$ 与 $(\tilde{\sigma}, W)$. 则 $(\rho, V) \approx (\sigma, W) \iff$ 存在线性同构 $\phi : V \to W$, 使得 $\forall g \in G, v \in V$, $\phi[\rho(g)v] = \rho(g)\phi(v)$. 或 $\forall a \in F[G]$, $\phi[\tilde{\rho}(a)v] = \tilde{\rho}(a)\phi(v)$. 或 $\forall a \in F[G]$, $\phi(av) = a\phi(v)$. $\iff V \cong W$.

Def. 16 商模

设 N 为左 R-模 M 的一个子模, 若对于 Abel 商群 M/N 与环 R 满足 $\forall r \in R$, $m + N \in M/N$, 有

$$r(m + N) = rm + N$$

则 M/N 成为一个左 R-模, 称为 M 对于 N 的商模 (quotient module).

Thm. 1 模同态基本定理

设 M 与 M' 均为左 R-模, 若有模同态 $\eta : M \to M'$, 则有模同构

$$M/\operatorname{Ker}\eta \cong \operatorname{Im}\eta$$

Pf M, M' 作为加法群, 有群同构 $\phi : M/\operatorname{Ker}\phi \to \operatorname{Im}\phi$. $\forall m \in M$, $\phi(m + \operatorname{Ker}\eta) = \eta(m)$. $\forall r \in R$, $\phi[r(m + \operatorname{Ker}\eta)] = \phi(rm + \operatorname{Ker}\eta) = \eta(rm) = r\eta(m) = r\phi(m + \operatorname{Ker}\eta)$. 从而 ϕ 为模同构, $M/\operatorname{Ker}\eta \cong \operatorname{Im}\eta$.

2.3 有限维半单代数的不可约左模

2.3.1 环到理想的直和分解与幂等元

Def. 17 环元素的幂等性、正交性、本原性

- 设 A 为一个环. 若 $e^2 = e \neq 0$, 则称 $e \in A$ 为幂等元 (idempotent element).
- 若 $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$, 则称幂等元 $e_1, e_2 \in A$ 为正交的 (orthogonal).
- 若幂等元 $e \in A$ 不能表为 A 的两个正交幂等元之和 $e \neq e_1 + e_2$, 则称 e 为本原的 (primitive).
- 设 $e \in A$ 为幂等元, 若 $e \in \mathrm{Z}(A)$, 则称 e 为中心幂等元; 且若 e 不能表为 A 的两个正交的中心幂等元之和, 则称 e 为本原的中心幂等元.

Prop. 11 左理想分解

若环 A 能分解为有限多个非零左理想 $V_1, \cdots, V_s$ 的直和 $A = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$, 则一定可以取 $1_A = e_1 + \cdots + e_s$, 其中 $e_i \in V_i$, 而 $e_1, \cdots, e_s$ 为一组两两正交的幂等元, 且 $V_i = Ae_i$.

Pf $\forall i \in \{1, \cdots, s\}$, $e_i = \sum_{j=1}^{s} e_ie_j = e_ie_1 + \cdots + e_i^2 + \cdots + e_ie_s = 0 + \cdots + 0 + e_i + 0 + \cdots + 0$.

由于 e_i 的表法唯一, 从而 $e_i^2 = e_i$, 对于 $j \neq i$, $e_ie_j = 0$.

$\forall a \in A$, $ae_i \in V_i$, $\Longrightarrow Ae_i \subseteq V_i$. $\forall a_i \in V_i$, $a_i = a_i1_A = \sum_{j=1}^{s} a_ie_j$, $\Longrightarrow a_i = a_ie_i \in Ae_i$, 从而 $V_i \subseteq Ae_i$. $\Longrightarrow V_i = Ae_i$.

Cor. 5 左理想分解

反之, 若 $e_1, \cdots, e_m$ 为 A 的一组两两正交的幂等元, 令 $e = \sum_{i=1}^{m} e_i$, 则

$$Ae = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_m$$

其中 $Ae_1, \cdots, Ae_m$ 均为 A 的左理想.

Rmk 若 $1_A = e_1 + \cdots + e_m$, 则 $A = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_m$

Pf $\forall ae \in Ae$, $ae = ae_1 + \cdots + ae_m \in Ae_1 + \cdots + Ae_m$, $\Longrightarrow Ae \subseteq Ae_1 + \cdots + Ae_m$

Def. 18 左理想的可分解性

若环 A 的左理想 I 能表示为 A 的两个非零左理想的直和, 则称 I 为可分解的 (decomposable); 否则称 I 为不可分解的 (indecomposable).

Prop. 12　本原幂等元与不可分解左理想

设 $e \neq 1_A$ 为环 A 的幂等元, 则 A 的左理想 Ae 不可分解 $\iff$ e 是本原的.

Pf　"$\Rightarrow$": Ae 不可分解, 假设 e 不是本原的, 则存在正交幂等元 e_1, e_2 使得 $e = e_1 + e_2$, 从而 $Ae = Ae_1 \oplus Ae_2$, 矛盾. 因此 e 是本原的.

"$\Leftarrow$": e 是本原的, 假设 Ae 可分解, 则有 $Ae = V_1 \oplus V_2$, 其中 V_1, V_2 均为非零左理想. 从而 $\exists e_1 \in V_1, e_2 \in V_2$, 使得 $e = e_1 + e_2$. $(1-e)^2 = 1-e$, $e(1-e) = (1-e)e = 0$, $\Longrightarrow 1-e, e$ 为正交幂等元. 由 $1 = (1-e)+e$, 有 $A = A(1-e) \oplus Ae = A(1-e) \oplus V_1 \oplus V_2$. 由于 $1 = (1-e)+e_1+e_2$, 因此 $1-e, e_1, e_2$ 为两两正交的幂等元, 从而 e 非本原, 矛盾. 因此 Ae 不可分解.

Cor. 6

环 A 分解为不可分解的非零左理想的直和 $\iff$ 1_A 分解为两两正交的本原幂等元之和.

Cor. 7　本原中心幂等元与不可分解双边理想

环 A 分解为不可分解的非零双边理想的直和 $\iff$ 1_A 分解为两两正交的本原中心幂等元之和.

Prop. 13　本原中心幂等元的性质

环 A 的两个本原中心幂等元要么正交、要么相等.

Pf　设 e_1, e_2 为本原中心幂等元. $e_1 = e_1e_2 + e_1(1-e_2)$, 易证 $e_1e_2, e_1(1-e_2)$ 为相互正交的中心幂等元. 假设 $e_1e_2, e_1(1-e_2) \neq 0$, 则有 $e_1e_2 = 0$ 或 $e_1(1-e_2) = 0 \Rightarrow e_1 = e_1e_2$. 同理易证 $e_2e_1 = 0$ 或 $e_2(1-e_1) = 0 \Rightarrow e_2 = e_2e_1$, 因此 e_1 与 e_2 正交, 或者 $e_1 = e_2 = e_1e_2 = e_2e_1$.

Cor. 8　环的全部本原中心幂等元

设 $e_1 \neq \cdots \neq e_n$ 均为环 A 的本原中心幂等元, 若 $1_A = e_1 + \cdots + e_n$, 则 $e_1, \cdots, e_n$ 即为 A 的全部本原中心幂等元.

Pf　设 A 还有一个本原中心幂等元 $f \notin \{e_1, \cdots, e_n\}$, 则 $f = f1_A = fe_1 + \cdots + fe_n = 0$, 矛盾.

2.3.2　有限维半单代数上的左正则模

Def. 19　有限维半单代数

设 A 为有限维 F-代数, 若每一个左 A-模都是完全可约的, 则称 A 为有限维半单代数 (finite-dimensional semi-simple algebra).

Rmk　若 $\operatorname{char} F \nmid |G|$, 则群代数 $F[G]$ 为半单代数. 条件"$\operatorname{char} F \nmid |G|$" 保证了群代数的半单性.

Thm. 2　左正则模的不可约直和分解

有限维半单代数 A 的每一个不可约左 A-模, 都同构于左正则 A-模 A 的直和分解式

$$A = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$$

中的某一个不可约子模 L_i, 从而每一个不可约左 A-模都是有限维的.

Pf　左正则 A-模 A 可分解为有限多个不可约子模的直和 $A = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$. 存在一组两两正交的本原幂等元 $e_1, \cdots, e_n$, 使得 $L_i = Ae_i$, 且 $1_A = e_1 + \cdots + e_n$.

任给一个不可约左 A-模 M. 取 $m \in M$ 且 $m \neq 0$, 易证 Ae_im 为 M 的子模. 定义映射 $f_i : Ae_i \to Ae_im$, $ae_i \mapsto ae_im$. 显然 f_i 是满射. 易证 f_i 是模同态.

Thm. 3　正则表示的不可约直和分解

设 G 为有限群. 若 $\operatorname{char} F \nmid |G|$, 则 G 的每一个不可约 F-表示, 都等价于 G 的正则表示 ρ 的直和分解式中的某一个不可约子表示, 从而有限群 G 的每一个不可约 F-表示都是有限维的.

Pf　$\operatorname{char} F \nmid |G|$ 时, 每个左 $F[G]$-模均完全可约, 从而 $F[G]$, 从而群代数 $F[G]$ 为有限维半单代数.

Thm. 4　有限维代数的半单性与左正则模的完全可约性

设 A 为有限维 F-代数, 则 A 半单 $\iff$ 左正则 A-模 A 完全可约.

2.3.3　有限维半单代数的不同构的不可约左模的个数

Def. 20　合成列

- 设左 R-模 M 有子模降链

  $$M = M_1 \supsetneqq M_2 \supsetneqq \cdots M_k \subsetneqq M_{k+1} = \{0\}$$

  若所有商模 M_i/M_{i+1} 均不可约 $(i = 1, \cdots, k)$, 则称该子模降链为 M 的一个合成列 (composition series).

- 商模 M_i/M_{i+1} 称为合成因子组 (composition factors).

- 合成因子的数量 k 称为该合成列的长度 (length).

- 若两个合成列长度相等, 且可以用某种方式将其因子组配对, 使对应的合成因子模同构, 则称这两个合成列等价.

Thm. 5　Jordan-Hölder 定理

若左 R-模有合成列, 则 M 的任意两个合成列等价. 即合成列在等价的意义下唯一.

Lem. 1

若左 R-模 M 可分解为其两个子模的直和 $M=N_1\oplus N_2$, 则 $M/N_1\cong N_2$, $M/N_2\cong N_1$.

Pf　设 $m=n_1+n_2\in M$, 其中 $n_1\in N_1$, $n_2\in N_2$. 定义投影映射 $\mathcal{P}_1(m)=m_1$, 易证 $\mathcal{P}_1:M\twoheadrightarrow N_1$ 为满的模同态, 从而 $\operatorname{Im}\mathcal{P}_1=N_1$. $m\in\operatorname{Ker}\mathcal{P}_1\Leftrightarrow n_1=0\Leftrightarrow m=n_2\in N_2$, 从而 $\operatorname{Ker}\mathcal{P}_1=N_2$. $M/\operatorname{Ker}\mathcal{P}_1=M/N_2\cong\operatorname{Im}\mathcal{P}_1=N_1$. 同理定义 $\mathcal{P}_2(m)=n_2$ 则有 $M/N_1\cong N_2$.

Thm. 6　半单代数正则模分解唯一性定理

若 A 为有限维半单代数, 则左正则 A-模有合成列. 从而 A 的每个不可约子模 L_i 在 A 中的重数, 与不同构的不可约子模的个数, 均由 A 唯一决定, 与直和分解式无关.

Rmk　A 的所有不同构的不可约左 A-模的个数也由 A 唯一决定.

Pf　设 A 到其不可约子模有直和分解式 $A=\bigoplus\limits_{i=1}^{n}L_i$, 称分解式中与 L_i 同构的不可约子模的个数, 为 L_i 在 A 中的重数. 考虑子模降链

$$A\supsetneqq\bigoplus_{i=2}^{n}L_i\supsetneqq\bigoplus_{i=3}^{n}L_i\supsetneqq\cdots\supsetneqq L_n\supsetneqq\{0\}$$

由引理可得 $A/\bigoplus\limits_{i=2}^{n}L_i\cong L_1$, $\bigoplus\limits_{i=2}^{n}L_i/\bigoplus\limits_{i=3}^{n}L_i\cong L_2$, $\cdots$, $L_n/\{0\}\cong L_n$. 由于 $L_1,\cdots,L_n$ 均不可约, 从而商模均不可约, 该子模降链为合成列. 由 J-H 定理, A 的合成列唯一.

Lem. 2

设 A 为有限维半单代数, 则环 A 的每一个非零左理想 L, 均由一个幂等元 e 生成, 即 $L=Ae$.

Pf　若 $L=A$, 则 $L=A1_A$. 设 $L\neq A$, L 为左正则 A-模 A 的非零子模, 由于 A 半单, 存在 A 的子模 $L'\neq\{0\}$, 使得 $A=L\oplus L'$. 设 $1_A=e+e'$, 其中 $e\in L$, $e'\in L'$ 均为 A 的幂等元, 且 $L=Ae$, $L'=Ae'$.

Def. 21　极小左理想与极小双边理想

设 L 为环 A 的一个非零左理想, 若 L 只包含 A 的左理想 $\{0\}$ 与 L, 则称 L 为极小左理想 (minimal left ideal). 若环 A 的非零双边理想 I 只包含 A 的两个双边理想 $\{0\}$ 和 I, 则

Rmk　环 A 的极小左理想, 就是 A 作为左 A-模的不可约子模.

Lem. 3　不同构的极小左理想的性质

设 A 为有限维半单代数, L, L' 为环 A 的极小左理想. 若 $L \cong L'$, 则 $LL' = L'$. 若 $L \ncong L'$, 则 $LL' = \{0\}$.

$$LL' = \left\{ \sum_{i=1}^{m} l_i l_i' \mid l_i \in L, l_i' \in L' \right\}$$

Rmk　"$L \ncong L' \Longrightarrow LL' = \{0\}$" 不要求 A 半单.

Pf　LL' 为 A 的左理想, 从而 $LL' \subseteq L'$, 由于 L' 为极小左理想, 有 $LL' = \{0\}$ 或者 $LL' = L'$.

设 $L \cong L'$, 则有模同构 $\phi : L \to L'$. $\forall x' \in L'$, $\exists x \in L$, s.t. $\phi(x) = x'$. 又设 $L = Ae$, 则 $\exists a \in A$, s.t. $x = ae$, 从而 $x' = \phi(ae) = a\phi(e) = a\phi(ee) = ae\phi(e) = x\phi(e) \in LL'$. 因此 $L' \subseteq LL'$, $LL' = L'$.

要证"$L \ncong L' \Longrightarrow LL' = \{0\}$", 可证"$LL' \neq \{0\} \Longrightarrow L \cong L'$", 即原命题的逆否命题. 设 $LL' \neq \{0\}$, 则 $LL' = L'$. $\forall x' \in L'$, $Lx' \subseteq L'$ 为 A 的左理想. 由于 L' 为 A 的极小左理想, 且当 $Lx' = \{0\}$ 时导致矛盾, 因此 $\exists y' \in L'$, s.t. $Ly' = L'$. 定义 $\psi : L \to L'$, $x \mapsto xy'$. 易证 ψ 为模同态, 从而 $L \cong L'$.

Thm. 7　所有不同构的不可约左 A-模的个数

设 A 为有限维半单代数, 则环 A 有极小双边理想直和分解式

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s$$

从而 $1_A = e_1 + \cdots + e_s$, $e_i \in A_i$, $e_1, \cdots, e_s$ 为 A 的全部两两不等的本原中心幂等元, 且 $A_i = Ae_i$, e_i 为 A_i 的单位元.
于是所有不同构的不可约左 A-模的个数, 等于 A 的本原中心幂等元的个数.

Pf　设环 A 有极小左理想直和分解式 $A = L_{11} \oplus \cdots \oplus L_{1m_1} \oplus \cdots \oplus L_{s1} \oplus \cdots \oplus L_{sm_s}$. 其中 $L_{ij} \cong L_{kr} \Longleftrightarrow i = k$. 环 A 的所有不同构的极小左理想的个数即为 s.

记 $A_i = \bigoplus_{j=1}^{m_i} L_{ij}$, 则 $A = \bigoplus_{i=1}^{s} A_i$. $k \neq i$ 时 $L_{ij}L_{kr} = \{0\}$, 故 $A_iL_{kr} = \sum_{j=1}^{m_i} L_{ij}L_{kr} = \{0\}$, 因此 $A_iA_k = \{0\}$. $\forall x_i \in A_i$, $a = \sum_{j=1}^{s} a_j \in A$, $a_j \in A_j$. 从而 $x_ia = \sum_{j=1}^{s} x_ia_j = x_ia_i \in A_i$. 因此 A_i 是 A 的右理想, 从而是双边理想.

设 I 为 A 的非零双边理想, 且 $I \subseteq A_i$. 可证 $A_i \subseteq I$, 从而 $I = A_i$, 因此 A_i 是 A 的极小双边理想, 且必然是不可分解的双边理想. 从而有 $1_A = e_1 + \cdots + e_s$, 其中 $e_1, \cdots, e_s$ 为 A 的一组两两正交的本原中心幂等元, 且 $\{e_1, \cdots, e_s\}$ 即为 A 的全部本原中心幂等元.

Def. 22　单环与单代数

若环 R 只有平凡的双边理想 $\{0\}$ 与 R, 则称 R 为一个单环 (simple ring). 若作为环的 F-代数 B 为一个单环, 则称 B 为一个单代数 (simple algebra).

Cor. 9

极小双边理想 A_i 是单环, 其单位元为 A 的本原中心幂等元.

Pf　任取 A_i 的双边理想 J. $\forall x \in J$, $a = \sum_{i=1}^{s} a_i \in A$, $a_i \in A_i$. 由于当 $i \neq j$ 时 $A_iA_j = \{0\}$, 因此 $ab = \sum_{i=1}^{s} a_ix = a_ix \in J$, $xa = \sum_{i=1}^{s} xa_i = xa_i \in J$. 从而 J 亦为 A 的双边理想, 因此必然有 $J = \{0\}$ 或 $J = A_i$. 故 A_i 只有平凡的双边理想, 为单环.

2.3.4　有限维单代数的结构

Def. 23　除环, 除环上的右线性空间

- 若幺环 R 上的每个非零元均可逆, 则称 R 为一个除环 (division ring).
- 设 V 为除环 D 上的右模, 将 D 在 V 上的作用 $V \times D \to V$, $(v, d) \to vd$ 视作 D 与 V 的右纯量乘法, 则称 V 为除环 D 上的右线性空间, V 中元素也称为向量.
- V 到自身的模同态称为 V 上的线性变换, V 上所有线性变换构成的集合成为一个环, 称为自同态环, 记作 $\mathrm{End}_D V$.

Lem. 4

若 D 为一个除环, 则 $M_n(D)$ 为一个单环.

Lem. 5

设 V 为除环 D 上的右线性空间. 若 $\dim_D V = n$, 则有代数同构

$$\mathrm{End}_D(V) \cong M_n(D)$$

Lem. 6　Schur 引理

设 V, W 为环 R 上的不可约左模. 则 R-模同态 $f : V \to W$ 或是零同态, 或是模同构. 因此, 当 $V \ncong W$ 时, $\mathrm{Hom}_R(V, W) = \{0\}$; $\mathrm{End}_R(V)$ 为除环.

Pf　$\forall f \in \mathrm{Hom}_R(V, W)$, $\mathrm{Ker}\, f < V$, $\mathrm{Im}\, f < W$. 由于 V, W 不可约, 因此 $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ 或 $\mathrm{Ker}\, f = V$, $\mathrm{Im}\, f = \{0\}$ 或 $\mathrm{Im}\, f = W$. 当 $\mathrm{Ker}\, f = V$ 时 $\mathrm{Im}\, f = \{0\}$, $f = 0$. 当 $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ 时 $V = V/\{0\} \cong \mathrm{Im}\, f \neq \{0\}$, 从而 $\mathrm{Im}\, f = W$, $V \cong W$, f 为模同态.

当 $V \ncong W$ 时, $\forall f \in \mathrm{Hom}_R(V,W)$, $\mathrm{Ker}\, f = V$, $f = 0$, 故 $\mathrm{Hom}_R(V,W) = \{0\}$. 令 $V \cong W$, $\forall f \in \mathrm{End}_R(V)$, 易证逆映射 $f^{-1} \,\mathrm{End}_R(V)$, 因此 $\mathrm{End}_R(V)$ 中每个非零元均可逆, 从而是除环.

Thm. 8　Wedderburn 定理 (有限维单代数结构定理)

设 B 为域 F 上有限维单代数, I 为 B 的极小左理想. 令 $D = \mathrm{End}_B(I)$, 则

1. D 为除环, I 为 D 上的有限维右线性空间, D 为有限维 F-线性空间, 其维数关系为

$$\dim_F I = \dim_F D \cdot \dim_D I$$

2. 有 F-代数同构

$$B \cong \mathrm{End}_D(I) \cong M_n(D)$$

其中 $n = \dim_D I$.

Rmk　定理的 1 部分不要求 B 为单代数.

Meth. 1　有限维单代数结构的探究

1. 构造除环 D:

取 B 的一个极小左理想 I, 可视作左正则 B-模 B 的不可约子模. 令 $D = \mathrm{End}_B(I)$, 由 Schur 引理, D 为一个除环.

2. 构造除环 D 上的右线性空间:

I 为 Abel 加法群. 定义 D 与 I 的右纯量乘法 $I \times D \to I$, $(x,d) \mapsto xd$. 易证, I 成为除环 D 上的右线性空间.

定义 $(k1_B)_R : I \to I$, $x \mapsto x(k1_B)$. 易证 $(k1_B)_R$ 是 I 到自身的一个映射, 且保持加法, 满足 B-线性: $\forall b \in B$, $(bx)(k1_B)_R = (bx)(k1_B) = b[x(k1_B)] = b[x(k1_B)_R]$. 因此 $(k1_B)_R$ 为模同态, $(k1_B)_R \in \mathrm{End}_B(I) = D$. 在 I 中取一个 F-基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$. $\forall x \in I$, 均可表为右 D-线性组合 $x = \sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(k_i 1_B)_R$. 从而 $\dim_D I < \infty$.

3. 探索 $\dim_F I$ 与 $\dim_D I$ 的关系:

定义 F 与 Abel 加法群 D 的纯量乘法 $(k,d) \mapsto kd = d(k1_B)_R$, 易证 D 成为一个 F-线性空间. $\forall d \in D$ 为 I 到自身保持加法的映射. 由于 d 为 B-模同态, $\forall k \in F$, $(kx)d = [(k1_B)x]d = (k1_B)(xd) = k(xd)$, 从而 d 保持 F 与 I 的纯量乘法, d 为 F-线性空间 I 上的线性变换. 因此 $D \subseteq \mathrm{End}_F(I)$, $\dim_F D \le \dim_F[\mathrm{End}_F(I)] = (\dim_F I)^2 < \infty$.

设 $\dim_D I = n$, $\dim_F D = m$. 取 I 作为 D 上右线性空间的一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 与 D 的 F-基 $\delta_1, \cdots, \delta_m$. $\forall x \in I$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i k_{ij} \delta_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k_{ij}(\alpha_i \delta_j)$, 即 I 由

$\{\alpha_i\delta_j \mid i=1,\cdots,n; j=1,\cdots,m\}$ 生成. 令 $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m}k_{ij}\delta_j\right)}_{\in D}=0$, 由于 α_i 在 D 上线性无关, 因此 $\sum_{j=1}^{m}k_{ij}\delta_j=0$, 由于 δ_j 在 F 上线性无关, 因此 $k_{ij}=0$. 从而 $\{\alpha_i\delta_j\}$ 为 I 作为 F-线性空间的一个基, 共有 nm 个元素, 因此 $\dim_F I=nm$.

4. 证明 $B\cong \mathrm{End}_D I$:

   $\forall T\in \mathrm{End}_D(I)$, 需满足 $\forall x_1,x_2,x\in I, d\in D$,

   $$T(x_1+x_2)=Tx_1+Tx_2 \qquad T(xd)=(Tx)d$$

   易证 $\mathrm{End}_D(I)$ 对于线性变换的加法与映射的乘法构成一个环. 又定义 F 与 $\mathrm{End}_D(I)$ 的纯量乘法: $\forall T\in\mathrm{End}_D(I), k\in F, x\in I$,

   $$(kT)x=k(Tx)$$

   易证 $\mathrm{End}_D(I)$ 成为一个 F-代数. 定义 $b_L: I\to I$, $x\mapsto bx$. b_L 为 I 到自身保持加法的映射. $\forall d\in D=\mathrm{End}_B I, x\in I$, $b_L(xd)=b(xd)=(bx)d=[b_L(x)]d$, 从而 b_L 保持 D-纯量乘法, 因此 $b_L\in\mathrm{End}_D(I)$.

   定义 $\phi: B\to\mathrm{End}_D(I)$, $b\mapsto b_L$. 易证 ϕ 是一个保持加法、乘法、纯量乘法的映射, 且 $\phi(1_B)=1_L=\mathrm{id}_I$, 从而 $\phi: B\to\mathrm{End}_D(I)$ 为代数同态. $\mathrm{Ker}\,\phi$ 为 B 的双边理想, 由于 B 为单环, 因此 $\mathrm{Ker}\,\phi=\{0\}$ 或 $\mathrm{Ker}\,\phi=B$. 若 $\mathrm{Ker}\,\phi=B$, 则 $\phi=0$, 矛盾. 因此 $\mathrm{Ker}\,\phi=\{0\}$, ϕ 为单射, $B\cong\mathrm{Im}\,\phi$.

   $B_L:=\mathrm{Im}\,\phi\subseteq\mathrm{End}_D(I)$. 由于 IB 为 B 的左理想, 且 IB 是 B 的右理想, 从而是双边理想. 由于 B 是单环, 有 $IB=B$. $\forall T\in\mathrm{End}_D(I), y\in I, b\in B$. $\forall x\in I$, 定义 $x_R: I\to I$, $y\mapsto yx$. 由于 $x_R\in\mathrm{End}_B(I)=D$, $\forall x,y\in I$, 有

   $$T(yx)=T[(y)x_R]=(Ty)x_R=(Ty)x$$

   因此 $T(yb)_L=[(Ty)b]_L\in(IB)_L$, $(IB)_L$ 与 B_L 是 $\mathrm{End}_D(I)$ 的左理想. $\forall S\in\mathrm{End}_D(I)$, $S=S\,\mathrm{id}_I=S1_L\in B_L$, 有 $\mathrm{End}_D(I)\subseteq B_L$, 从而 $\mathrm{Im}\,\phi=\mathrm{End}_D(I)$. $B\cong\mathrm{End}_D(I)$, 由引理 $\mathrm{End}_D(V)\cong M_n(D)$, 有 $B\cong\mathrm{End}_D(I)\cong M_n(D)$, $n=\dim_D I$.

Thm. 9　矩阵代数的极小左理想直和分解

设 D 为除环, 则单环 $M_n(D)$ 到其彼此同构的极小左理想的直和分解式为

$$M_n(D)=\bigoplus_{i=1}^{n}M_n(D)E_{ii}$$

Pf $\forall A=(a_{ij})\in M_n(D)$, 有

$$A=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\begin{pmatrix}0&\cdots&0&a_{1i}&0&\cdots&0\\ \vdots& &\vdots&\vdots&\vdots& &\vdots\\ 0&\cdots&0&a_{ni}&0&\cdots&0\end{pmatrix}}_{\in M_n^{(i)}(D)}$$

易证, $M_n^{(i)}(D)$ 为 $M_n(D)$ 的一个左理想. 且有 $M_n(D)=\bigoplus_{i=1}^{n}M_n^{(i)}(D)$.

$M_n(D)$ 的单位元 $I=\sum_{i=1}^{n}E_{ii}$, $E_{ii}\in M_n^{(i)}(D)$, 从而 $E_{11},\cdots,E_{nn}$ 为一组两两正交的幂等元, 且 $M_n^{(i)}(D)=M_n(D)E_{ii}$. 因此 $M_n(D)=\bigoplus_{i=1}^{n}M_n(D)E_{ii}$.

设 $J\subseteq M_n(D)E_{ii}$ 为 $M_n(D)$ 的一个非零左理想. 由于 $J\neq\{0\}$, 必存在 $C=(c_{ij})\neq 0$, 且 $c_{li}\neq 0$, 则 $C=\sum_{l=1}^{n}c_{li}E_{li}$. $(c_{li}^{-1}E_{il})C=(c_{li}^{-1}E_{il})\underbrace{\left(\sum_{l=1}^{n}c_{li}E_{li}\right)}_{\in J}=E_{ii}\in J$, 因此 $M_n(D)E_{ii}\subseteq J$, 从而 $J=M_n(D)E_{ii}$ 为 $M_n(D)$ 的极小左理想.

设 $i\neq j$, 取 $E_{ki}\in M_n(D)E_{ii}$, $E_{ij}\in M_n(D)E_{jj}$, $E_{ki}E_{ij}=E_{kj}\neq 0$, 从而 $[M_n(D)E_{ii}][M_n(D)E_{jj}]\neq\{0\}$. 由"$LL'\neq\{0\}\Longrightarrow L\cong L'$", $M_n(D)E_{ii}\cong M_n(D)E_{jj}$.

Cor. 10　有限维单代数的极小左理想直和分解

设 I 为有限维单代数 B 的一个极小左理想, $D=\mathrm{End}_B(I)$. 则 B 有到其 $\dim_D I$ 个彼此同构的极小左理想的直和分解.

2.3.5　代数闭域上有限维半单代数的不可约左模的维数

Cor. 11

设 A 为有限维半单 F-代数. A 有极小左理想直和分解式

$$A=\bigoplus_{i=1}^{s}\underbrace{L_{i1}\oplus\cdots L_{im_i}}_{=A_i}$$

当 $i=k$ 时 $L_{ij}\cong L_{kr}$. 令

$$D_i=\mathrm{End}_{A_i}(L_{i1})$$

$$n_i=\dim_{D_i}L_{i1}\qquad \tilde{n}_i=\dim_F L_{i1}$$

则 L_{i1} 在 A 中的重数 $m_i = n_i$, 从而有

$$\dim_F A = \sum_{i=1}^{s} n_i \tilde{n}_i$$

其中 s 为 A 的本原中心幂等元的个数.

Lem. 7　Schur 引理

设 A 为代数闭域 F 上的代数, V 为有限维不可约左 A-模. 令 $D = \mathrm{End}_A(V)$, 则

$$D = F\,\mathrm{id}_V \cong F$$

从而 $D = \mathrm{End}_A(V)$ 是一个域.

Pf　与有限维单代数结构的探究过程类似, 易证 $D \subseteq \mathrm{End}_F(V)$.

设 F 为一个代数闭域, 则线性变换 $d \in D$ 必有特征值. 取 d 的特征值 λ_1, d 的属于 λ_1 的特征子空间 $V_{\lambda_1} \subseteq V$. 由于 d 为 A-模同态, 因此有 $\forall \alpha \in V_{\lambda_1}, a \in A$,

$$d(a\alpha) = a(d\alpha) = a(\lambda_1\alpha) = a[(\lambda_1 1_A)\alpha] = [a(\lambda_1 1_A)]\alpha = [\lambda_1(a1_A)]\alpha$$

$$= [\lambda_1(1_A a)]\alpha = [(\lambda_1 1_A)a]\alpha = (\lambda_1 1_A)(a\alpha) = \lambda_1(a\alpha)$$

从而 $a\alpha \in V_{\lambda_1}$, V_{λ_1} 也为左 A-模. 由于 V 不可约, 于是 $V_{\lambda_1} = V$. 因此 d 为 V 上的数乘变换 $\lambda_1\,\mathrm{id}_V$. $D \subseteq \{k\,\mathrm{id}_V \mid k \in F\} =: F\,\mathrm{id}_V$.

任取 $\forall k\,\mathrm{id}_V \in F\,\mathrm{id}_V$, $\forall a \in A, v \in V$, $(k\,\mathrm{id}_V)(av) = k(av) = a(kv) = a[(k\,\mathrm{id}_V)v]$, 从而 $k\,\mathrm{id}_V \in D = \mathrm{End}_{A(V)}$. 于是 $D = F\,\mathrm{id}_V \cong F$.

Thm. 10　代数闭域上有限维半单代数的不可约左模的维数定理

设 A 为代数闭域 F 上的有限维半单代数, 则有环同构

$$D_i \cong F$$

从而不可约子模 L_{i1} 在 A 中的重数为 $\dim_F L_{i1}$, 且

$$\dim_F A = \sum_{i=1}^{s} (\dim_F L_{i1})^2$$

其中 s 为 A 的本原中心幂等元的个数.

即, 代数闭域上有限维半单代数 A 上的所有不同构的不可约左模的维数的平方和等于 A 的维数.

Rmk　"F 为代数闭域" 为充分条件, 充要条件为"F 满足 $D_i \cong F$, $i = 1, \cdots, s$".

Pf 由 Schur 引理可得.

Cor. 12 不可约表示在正则表示中的重数

设 G 为有限群. 若 $\operatorname{char} F \nmid |G|$, 则 G 在 F 上的任一不可约 F-表示 ρ, 都等价于正则表示 ρ_{reg} 的直和分解式中某一个不可约子表示 ρ_i, ρ_i 在 ρ_{reg} 中的重数, 称为不可约表示 ρ 在 ρ_{reg} 中的重数 m_i.
当 F 为代数闭域时, $m_i = \deg \rho$.

2.4 有限群的不等价的不可约表示的个数和次数

Thm. 11 类和基定理

设 $C_1, \cdots, C_r$ 为群 G 的全部共轭类. 定义 C_i 的类和为

$$c_i = \sum_{x \in C_i} x$$

则 $c_1, \cdots, c_r$ 为群代数 $\mathrm{Z}(F[G])$ 的一个基, 从而

$$\dim_F \mathrm{Z}(F[G]) = r$$

Pf 由于 $g \in G$ 构成 $F[G]$ 的一个基, 因此 $z \in \mathrm{Z}(F[G]) \iff \forall g \in G,\ gzg^{-1} = z$.

设 $z = \sum_{x \in G} k_x x$, $k_x \in F$, 则 $gzg^{-1} = \sum_{x \in G} k_x gxg^{-1} = \sum_{x \in G} k_x x = \sum_{x \in G} k_{g^{-1}xg} x$, 于是 $k_{g^{-1}xg} = k_x$.

$gc_ig^{-1} = g\left(\sum_{x \in C_i} x\right) g^{-1} = \sum_{x \in C_i} gxg^{-1} = \sum_{x \in C_i} x = c_i$, 从而 $c_i \in \mathrm{Z}(F[G])$. 在 C_i 中取代表元 x_i, 则 $z = \sum_{i=1}^{r} k_{x_i} c_i$. 由于 $G = \bigsqcup_{i=1}^{r} C_i$, 因此 $c_1, \cdots, c_r$ 线性无关, 从而构成 $\mathrm{Z}(F[G])$ 的一个基.

Thm. 12 有限群不可约表示的个数定理

设 G 为有限群, 且 $\operatorname{char} F \nmid |G|$. 设 G 的所有不等价的不可约 F-表示的个数为 s, G 的共轭类个数为 r.

1. $s \leq r$;
2. 若 F 为代数闭域, 则 $s = r$, 且 $F[G]$ 的全部本原中心幂等元构成 $\mathrm{Z}(F[G])$ 的一个基.

Pf 设 $e_1, \cdots, e_s \in \mathrm{Z}(F[G])$ 为群代数 $F[G]$ 的全部本原中心幂等元, 则 $1_{F[G]} = \sum_{i=1}^{s} e_i$, 且两两正交. 设 $\sum_{i=1}^{s} k_i e_i = 0$, 则 $\left(\sum_{i=1}^{s} k_i e_i\right) e_i = k_i e_i^2 = k_i e_i = 0$, 从而 $k_i = 0$, 因此 $e_1, \cdots, e_s$ 线性无关, 于是 $s \leq \dim_F \mathrm{Z}(F[G]) = r$.

设 $F[G]=\bigoplus_{i=1}^{s}\underbrace{F[G]e_i}_{=A_i}$, 其中 A_i 是单环. 设 $L_{i1}\subseteq A_i$ 为 $F[G]$ 的一个极小左理想, 则 L_{i1} 也为 A_i 的一个极小左理想. 令 $D_i=\mathrm{End}_{A_i}L_{i1}$, 记 $n_i=\dim_{D_i}L_{i1}$, 则由 Wedderburn 定理, 有 $A_i\cong M_{n_i}(D_i)$. 若 F 为代数闭域, 则 $D_i\cong F$, 有 $A_i\cong M_{n_i}(F)$, 其中 $n_i=\dim_F L_{i1}$. 于是有

$$\mathrm{Z}(A_i)\cong\mathrm{Z}(M_{n_i}(F))=FI_{n_i}\cong F$$

当 $i\neq j$ 时 $A_iA_j=\{0\}$, 从而

$$\mathrm{Z}(F[G])=\bigoplus_{i=1}^{s}\mathrm{Z}(A_i)\cong\bigoplus_{i=1}^{s}\mathrm{Z}(M_{n_i}(F))\cong\underbrace{F\oplus\cdots\oplus F}_{s}$$

因此 $\dim_F\mathrm{Z}(F[G])=s$.

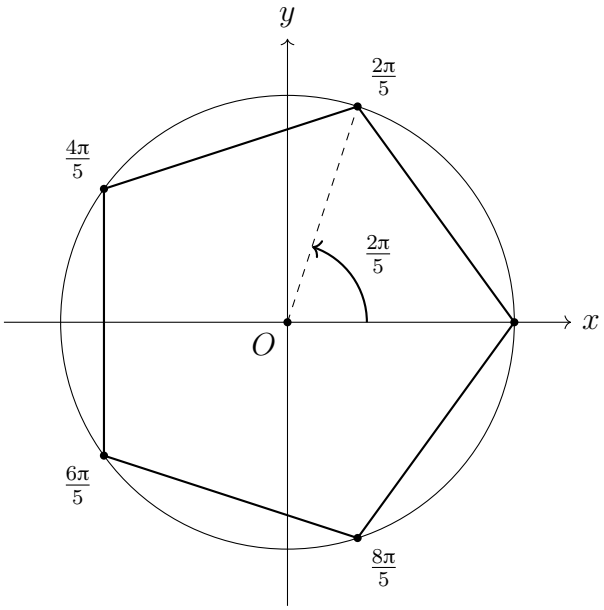
Thm. 13　有限群不可约表示次数的平方和定理

设 $\rho_1,\cdots,\rho_s$ 为有限群 G 在特征不整除 $|G|$ 的代数闭域 F 上的所有不等价的不可约表示, 则

$$|G|=\dim_F F[G]=\sum_{i=1}^{s}(\deg\rho_i)^2$$

Eg. 2　10 阶二面体群 D_5 的不可约复表示

设 r 为绕原点 O 旋转 $\dfrac{2\pi}{5}$, s 为关于 x 轴的反射, 则 $D_5=\langle r,s\mid r^5=s^2=\mathrm{id},srs=r^{-1}\rangle$



1. D_5 有 4 个共轭类 $\{\mathrm{id}\}$, $\{r,r^4\}$, $\{r^2,r^3\}$, $\{s,rs,r^2s,r^3s,r^4s\}$. 因此 D_5 的不等价的不可约表示有 4 个.

2. 求所有 1 次复表示: 由于 $[D_5:\langle r\rangle]=|D_5/\langle r\rangle|=|D_5|/|\langle r\rangle|=2$, 因此 $\langle r\rangle\triangleleft D_5$,

$|D_5/\langle 5\rangle| = 2$, 从而 $D_5/\langle r\rangle$ 为 Abel 群. 换位子群 $D_5' \subseteq \langle r\rangle$, 由于 $|\langle r\rangle| = 5$, $D_5' = \langle r\rangle$. 于是 $D_5/D_5' = D_5/\langle r\rangle \cong C_2$ 有两个 1 次复表示 $\overline{\rho}_0, \overline{\rho}_1$, 其中 $\overline{\rho}_1 : s^l\langle r\rangle \mapsto \zeta_2^l = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi l}$, 即 $\overline{\rho}_1(\langle r\rangle) = 1$, $\overline{\rho}_1(s\langle r\rangle) = -1$. 提升得到 D_5 的两个 1 次复表示: 主表示 ρ_0 与 ρ_1, 有

$$\rho_1(r^i) = 1 \qquad \rho_1(r^i s) = -1 \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$$

3. 求所有 $\deg > 1$ 的复表示: 由于 $|D_5| = 10 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2$, 因此 D_2 还有两个 2 次不可约复表示. r, s 在基 e_x, e_y 下的矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{5} & -\sin\frac{2\pi}{5} \\ \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

取一个 2 维复线性空间 V, 设 V 上线性变换 $\rho_2(r), \rho_2(s)$ 在 V 的基 α_1, α_2 下的矩阵分别为 A, B, 于是 $\rho_2(r), \rho_2(s) \in \mathrm{GL}(V)$. 令

$$\rho_2(r^i s^j) = \rho_2(r)^i \rho_2(s)^j \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4; j = 0, 1)$$

则 ρ_2 为 D_5 的一个 2 次复表示. 由于 ρ_2 忠实, 从而不可约.

定义自同构 $\gamma : D_5 \to D_5$, $r^i s^j \mapsto r^{2i} s^j$. 令 ρ_3 为 ρ_2 通过 γ 的挠表示 $\rho_3 = \rho_2^\gamma = \rho_2\gamma$, 则 ρ_3 为 D_5 的一个 2 次不可约复表示. 假设 $\rho_3 \approx \rho_2$, 则有 $R_3 \approx R_2$, 即存在 2 阶可逆复矩阵 S, 使得 $R_3(r^i s^j) = SR_2(r^i s^j)S^{-1}$. 取 $i = 1, j = 0$, 则 $R_3(r) = SR_2(r)S^{-1}$. 由于 $\operatorname{tr} R_3(r) = 2\cos\dfrac{4\pi}{5} \neq \operatorname{tr} R_2(r) = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$, 矛盾, 从而 $\rho_3 \not\approx \rho_2$.

综上, D_5 的所有不等价的不可约复表示为 $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$.

3 特征标

3.1 群与群代数的特征标

Lem. 1 相似不变量

行列式 $\det A$, 秩 $\operatorname{rank} A$, 迹 $\operatorname{tr} A$, 特征多项式 $\det(\lambda I - A)$, 最小多项式 $m(\lambda)$, 特征值 λ_i 及其重数, $\cdots$ 其中迹为最易计算的相似不变量.

Def. 1 特征标

设 (ρ, V) 为群 G 的一个 F-表示, 在 G 上定义函数: $\forall g \in G$,

$$\chi_\rho(g) := \operatorname{tr} \rho(g)$$

称 χ_ρ 为 G 的表示 ρ 提供的特征标 (character).

Prop. 1 特征标的次数

设 ρ 为群 G 的 F-表示, 则 $\chi_\rho(1_G) = 1_F \deg \rho$

Pf $\chi_\rho(1_G) = \operatorname{tr} \rho(1_G) = \operatorname{tr} \mathrm{id}_V = 1_F \dim_F V = 1_F \deg \rho$

Def. 2 类函数

群 G 上的 F-值函数 f 若对于任给的 $x \in G$, 有 $\forall g \in G$,

$$f(gxg^{-1}) = f(x)$$

则称 f 为 G 的一个类函数 (class function).

不可约表示的次数的其他限制条件? 高次表示的不可约性的判别方法? 不等价的判别方法?

3.2 不可约特征标的正交关系

3.3 不可约复表示的次数

4 张量积

4.1 模的张量积

4.2 群表示的张量积

4.3 群直积的表示

5 无限群表示论

5.1 拓扑空间

Def. 1 拓扑, 拓扑空间