

Linear Algebra

线性代数

Version 2026.8.6

容与

https://rongyu221104.github.io/

rongyu221104@163.com

Typeset with LaTeX

目录

映射与集合论基础 **4**

0.1 映射 4

0.1.1 映射的定义 4

0.1.2 特殊映射 4

0.1.3 映射的运算 5

0.2 集合 5

0.2.1 集合的运算 5

0.2.2 集合的划分与等价关系 6

0.2.3 数域 7

0.2.4 代数系统 7

1 线性空间 **8**

1.1 线性空间及其子空间 8

1.1.1 线性空间的定义、例子、简单性质 8

1.1.2 线性子空间 9

1.2 向量组的线性结构 10

1.2.1 向量组的线性相关性 10

1.2.2 极大线性无关组 11

1.2.3 向量组的等价 12

1.2.4 向量组的秩 12

1.3 线性空间的基与维数 14

1.3.1 线性空间的基 14

1.3.2 线性空间的维数 15

1.4 矩阵的秩 16

1.4.1 矩阵的秩的定义与性质 16

1.4.2 满秩矩阵 19

1.5 线性方程组的解集的结构 19

1.5.1 矩阵的秩在判定线性方程组的解的应用 19

1.5.2 齐次线性方程组的解集的结构 19

1.5.3 非齐次线性方程组的解集的结构 21

1.6 子空间的运算 21

1.6.1 子空间的交与和 21

1.6.2 子空间的直和 22

1.6.3 补空间 24

1.7 线性空间的同构 24

1.7.1 同构映射与线性空间的同构 24

1.7.2 线性空间的同构类与划分 25
1.8 商空间 26

2 线性映射 **28**
2.1 线性映射及其运算 28
2.1.1 线性映射的定义 28
2.1.2 线性映射的运算律 29
2.1.3 投影 30
2.2 线性映射的核与像 30
2.3 线性映射的矩阵表示 32
2.3.1 线性映射在一个基下的矩阵 32
2.3.2 线性映射空间与矩阵空间的关系 34
2.3.3 相似矩阵与不变量 34
2.3.4 线性变换在不同基下的矩阵 35
2.3.5 向量在线性映射下像的坐标 36
2.4 矩阵对角化及特征值与特征向量 36
2.4.1 线性变换的特征值与特征向量 37
2.4.2 矩阵的特征值与特征向量 37
2.4.3 线性变换可对角化的条件 39
2.4.4 矩阵的对角化 41
2.5 不变子空间与线性变换的多项式 41
2.5.1 不变子空间的定义与例子 41
2.5.2 线性变换的分块对角矩阵表示 42
2.5.3 零化多项式与 Hamilton-Cayley 定理 42
2.5.4 最小多项式 45
2.5.5 幂零变换 46
2.6 Jordan 标准型 47
2.6.1 幂零变换的 Jordan 标准型 47
2.6.2 线性变换与矩阵的 Jordan 标准型 50
2.7 线性函数与对偶空间 51

3 具有度量的线性空间 **54**
3.1 双线性函数 54
3.1.1 双线性函数的概念与性质 54
3.1.2 矩阵的合同 56
3.1.3 非退化双线性函数 56
3.1.4 对称和斜对称双线性函数 57
3.2 实内积空间的结构 58
3.2.1 实线性空间的内积 58

3.2.2 实内积空间的度量 . . . 58
3.2.3 欧几里得空间的标准正交基与正交矩阵 . . . 60
3.2.4 实内积空间的子空间与正交直和分解 . . . 62
3.2.5 实内积空间的同构 . . . 64
3.3 实内积空间上的变换 . . . 65
3.3.1 正交变换 . . . 65
3.3.2 对称变换与实对称矩阵 . . . 67
3.4 酉空间的结构及其上变换 . . . 69
3.4.1 酉空间的内积与度量 . . . 69
3.4.2 有限维酉空间的标准正交基与酉矩阵 . . . 71
3.4.3 酉空间的正交直和分解与同构 . . . 72
3.4.4 酉变换 . . . 73
3.4.5 Hermite 变换 . . . 74
3.5 正交空间与辛空间 . . . 75
3.5.1 Lorentz 变换 . . . 75
3.5.2 Minkowski 空间 . . . 76
3.5.3 正交空间 . . . 76
3.5.4 辛空间 . . . 76
3.6 对易与李代数 . . . 77

4 多项式 77
4.1 一元多项式环 . . . 77
4.1.1 一元多项式及其运算 . . . 77
4.1.2 环的概念及其性质 . . . 78
4.1.3 子环的概念及其判定 . . . 79
4.1.4 一元多项式环的通用性质 . . . 80
4.2 n 元多项式环及其通用性质 . . . 80

5 多重线性代数 81
5.1 多重线性映射 . . . 81
5.2 线性空间的张量积 . . . 82
5.3 张量代数 . . . 82
5.4 外代数 . . . 82

映射与集合论基础

0.1 映射

0.1.1 映射的定义

Def. 1 映射、像、原像、定义域、陪域、值域 (像集)

设 A 与 B 是两个非空集合, 如果存在一个对应法则 f, 使得 A 中每一个元素 a, 均对应 B 中唯一确定的元素 b, 则称 f 是 A 到 B 的一个映射, 记作:

$$f : A \longrightarrow B, a \mapsto b$$

称 b 为 a 在 f 下的像, 记作 $f(a)$, 称 a 为 b 在 f 下的一个原像; 称 A 为定义域, B 为陪域, f 的值域 (像集 $\operatorname{Im} f$) 为 $\underset{\operatorname{Im} f}{f(A)} = \{f(a) \mid a \in A\}$.

Def. 2 映射的相等

对于两个映射 f, g, 满足: $f : A \to B$, $g : A \to B$, 且 $f(a) = g(a)$, $\forall a \in A$, 则称 f 与 g 相等, 记作 $f = g$.
三要素: 定义域相同, 陪域相同, 对应法则相同.

0.1.2 特殊映射

Def. 3 满射

若 $f(A) = B$, 则称 f 为一个满射.
$\forall b \in B, \exists a \in A, b = f(a)$

Def. 4 单射

若 A 中不同元素在 f 下的像不同, 则称 f 是一个单射.
Pf 证明方法: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ 或 $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

Def. 5 双射

若 f 既是单射, 又是满射, 则称 f 是一个双射, 又称一一对应

Def. 6 函数

函数是一种特殊的映射, 将映射的陪域限制到数集 (数域的一个非空子集), 则称这个映射为函数.
传统函数要求定义域与陪域均为数集, 而泛函拓展了函数的定义, 将函数的定义域推广到函数空间.

0.1.3 映射的运算

Def. 7 映射的复合 (乘法)

设两个映射 $f : A \to B$ 和 $g : B \to C$, 令 $(g \circ f)(a) = g(f(a)),\ \forall a \in A$, 则称 $g \circ f$ 为映射的复合, 又称映射的乘法.

Prop. 1 映射复合的性质

1. 设映射 $h : C \to D$, 则有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, 即映射的复合满足结合律
2. 映射的复合不满足交换律

Def. 8 恒等变换

若 $f : A \to A, a \mapsto a$, 则称 f 为 A 上的恒等变换, 记作 $\mathcal{I}_A$

Prop. 2 恒等变换的性质

设 $f : A \to B$, 则 $f \circ \mathcal{I}_A = f,\ \mathcal{I}_B \circ f = f$

Def. 9 可逆映射

设 $f : A \to B$, 如果存在 $g : B \to A$, 使得 $g \circ f = \mathcal{I}_A$ 且 $f \circ g = \mathcal{I}_B$, 则称 f 是可逆映射, 将 g 称为 f 的逆映射, 记作 f^{-1}, 有:

$$f^{-1} \circ f = \mathcal{I}_A \text{ 且} f \circ f^{-1} = \mathcal{I}_B$$

Prop. 3 可逆映射的性质

1. 若 f 是可逆映射, 则 f 的逆映射唯一
2. 可逆映射 f 的逆映射 f^{-1} 也是可逆映射, 且 $(f^{-1})^{-1} = f$

0.2 集合

0.2.1 集合的运算

Def. 10 笛卡尔积、二元代数运算

对于两个非空集合 S 与 M, 有序元素对组成的集合:

$$S \times M := \{(a, b) \mid a \in S, b \in M\}$$

称为 S 与 M 的笛卡尔积.
对于一个非空集合 S, $S \times S$ 到 S 的一个映射称为 S 上的一个二元代数运算

0.2.2 集合的划分与等价关系

Def. 11 集合的划分

如果一个集合 S 为其一些非空子集的并集, 且每两个不相等的子集的交为空集 (称为不相交), 则称这些子集组成的集合为 S 的一个划分.

Def. 12 二元关系的定义

设 S 是一个非空集合, 将 $S \times S$ 的一个子集 W 称为 S 上的一个二元关系.
若 $(a,b) \in W$, 则称 a 与 b 有 W 关系, 记作 $a \sim b$; 若 $(a,b) \notin W$, 则称 a 与 b 没有 W 关系

Def. 13 等价关系

S 上的一个二元关系 $\sim$, 如果满足:

1. $a \sim a$, $\forall a \in S$ (反身性);
2. 若 $a \sim b$, 则 $b \sim a$ (传递性);
3. 若 $a \sim b$ 且 $b \sim c$, 则 $a \sim c$ (传递性),

则称 $\sim$ 为 S 上的一个等价关系.

Def. 14 等价类

设 $\sim$ 是 S 上的一个等价关系, $\forall a \in S$, 令 $\overline{a} := \{x \in S \mid x \sim a\}$, 将 $\overline{a}$ 称为 a 的一个等价类, 等价关系可以表达为:

$$x \sim a \Longleftrightarrow x \in \overline{a}$$

Def. 15 等价类的代表

根据等价关系的反身性, $a \sim a$, 于是 $a \in \overline{a}$, 称 a 为 $\overline{a}$ 的一个代表

Prop. 4 等价类的性质

1. $\overline{a} = \overline{b} \Longleftrightarrow a \sim b$
2. 若 $\overline{a} \neq \overline{b}$, 则 $\overline{a} \cap \overline{b} = \varnothing$

Prop. 5 等价关系与划分的关系

如果集合 S 有一个等价关系 $\sim$, 则所有等价类组成的集合, 是 S 的一个划分.
反之, 如果集合 S 有一个划分, 则一定可以在 S 上建立一个等价关系, 使得这个划分是由所有等价类组成的.

Pf $\bigcup\limits_{a \in S} \overline{a} := \{x \in S \mid \exists c \in S \text{ s.t. } x \in \overline{c}\} \subseteq S$, $\forall b \in S$, 由于 $b \in \overline{b}$, 因此 $b \in \bigcup\limits_{a \in S} \overline{a}$, 从而

$S \subseteq \bigcup\limits_{a\in S} \overline{a}$, 于是 $\bigcup\limits_{a\in S} \overline{a} = S$, 再结合性质 2 得证.

0.2.3 数域

Def. 16 数域

复数集的一个非空子集 K 如果满足:

(1) $0, 1 \in K$

(2) $a, b \in K \Longrightarrow a \pm b, ab \in K$; $a, b \in K, b \neq 0 \Longrightarrow \dfrac{a}{b} \in K$

则称 K 是一个数域

Eg. 1 数域的例子

有理数域 $\mathbb{Q}$、实数域 $\mathbb{R}$、复数域 $\mathbb{C}$、$\cdots$.

有理数域 $\mathbb{Q}$ 为最小的数域, 复数域 $\mathbb{C}$ 是最大的数域.

0.2.4 代数系统

Def. 17 代数系统

一个非空集合, 如果定义了代数运算 (即该集合与自身的笛卡尔积到自身的映射), 并且满足一定的运算法则, 则称这个集合为一个代数系统.

1 线性空间

1.1 线性空间及其子空间

1.1.1 线性空间的定义、例子、简单性质

Def. 1 线性空间

设 V 是一个非空集合, F 是一个域. 如果 V 上有一个运算:

$$V \times V \longrightarrow V,\ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \mapsto \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$$

称为加法; F 与 V 之间有一个运算:

$$F \times V \longrightarrow V,\ (k, \boldsymbol{\alpha}) \mapsto k\boldsymbol{\alpha}$$

称为数量乘法; 且满足下述八条运算法则:
1. $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha},\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$ (加法交换律).
2. $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}),\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in V$ (加法结合律).
3. V 中有一个元素 $\mathbf{0}$, 满足 $\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha},\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$ (有零元).
4. 对于 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 有 $\boldsymbol{\beta} \in V$, 使得 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = 0$ (有负元).
5. $1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha},\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$ (有单位元).
6. $(kl)\boldsymbol{\alpha} = k(l\boldsymbol{\alpha}),\ \forall k, l \in F, \boldsymbol{\alpha} \in V$ (数乘结合律).
7. $(k + l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\alpha},\ \forall k, l \in F, \boldsymbol{\alpha} \in V$ (数乘对域加法的分配率).
8. $k(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\beta},\ \forall k \in F, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$ (数乘对向量加法的分配律)

那么称 V 为域 F 上的一个线性空间.
把 V 中的元素称为一个向量, 线性空间又可称为向量空间.

Eg. 1 线性空间的例子

eg1. 几何空间: {以定点 O 为起点的所有向量}.
eg2. 数域 K 上的 n 维向量空间 $K^n := \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in K, i = 1, 2, \cdots, n\}$, $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为一个 n 维向量.
eg3. $\mathbb{R}^X$:={非空集合 X 到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射}, 规定:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x),\ (kf)(x) := kf(x),\ \text{零函数: } 0(x) := 0,\ \forall x \in X$$

易证 $\mathbb{R}^X$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间, 也是一个函数空间.
非空集合 X 到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射, 称为 X 上的一个实值函数, 其像一定属于一个数集, 即数域的子集, 其原像则不要求属于数集 (泛函).

Prop. 1　线性空间的性质

设域 F 上的一个线性空间 V

1. V 的零元唯一
2. $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元唯一, $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$
3. $0\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$
4. $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\forall k \in F$
5. 若 $k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 则 $k = 0$ 或 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, $\forall k \in F, \boldsymbol{\alpha} \in V$
6. $(-1)\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}$, $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$

1.1.2　线性子空间

Def. 2　线性子空间

设 V 是域 F 上的一个线性空间, U 是 V 的一个非空子集, 如果 U 对于 V 的加法和数量乘法也成为域 F 上的一个线性空间, 那么称 U 为 V 的一个线性子空间, 简称为子空间. $\{\mathbf{0}\}$ 为 V 的一个子空间, 称为零子空间.

Prop. 2　子空间判定定理

设 U 是域 F 上线性空间 V 的一个非空子集, 则 U 是 V 的子空间的充要条件为: U 对于 V 的加法和数量乘法均封闭, 即

$$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in U \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in U$$

$$k \in F, \boldsymbol{\alpha} \in U \Rightarrow k\boldsymbol{\alpha} \in U$$

Def. 3　生成子空间

若 V 给出一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 包含 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的子空间一定包含 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 所有线性组合所组成的集合. 令 $W := \{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \mid k_1, \cdots, k_s \in F\}$, W 是 V 的一个子空间, 称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 生成的子空间, 记作 $\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \rangle$.

Def. 4　线性表出

$\boldsymbol{\beta} \in \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \rangle \Longleftrightarrow$ 存在一组数 $l_1, \cdots, l_s$, 使得 $\boldsymbol{\beta} = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + l_s\boldsymbol{\alpha}_s$, 此时称 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

Prop. 3　基于线性表出与子空间的线性方程组有解判定定理

设数域 K 上 n 元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

$$令\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}$$

线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}$ 有解
$\Longleftrightarrow$ 存在 K 中一组数 $c_1, \cdots, c_n$, 使得 $c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}$
$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{\beta}$ 可以由列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出
$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{\beta} \in \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \rangle$

1.2　向量组的线性结构

1.2.1　向量组的线性相关性

Def. 5　线性相关与线性无关

设 V 是域 F 上的一个线性空间, V 中的一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (s \geq 1)$, 如果有一组不全为 0 的数 $k_1, \cdots, k_s$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.
如果从 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$ 可以推出 $k_1 = \cdots = k_s = 0$, 那么称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

Prop. 4　基于列向量组线性相关性的齐次线性方程组解判定定理

K^s 中, 列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关
$\Longleftrightarrow$ 存在 K 中一组不全为 0 的数 $c_1, \cdots, c_n$, 使得 $c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{\alpha}_n$
$\Longleftrightarrow$ K 上 n 元齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$ 有非零解.
K^s 中, 列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关
$\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$ 只有零解.

Prop. 5　基于行列式的线性相关性判定定理

K^n 中, 列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为列向量组的矩阵的行列式等于 0, 即 $\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix} = 0$

K^n 中, 列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关 $\Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}\neq 0$

Prop. 6　基于向量组线性相关性表出方式唯一判定定理

设 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 其表出方式唯一 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

Prop. 7　向量组线性相关与线性无关的性质

1. 一个向量组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 存在 $k\neq 0$ 使得 $k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\Longleftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$
   从而, $\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关 $\Longleftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$
2. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 有一个部分组线性相关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关
   如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的任何一个部分组都线性无关
3. 含有 $\mathbf{0}$ 的任何一个向量组都线性相关
4. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geq 2)$ 线性相关
   $\Longleftrightarrow$ 其中, 至少有一个向量, 可以由其余向量线性表出

   $$\text{设}k_i\neq 0,\text{则}\boldsymbol{\alpha}_i=-\frac{k_1}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-\frac{k_{i-1}}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}-\frac{k_{i+1}}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}-\cdots-\frac{k_s}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_s$$

   从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 其中每一个向量, 都不能由其余向量线性表出
5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出
6. 如果向量组线性无关, 则将每个向量添上 m 个分量, 所得到的延伸组也线性无关
   如果向量组线性相关, 则将每个向量去掉 m 个分量, 所得到的缩短组也线性相关

1.2.2　极大线性无关组

Def. 6　极大线性无关组

如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个部分组满足:
(1) 这个部分组线性无关;
(2) 从向量组的其余向量中 (若存在) 任取一个添入, 得到的新的部分组都线性相关;
则称这个部分组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组.

Thm. 1　向量组与其极大线性无关组的双向线性表出定理

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\leq s)$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中每一个向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中每一个向量也都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出

1.2.3 向量组的等价

Def. 7 向量组等价

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中每一个向量都可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表出, 则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表出.

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 可以相互线性表出, 则称这两个向量组等价, 记为 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\}$

Thm. 2 向量组与其极大线性无关组的等价性定理

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与其任意一个极大线性无关组等价

Prop. 8 向量组等价的性质

1. 每个向量组与自身等价 (反身性)
2. 若 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\}$, 则 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\}\cong\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ (对称性)
3. 若 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\}$, 且 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\}\cong\{\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t\}$, 则 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t\}$ (传递性)

   Pf 线性表出的传递性利用连加号交换次序

Thm. 3 极大线性无关组间的等价性定理

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的任意两个极大线性无关组等价

Prop. 9 基于子空间的向量组等价判定定理

生成子空间 $\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\rangle=\langle\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\rangle\iff\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\}$

1.2.4 向量组的秩

Lem. 1 基于向量个数的线性相关判定定理

设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 如果 $r>s$, 则 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 一定线性相关.

Pf

$$\text{设:}\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{s1}\boldsymbol{\alpha}_s\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_r=a_{1r}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{sr}\boldsymbol{\alpha}_s\end{cases},\ \text{令: } x_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+x_r\boldsymbol{\beta}_r=\mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}x_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+x_r\boldsymbol{\beta}_r&=x_1(a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{s1}\boldsymbol{\alpha}_s)+\cdots+x_r(a_{1r}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{sr}\boldsymbol{\alpha}_s)\\&=(a_{11}x_1+\cdots+a_{1r}x_r)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(a_{s1}x_1+\cdots+a_{sr}x_r)\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ 齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1r}x_r=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+\cdots+a_{sr}x_r=0 \end{cases}$ 由于 $s<r$, 方程组必有非零解. 取一组非零解 $k_1,\cdots,k_r$, 则 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_r=\mathbf{0}$, 因此 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性相关

Prop. 10　基于线性无关的向量个数判定定理 (替换定理)

设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 如果 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关, 则 $r\le s$.

Prop. 11　基于等价性与线性无关的向量个数判定定理

等价的线性无关的两个向量组, 所含向量的个数相等.

Pf　$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t$ 可以相互线性表出, 则有 $s\le m$ 且 $m\le s$.

Def. 8　向量组的秩

向量组的任意两个极大线性无关组, 所含向量的个数相等.

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的任意一个极大线性无关组, 所含向量的个数, 称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩 (rank), 记为 $\mathrm{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$.

只含 $\mathbf{0}$ 的向量组的秩, 规定为 0

Prop. 12　基于线性相关性的向量组的秩判定定理

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关 $\Longleftrightarrow \mathrm{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}=s$.

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关 $\Longleftrightarrow \mathrm{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}<s$

Prop. 13　基于线性表出的向量组的秩判定定理

若向量组 (I) 可以由向量组 (II) 线性表出, 则 $\mathrm{rank}(I)\le\mathrm{rank}(II)$

Prop. 14　基于等价性的向量组的秩判定定理

等价的向量组有相等的秩.

1.3 线性空间的基与维数

1.3.1 线性空间的基

Def. 9 线性空间子集的线性相关性

设 V 是域 F 上的一个线性空间.
将 V 的一个有限子集 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 线性相关 (线性无关), 定义为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关 (线性无关).
将 V 的一个无线子集 S 线性相关, 定义为 S 有一个有限子集线性相关; S 线性无关, 定义为 S 任何一个有限子集都线性无关 (极限是处理无限问题的有力工具, 但未定义距离便不可定义极限).
将空集 $\varnothing$ 定义为线性无关

Def. 10 线性空间的基

设 V 是数域 K 上的线性空间, V 的一个子集 S 如果满足: (1) S 线性无关; (2) V 中任一向量, 都可以由 S 中的有限个向量线性表出, 则称 S 为 V 的一个基.
若 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$, 则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 V 的一个有序基.
$\{\mathbf{0}\}$ 的一个基规定为 $\varnothing$.

Thm. 4 基存在定理

任何一个域 F 上的任何一个线性空间 V 都存在一个基.
Pf 证明需利用偏序集的概念与 Zorn 引理.

Def. 11 线性空间有限维与无限维

若 V 有一个是有限子集, 则称 V 是有限维的; 若 V 有一个基是无限维的, 则称 V 是无限维的

Prop. 15 基的维数不变性定理

若 V 是有限维的, 则 V 的任意两个基所含向量个数相等.
Pf 利用替换定理与基的双向线性表出.

Cor. 1

若 V 是无限维的, 则 V 的任何一个基都是无限子集

1.3.2 线性空间的维数

Def. 12 线性空间的维数

设 V 是有限维的, 则将 V 的一个基所含向量的个数, 称为 V 的维数, 记作 $\dim V$.
若 V 是无限维的, 则将 V 的维数记作 $\dim V = \infty$.
$\{\mathbf{0}\}$ 的维数为 0.

Prop. 16 基于维数的线性相关判定定理

设 $\dim V = n$, 则 V 中任意 $n+1$ 个向量都线性相关.

Def. 13 向量的坐标

设 $\dim V = n$, 取 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 则 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{\alpha}_n$, 且表出方式唯一, 将列向量 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标

Eg. 2 线性空间基与维数的例子

1. 几何空间中, 三个不共面的向量是一个基, 从而几何空间是 3 维的, 过定点 O 的平面 Π 是 2 维的, 过定点 O 的直线 l 是 1 维的

2. K^n 中, 向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 是一个基, 称为一个标准基, 任何一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Prop. 17　基判定定理

1. 设 $\dim V = n$, 则 V 中任意 n 个线性无关的向量都是 V 的一个基
2. 设 $\dim V = n$, 若 V 中每一个向量, 都可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一个基

   Pf　取一个基 $\boldsymbol{\delta}_1, \cdots, \boldsymbol{\delta}_n$, 则有 $n \leq \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\delta}_1, \cdots, \boldsymbol{\delta}_n\} \leq \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\} \leq n$

Thm. 5　基扩充定理

设 $\dim V = n$, 则 V 中任意一个线性无关的向量组, 都可以扩充成 V 的一个基.

Thm. 6　子空间的维数定理

设 $\dim V = n$, W 是 V 的一个子空间, 则 $\dim W \leq \dim V$.
Pf　利用基的扩充.

Cor. 2

若 $\dim W = \dim V$, 则 $W = V$

Def. 14　极大线性无关集

设 V 是域 F 上的一个线性空间, V 的一个子集 S 如果满足: (1) S 线性无关; (2) 对于 $\boldsymbol{\beta} \notin S$(若存在), 有 $S \cup \{\boldsymbol{\beta}\}$ 线性相关, 则称 S 是 V 的一个极大线性无关集

Prop. 18　基于极大线性无关集的基判定定理

S 是 V 的一个基 $\overset{V\neq\varnothing}{\Longleftrightarrow}$ S 是 V 的一个极大线性无关集.
若将基定义为极大线性无关集, 则可以推出 $\varnothing$ 为 $\{\mathbf{0}\}$ 的一个基

Thm. 7　生成子空间的基与维数定理

$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \rangle := \{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \mid k_1, \cdots, k_s \in K\}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1 \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组, 是 $\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \rangle$ 的一个基, 且 $\dim\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \rangle = \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$

1.4　矩阵的秩

1.4.1　矩阵的秩的定义与性质

Def. 15　矩阵的行 (列) 秩、行 (列) 空间

数域 K 上的 $s \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$, 行向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_s \in K^n$, 列向量

组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n \in K^s$, 称行向量组的秩 $\mathrm{rank}\{\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s\}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行秩, 称列向量组的秩 $\mathrm{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列秩; 称行向量组生成的子空间 $\langle\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s\rangle$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行空间, 称 $\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\rangle$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列空间; 从而有:

$$\mathrm{rank}\{\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s\}=\dim\langle\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s\rangle,\mathrm{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}=\dim\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\rangle$$

Prop. 19　阶梯型矩阵的秩与极大线性无关组判定定理

数域 K 上的 $s\times n$ 阶梯型矩阵 J, 设 J 的非 0 行个数为 r (有 r 个主元), 则 J:

$$\text{行秩}=\text{列秩}=r$$

且 J 的主元所在的列, 构成 J 的列向量组的一个极大线性无关组.

Pf　设 J 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 列向量为 $\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s$

$$\mathrm{J}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&c_{1j_1}&\cdots&c_{1j_2}&\cdots&c_{1j_r}&\cdots&c_{1n}\\0&\cdots&0&0&\cdots&c_{2j_2}&\cdots&c_{2j_r}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&0&\cdots&0&\cdots&c_{rj_r}&\cdots&c_{rn}\\0&\cdots&0&0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

$$c_{1j_1}c_{2j_2}\cdots c_{rj_r}\neq 0\Longrightarrow\begin{vmatrix}c_{1j_1}&c_{1j_2}&\cdots&c_{1j_r}\\0&c_{2j_2}&\cdots&c_{2j_r}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&c_{rj_r}\end{vmatrix}\neq 0\Longrightarrow\begin{pmatrix}c_{1j_1}\\bm0\\\vdots\\bm0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_{1j_2}\\c_{2j_2}\\\vdots\\bm0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}c_{1j_r}\\c_{2j_r}\\\vdots\\c_{rj_r}\end{pmatrix}\text{ 线性无关}$$

$$\Longrightarrow\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}\text{(延伸组) 线性无关}\Longrightarrow\mathrm{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}\}=r$$

$$\text{且}r=\dim\langle\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}\rangle\leq\dim\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\rangle=\dim\{\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_r\\bm0\\\vdots\\bm0\end{pmatrix}\mid a_i\in K\}=r$$

Prop. 20　初等行变换下的行秩不变性定理

矩阵的初等行变换, 不改变矩阵的行秩

Pf　矩阵 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\textcircled{j}+\textcircled{i}k} \boldsymbol{B}$,

$$\text{列向量组: } \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_i, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_j, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_s \longrightarrow \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_i, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_j + k\boldsymbol{\gamma}_i, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_s$$

由于 $\boldsymbol{\gamma}_j = (\boldsymbol{\gamma}_j + k\boldsymbol{\gamma}_i) + (-k\boldsymbol{\gamma}_i)$, 因此两个列向量组等价, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的行秩 $= \boldsymbol{B}$ 的行秩

易证, 另外两种初等行变换: $\boldsymbol{A} \xrightarrow{(\textcircled{i},\textcircled{j})} \boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\textcircled{i}\cdot l} \boldsymbol{D}, l \neq 0$ 均不改变矩阵的行秩.

Prop. 21　初等行变换下的列秩不变性定理

矩阵的初等行变换, 不改变矩阵列向量组的线性相关性, 从而不改变矩阵的列秩.

设矩阵 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \boldsymbol{B}$, 若 $\boldsymbol{B}$ 的第 $j_1, \cdots, j_r$ 列构成列向量组的一个极大线性无关组, 则 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j_1, \cdots, j_r$ 列构成 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大线性无关组.

Prop. 22　矩阵的秩定理

对任何一个矩阵: 行秩 $=$ 列秩.

Pf　$\boldsymbol{A}$ 行秩 $=$ J 的行秩 $=$ J 的列秩 $=$ $\boldsymbol{A}$ 的列秩

Def. 16　矩阵的秩

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩与列秩, 统称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 记作 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.

Meth. 1　求矩阵的秩

设矩阵 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ J, 则

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \text{ J 的非 0 行个数} r$$

并且, 若 J 的主元在第 $j_1, \cdots, j_r$ 列, 则 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j_1, \cdots, j_r$ 列构成 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大线性无关组.

Prop. 23　转置矩阵的秩判定定理

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^T$, 有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^T)$

Prop. 24　初等列变换下的秩不变性定理

矩阵的初等列变换不改变矩阵的秩

Prop. 25　基于子式阶数的矩阵的秩判定定理

$s \times n$ 的非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 等于 $\boldsymbol{A}$ 的不为 0 的子式的最高阶数.

Cor. 3

设 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=r$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的不为 0 的 r 阶子式所在的列 (行) 是 $\boldsymbol{A}$ 的列 (行) 向量组的一个极大线性无关组

1.4.2 满秩矩阵

Def. 17 满秩矩阵

设 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$, 若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=n$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵

Prop. 26 基于行列式的满秩矩阵判定定理

n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是满秩矩阵 $\Longleftrightarrow \det(\boldsymbol{A})\neq 0$.

Pf $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=n \Longrightarrow \boldsymbol{A}$ 的不为 0 的子式的最高阶数为 n

1.5 线性方程组的解集的结构

1.5.1 矩阵的秩在判定线性方程组的解的应用

Prop. 27 基于矩阵的秩的线性方程组的解判别定理

数域 K 上的 n 元线性方程组有解 $\Longleftrightarrow$ 增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 与系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩相等.

当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=n$ 时, 方程组有唯一解; 当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})<n$ 时, 方程组有无穷多个解.

Cor. 4

数域 K 上 n 元齐次线性方程组有非零解 $\Longleftrightarrow \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})<n$

Pf $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$ 有解 $\Longleftrightarrow \dim\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}\rangle=\dim\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\rangle$ $\Longleftrightarrow \mathrm{rank}(\tilde{\boldsymbol{A}})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$; 有唯一解 $\Longleftrightarrow \tilde{\boldsymbol{A}}$ 经过初等行变换化成的阶梯形矩阵的非 0 行个数 $r=\mathrm{rank}(\tilde{\boldsymbol{A}})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=n$

1.5.2 齐次线性方程组的解集的结构

Def. 18 解空间

数域 K 上 n 元齐次方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$ 的解集记作 W, 设方程组有非零解, $W\subseteq K^n$, 满足: (1) 若 $\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}\in W$, 则 $\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\delta}\in W$; (2) 若 $\boldsymbol{\gamma}\in W, k\in K$, 则 $k\boldsymbol{\gamma}\in W$, 从而 W 是 K^n 的一个子空间, 称 W 为齐次线性方程组的一个解空间

Def. 19 基础解系

设 $\mathrm{rank}(A)=r<n$, $\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ J,于是 J 有 r 个主元, 不妨设主元在前 r 列, 则方程组的

一般解为:

$$\begin{cases} x_1 = -b_{1,r+1}x_{r+1} - b_{1,r+2}x_{r+2} - \cdots - b_{1,n}x_n \\ x_2 = -b_{2,r+1}x_{r+1} - b_{2,r+2}x_{r+2} - \cdots - b_{2,n}x_n \\ \vdots \\ x_r = -b_{r,r+1}x_{r+1} - b_{r,r+2}x_{r+2} - \cdots - b_{r,n}x_n \end{cases}$$

让自由未知量 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 分别取 $n-r$ 组数 $\begin{pmatrix} 1 \\ bm0 \\ \vdots \\ bm0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ bm1 \\ \vdots \\ bm0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ bm0 \\ \vdots \\ bm1 \end{pmatrix}$, 得到方程组的 $n-r$ 个解: $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ -b_{2,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ bm1 \\ bm0 \\ \vdots \\ bm0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -b_{1,r+2} \\ -b_{2,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r,r+2} \\ bm0 \\ bm1 \\ \vdots \\ bm0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n} \\ -b_{2,n} \\ \vdots \\ -b_{r,n} \\ bm0 \\ bm0 \\ \vdots \\ bm0 \end{pmatrix}$ 线性无关 (延伸组), 任取 W 中的一个解向量 $\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \\ c_{r+1} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_{r+1}\boldsymbol{\eta}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{\eta}_{n-r}$, 因此 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是解空间的一个基, 将解空间的一个基称为齐次线性方程组的一个基础解系

设 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是齐次线性方程组的一个基础解系, 则其全部解为

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}, k_i \in K$$

.

Thm. 8　解空间的维数公式

解空间 W 的维数:

$$\dim W = n - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$$

1.5.3 非齐次线性方程组的解集的结构

数域 K 上 n 元非齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0})$, 其解集记作 U, 相应的齐次线性方程组的解集记作 W, 满足: (1) 若 $\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}\in U$, 则 $\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\delta}\in W$; (2) 若 $\boldsymbol{\gamma}\in U,\boldsymbol{\eta}\in W$, 则 $\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\eta}\in U$.

设 $\boldsymbol{\gamma}_0\in U$, 称 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 为非齐次线性方程组的一个特解, 则

$$U=\boldsymbol{\gamma}_0+W:=\{\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}\mid\boldsymbol{\eta}\in W\}$$

易得, U 不是 K^n 的子空间.

称 $U=\boldsymbol{\gamma}_0+W$ 为一个 W 型的线性流形, 或称 W 的一个陪集.

设 W 的一个基为 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$, 则非齐次线性方程组的全部解为

$$\boldsymbol{\gamma}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-r}+\boldsymbol{\eta}_{n-r},\ k_i\in K,\boldsymbol{\gamma}_0\text{ 是一个特解}$$

.

1.6 子空间的运算

1.6.1 子空间的交与和

Thm. 9 交的子空间保持性定理

设 V 是域 F 上的一个线性空间, V_1,V_2 都是 V 的子空间, 则 $V_1\cap V_2$ 是 V 的一个子空间

Prop. 28 子空间的交的性质

1. $V_1\cap V_2=V_2\cap V_1$ (交换律)
2. $(V_1\cap V_2)\cap V_3=V_1\cap(V_2\cap V_3)$ (结合律)
   由此可以定义多个子空间的交: $\bigcap\limits_{i=1}^{s}V_i:=V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_s$, 多个子空间的交也是 V 的一个子空间
3. $V_1\cup V_2$ 不是一个子空间, 而 V_1+V_2 是包含 $V_1\cup V_2$ 的最小子空间

Def. 20 子空间的和

设 V_1,V_2 都是 V 的子空间, 令 $V_1+V_2:=\{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\mid\boldsymbol{\alpha}_1\in V_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V_2\}$, 则称 V_1+V_2 为 V_1 与 V_2 的和, 易得 V_1+V_2 是 V 的一个子空间.

Prop. 29 子空间的和的性质

1. $V_1+V_2=V_2+V_1$ (交换律)
2. $(V_1+V_2)+V_3=V_1+(V_2+V_3)$ (结合律)

由此可以定义多个子空间的和: $\sum_{i=1}^{s} V_i := V_1 + V_2 + \cdots + V_s$, 多个子空间的和也是 V 的一个子空间

Thm. 10　生成子空间的和的基本定理

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \rangle + \langle \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r \rangle$$

Thm. 11　子空间的维数公式

设 V_1, V_2 都是 V 的有限维子空间, 则 $V_1 \cap V_2$ 与 $V_1 + V_2$ 也都是有限维的, 且:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

.

Cor. 5

$V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\} \iff \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

Pf　$V_1 \cap V_2$ 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, 扩充为 V_1 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$ 与 V_2 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$, 则 $V_1+V_2 = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m} \rangle + \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{n_2-$
$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}, \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{n_2-m} \rangle$
设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} + q_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \cdots + q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m} = \mathbf{0}$
$\Longrightarrow q_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \cdots + q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m} = -k_1\boldsymbol{\alpha}_1 - \cdots - k_m\boldsymbol{\alpha}_m - p_1\boldsymbol{\beta}_1 - \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m}$
左边向量属于 V_1, 右边向量属于 V_2, 从而两边向量均属于 $V_1 \cap V_2$
$\Longrightarrow q_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \cdots + q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m} = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + l_m\boldsymbol{\alpha}_m$
$\Longrightarrow \mathbf{0} = q_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \cdots + q_{n_2-m}\boldsymbol{\gamma}_{n_2-m} - l_1\boldsymbol{\alpha}_1 - \cdots - l_m\boldsymbol{\alpha}_m \in V_2$
$\Longrightarrow l_1 = \cdots = l_m = q_1 = \cdots = q_{n_2-m} = 0$
$\Longrightarrow \mathbf{0} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m + p_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + p_{n_1-m}\boldsymbol{\beta}_{n_1-m} \in V_1$
$\Longrightarrow k_1 = \cdots = k_m = p_1 = p_{n_1-m} = 0$
$\Longrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n_1-m}, \boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{n_2-m}$ 线性无关 $\Longrightarrow \dim V_1 + V_2 = n_1 + n_2 - m.$

1.6.2　子空间的直和

Def. 21　子空间的直和

设 V_1, V_2 是 V 的子空间, 若 V_1+V_2 中的每个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示成 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_1 \in V_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in V_2$ 的表法唯一, 则称和 $V_1 + V_2$ 为直和, 记作 $V_1 \oplus V_2$.

Prop. 30　直和判定定理

设 V_1, V_2 是 V 的子空间, 则 V_1+V_2 是直和的充要条件有:

1. V_1+V_2 中 $\mathbf{0}$ 表法唯一, 即 $\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2 \Longrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$ 且$\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$;
2. $V_1 \cap V_2=\{\mathbf{0}\}$;
3. V_1 的一个基 S_1 与 V_2 的一个基 S_2 的并集 $S_1 \cup S_2$ 是 $V_1 \cup V_2$ 的一个基

   Pf　任取 $S_1 \cup S_2$ 的一个有限子集 $\{\boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_t, \boldsymbol{\delta}_1, \cdots, \boldsymbol{\delta}_r\}$, $\boldsymbol{\gamma}_i \in S_1, \boldsymbol{\delta}_j \in S_2$, 设 $(k_1\boldsymbol{\gamma}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\gamma}_t)+({}_1\boldsymbol{\delta}_1+\cdots+l_r\boldsymbol{\delta}_r)=\mathbf{0}$, 根据 (2) 可得 $k_1=\cdots=k_t={}_1=\cdots=l_r=0$, 因此 $\{\boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_t, \boldsymbol{\delta}_1, \cdots, \boldsymbol{\delta}_r\}$ 线性无关, 从而 $S_1 \cup S_2$ 线性无关; 任取 V_1+V_2 中的一个向量 $\boldsymbol{\alpha}=\underset{\in V_1}{\boldsymbol{\alpha}_1}+\underset{\in V_2}{\boldsymbol{\alpha}_2}$, 由于 $S_1(S_2)$ 是 $V_1(V_2)$ 的一个基, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{\alpha}_2)$ 可由 $S_1(S_2)$ 中有限多个向量线性表出, 于是 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $S_1 \cup S_2$ 中有限多个向量线性表出, 得证

Prop. 31　有限维子空间基于维数的直和判定定理

设 V_1, V_2 是 V 的有限维子空间, 则:

V_1+V_2 是直和 $\Longleftrightarrow \dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

Def. 22　多个子空间的直和

设 $V_1, \cdots, V_m$ 都是 V 的子空间, 如果 $V_1+\cdots+V_m$ 中每一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示成 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$, $\boldsymbol{\alpha}_i \in V_i$ 的表法唯一, 则称 $V_1+\cdots+V_m$ 是直和, 记作 $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_i$

Prop. 32　多个有限维子空间的直和判定定理

设 $V_1, \cdots, V_m$ 都是 V 的子空间, 则 $V_1+\cdots+V_m$ 是直和的充要条件有:

1. $V_1+\cdots+V_m$ 中 $\mathbf{0}$ 表法唯一;
2. $V_i \cap (\sum\limits_{j \neq i} V_j)=\mathbf{0}$;
3. 设 V_i 的一个基为 S_i $(i=1, \cdots, m)$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i$ 是 $\sum\limits_{i=1}^{m} V_i$ 的一个基

Prop. 33　多个有限维子空间基于维数的直和判定定理

设 $V_1, \cdots, V_m$ 都是 V 的有限维子空间, 则:

$V_1+\cdots+V_m$ 是直和 $\Longleftrightarrow \dim(V_1+\cdots+V_m)=\dim V_1+\cdots+\dim V_m$

Prop. 34　基于直和分解的基判定定理

若 $V=\bigoplus\limits_{i=1}^{m}$, 则 $V_i(i=1,\cdots,m)$ 的基合起来是 $V=\sum\limits_{i=1}^{m}$ 的一个基.
这揭示了可以通过直和分解 (空间的分解), 来研究线性空间的结构

1.6.3　补空间

Def. 23　补空间

若 $V=V_1\oplus V_2$, 则称 V_2 是 V_1 的一个补空间, 也称 V_1 是 V_2 的一个补空间

Thm. 12　有限维子空间的补空间存在定理

设 $\dim V=n$, 则 V 的每一个子空间 U, 都在 V 中有一个补空间.
补空间不唯一.

Pf　U 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, 扩充为 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-m}$, 从而 $V=\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-m}\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\rangle+\langle\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-m}\rangle=U+W$, 据直和的充要条件 (3) 得 $V=U\oplus W$, 因此 W 是 U 的一个补空间

1.7　线性空间的同构

1.7.1　同构映射与线性空间的同构

Def. 24　同构映射、线性空间的同构

设 V 和 V' 都是域 F 上的线性空间, 如果 V 到 V' 有一个双射 σ, 满足:
(1) $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta}),\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ (保持加法); (2) $\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V,k\in F$ (保持数乘), 则称 σ 为 V 到 V' 的一个同构映射, 此时, 称线性空间 V 和 V' 是同构的, 记作 $V\cong V'$.

Prop. 35　同构映射的性质

1. $\sigma(\mathbf{0})=\mathbf{0}'$
2. $\sigma(-\boldsymbol{\alpha})=-\sigma(\boldsymbol{\alpha})$
3. $\sigma(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)=k_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_s\sigma(\boldsymbol{\alpha}_s)$
4. V 中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相 (无) 关 $\Longleftrightarrow$ V' 中 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_s)$ 线性相 (无) 关
5. $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一个基 $\Longleftrightarrow$ $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 V' 的一个基

Prop. 36　有限维子空间基于维数的同构判定定理

数域 K 上两个有限维的线性空间 V 和 V' 同构 $\Longleftrightarrow\dim V=\dim V'$.

Cor. 6

域 F 上任一 n 维线性空间 V 与 F^n 同构, 因此可以通过研究 F^n 来研究线性空间

这揭示了可以通过同构, 来研究线性空间的结构.

Pf “ $\Longrightarrow$ ” 由性质 5 可得. V 和 V' 中分别取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$, 令 $\sigma: V\to V', \boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{\alpha}_i\mapsto\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{\gamma}_i$, 由于表法唯一, 由此 σ 是一个映射; $\forall\boldsymbol{\gamma}=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\boldsymbol{\gamma}_i$, 有 $\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\boldsymbol{\alpha}_i\mapsto\boldsymbol{\gamma}$, 因此 σ 是满射; 设 $\boldsymbol{\beta}=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\boldsymbol{\alpha}_i\mapsto\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\boldsymbol{\gamma}_i$, 若 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(\boldsymbol{\beta})$, 则 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$, 因此 σ 是单射, 从而 σ 是双射. 易证 σ 保持加法和数乘, 因此 σ 是一个同构映射, 从而 $V\cong V'$, “ $\Longleftarrow$ ” 得证.

Prop. 37 同构映射的坐标不变性定理

设 $\sigma: V\to V', \boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{\alpha}_i\mapsto\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{\gamma}_i$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$, $\sigma(\boldsymbol{\alpha})$ 在基 $\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$

即同构映射的像与原像, 在对应的基下的坐标相同.

可建立如下同构映射:

$$\sigma: V\to F^n, \sum_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{\alpha}_i\mapsto\sum_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{\varepsilon}_i$$

.

Thm. 13 同构映射的子空间保持性定理

设 σ 是域 F 上线性空间 V 到 V' 的一个同构映射, U 是 V 的一个子空间, 令 $\sigma(U):=\{\sigma(\boldsymbol{\alpha})\mid\boldsymbol{\alpha}\in U\}\subseteq V'$, 则 $\sigma(U)$ 是 V' 的一个子空间.

若 $\dim U=m$, 则 $\dim\sigma(U)=m$.

Pf $\boldsymbol{0}'=\sigma(\underset{\in U}{\boldsymbol{0}})\in\sigma(U)$; $\sigma(\underset{\in U}{\boldsymbol{\alpha}})+\sigma(\underset{\in U}{\boldsymbol{\beta}})=\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\in\sigma(U)$; $k\sigma(\underset{\in U}{\boldsymbol{\alpha}})=\sigma(\underset{\in U}{k\boldsymbol{\alpha}})\in\sigma(U)$, 从而 $\sigma(U)$ 是 V' 的一个子空间

1.7.2 线性空间的同构类与划分

Def. 25 同构类

设 $\Omega=\{$数域 K 上线性空间$\}$, 线性空间的同构是 Ω 上的一个等价关系, 此时, 等价类称为同构类

Thm. 14　有限维线性空间的同构类划分定理

所有同构类组成的集合是 Ω 的一个划分, 令 $\Omega_1 = \{$域 F 上有限维线性空间$\}$, 则同构类有:

$$\overline{\mathbf{0}} = \{\mathbf{0}\}, \overline{F^1} = \{1 \text{ 维线性空间}\}, \cdots, \overline{F^n} = \{\text{n 维线性空间}\}, \cdots$$

因此, 同构类完全被维数所决定.

1.8　商空间

Def. 26　商集

设 $\sim$ 是集合 S 上的一个等价关系, 由所有等价类组成的集合 (S 的一个划分), 称为 S 对于关系 $\sim$ 的商集, 记作 $S/\sim$

Def. 27　陪集、陪集的代表

设 V 是域 F 上的线性空间, W 是 V 的一个子空间, 设 $\boldsymbol{\beta} \sim \boldsymbol{\alpha} :\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha} \in W$, 易证 $\sim$ 是 V 上的一个等价关系.

$\forall \boldsymbol{\alpha} \in V, \overline{\boldsymbol{\alpha}} = \{\boldsymbol{\beta} \in V \mid \boldsymbol{\beta} \sim \boldsymbol{\alpha}\} = \{\boldsymbol{\beta} \in V \mid \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha} \in W\} = \{\boldsymbol{\beta} \in V \mid \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \in W\} = \{\boldsymbol{\beta} \in V \mid \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \in W\} = \{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\eta} \mid \boldsymbol{\eta} \in W\} =: \boldsymbol{\alpha} + W$, 将 $\boldsymbol{\alpha} + W$ 称为 W 的一个陪集, 称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{\alpha} + W$ 的一个代表

Prop. 38　陪集的性质

1. $\boldsymbol{\alpha} + W = \boldsymbol{\gamma} + W \iff \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\gamma} \in W$, 可得: 陪集 $\boldsymbol{\alpha} + W$ 的代表不唯一
2. $\boldsymbol{\eta} \in W \iff \boldsymbol{\eta} + W = W$

Def. 28　商空间

$V/W := \{\boldsymbol{\alpha} + W \mid \boldsymbol{\alpha} \in V\}$ 是 V 对于子空间 W 的一个商集

规定加法: $(\boldsymbol{\alpha} + W) + (\boldsymbol{\beta} + W) := (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + W$;

规定数乘: $k(\boldsymbol{\alpha} + W) := k\boldsymbol{\alpha} + W$;

易证, 上述的定义与陪集代表的选择无关, 因此定义合理.

W 是 V/W 的一个零元, $(-\boldsymbol{\alpha}) + W$ 是 $\boldsymbol{\alpha} + W$ 的负元, 易证 V/W 成为域 F 上的一个线性空间, 称 V/W 为 V 对于子空间 W 的商空间

Thm. 15　商空间的维数公式

设 V 是域 F 上的一个 n 维线性空间, W 是 V 的一个子空间, 则:

$$\dim(V/W) = \dim V - \dim W$$

.

Pf W 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$, 将其扩充成 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, $\forall \boldsymbol{\alpha}+W\in V/W$, 设 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_s\boldsymbol{\alpha}_s+a_{s+1}\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+\cdots+a_n\boldsymbol{\alpha}_n$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}+W&=(a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_s\boldsymbol{\alpha}_s+a_{s+1}\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+\cdots+a_n\boldsymbol{\alpha}_n)\\&=a_1(\boldsymbol{\alpha}_1+W)+\cdots+a_s(\boldsymbol{\alpha}_s+W)+a_{s+1}(\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+W)+\cdots+a_n(\boldsymbol{\alpha}_n+W)\\&=a_1W+\cdots+a_sW+a_{s+1}(\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+W)+\cdots+a_n(\boldsymbol{\alpha}_n+W)\\&=a_{s+1}(\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+W)+\cdots+a_n(\boldsymbol{\alpha}_n+W)\end{aligned}$$

设 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+W)+k_{n-s}(\boldsymbol{\alpha}_n+W)=W$
$\Longrightarrow k_1\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+\cdots+k_{n-s}\boldsymbol{\alpha}_n+W=W$
$\Longrightarrow k_1\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+\cdots+k_{n-s}\boldsymbol{\alpha}_n\in W$
$\Longrightarrow k_1\boldsymbol{\alpha}_{s+1}+\cdots+k_{n-s}\boldsymbol{\alpha}_n=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_s\boldsymbol{\alpha}_s$
$\Longrightarrow k_1=\cdots=k_{n-s}=l_1=\cdots=l_s=0$
$\Longrightarrow \boldsymbol{\alpha}_{s+1}+W,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+W$ 线性无关
$\Longrightarrow \boldsymbol{\alpha}_{s+1}+W,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+W$ 是 V/W 的一个基
$\Longrightarrow \dim(V/W)=n-s=\dim V-\dim W$

Prop. 39　基于商空间的直和分解定理

如果 V/W 的一个基为 $\boldsymbol{\beta}_1+W,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t+W$, 令 $U=\langle\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\rangle$, 则 $V=W\oplus U$, 且 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是 U 的一个基.

这揭示出可以通过研究商空间, 来研究线性空间的结构.

Pf $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$, $\boldsymbol{\alpha}_W=a_1(\boldsymbol{\beta}_1+W)+\cdots+a_t(\boldsymbol{\beta}_t+W)=(a_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+a_t\boldsymbol{\beta}_t)$
$\Longrightarrow \boldsymbol{\alpha}-(a_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+a_t\boldsymbol{\beta}_t)\in W\Longrightarrow \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\eta}\in W\Longrightarrow \boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\beta}\in W+U$
$\Longrightarrow V=W+\overset{\text{记作}\beta\in U}{U}$; $\forall\boldsymbol{\gamma}\in W\cap U$, $\boldsymbol{\gamma}=l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_t\boldsymbol{\beta}_t$
$\Longrightarrow \boldsymbol{\gamma}+W=(l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_t\boldsymbol{\beta}_t)+W=l_1(\boldsymbol{\beta}_1+W)+\cdots+l_t(\boldsymbol{\beta}_t+W)=W$ (零元)
$\Longrightarrow l_1=\cdots=l_t=0\Longrightarrow\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}\Longrightarrow W\cap U=\{\mathbf{0}\}\Longrightarrow V=W\oplus U$
设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0}\Longrightarrow W=\mathbf{0}+W=(k_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\beta}_t)+W$
$\Longrightarrow k_1=\cdots=k_t=0\Longrightarrow\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关 $\Longrightarrow\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是 U 的一个基

Thm. 16　推广到无限维的补空间存在定理

即使 V 是无限维的, 对于其无限维子空间 W, 若商空间 V/W 是有限维的, 则 W 也存在一个补空间 U.

2 线性映射

2.1 线性映射及其运算

2.1.1 线性映射的定义

Def. 1 线性映射、线性变换

设 V 和 V' 是域 F 上的线性空间, V 到 V' 的一个映射 $\mathcal{A}$ 如果满足:

1. $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})+\mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}),\ \forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ (保持加法);
2. $\mathcal{A}(k\boldsymbol{\alpha})=k\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}),\ \forall \boldsymbol{\alpha}\in V, k\in F$ (保持纯量乘法),

则称 $\mathcal{A}$ 为 V 到 V' 的一个线性映射.
如果 V 到 V' 的一个线性映射 $\mathcal{B}$, 满足: $\mathcal{B}(\boldsymbol{\alpha})=\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}),\ \forall \boldsymbol{\alpha}\in V$, 则称 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{A}$ 相等, 记作 $\mathcal{B}=\mathcal{A}$.
V 到自身的一个线性映射, 称为 V 上的一个线性变换.

Eg. 1 线性变换的例子

1. 数乘变换: $\mathcal{K}(\boldsymbol{\alpha})=k\boldsymbol{\alpha},\ \forall \boldsymbol{\alpha}\in V, k\in F$
2. 零变换: $\mathcal{O}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0},\ \forall \boldsymbol{\alpha}\in V$
3. 恒等变换: $\mathcal{I}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha},\ \forall \boldsymbol{\alpha}\in V$

Prop. 1 线性映射的性质

1. $\mathcal{A}(\mathbf{0})=\mathbf{0}'$
   零元的像是零元
2. $\mathcal{A}(-\boldsymbol{\alpha})=-\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})$
3. $\mathcal{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)=k_1\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_s\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_s)$
4. $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 在 V 中线性相关 $\Rightarrow \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_s)$ 在 V' 中线性相关
   线性相关向量组的像仍线性相关, 线性无关向量组的像不一定线性无关
5. 设 $\dim V=n$, V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, $\forall \boldsymbol{\alpha}\in V$, 设 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{\alpha}_n$, 则 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})=k_1\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_n\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)$
   $\mathcal{A}$ 完全被其在 V 中一个基上的作用所决定
6. 设 $\mathcal{A}$ 是 V 到 V' 的一个同构映射 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 是 V 到 V' 的一个可逆线性映射

Prop. 2　线性映射的构造

设 V 和 V' 是域 F 上的线性空间, 且 $\dim V = n$, V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, V' 中任取 n 个向量 $\boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_n$ (可重复), 令 $\mathcal{A} : V \to V', \boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{\alpha}_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{\gamma}_i$, 则 $\mathcal{A}$ 是 V 到 V' 的一个线性映射.

其中, $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_i) = \boldsymbol{\gamma}_i$, $i =, \cdots, n$; 若有 V 到 V' 的一个线性映射 $\mathcal{B}$, 满足: $\mathcal{B}(\boldsymbol{\alpha}_i) = \boldsymbol{\gamma}_i$, $i = , \cdots, n$, 则 $\mathcal{B} = \mathcal{A}$

2.1.2　线性映射的运算律

Def. 2　线性映射的加法与纯量乘法

设 V 和 V' 是域 F 上的线性空间, 令 $\mathrm{Hom}(V, V') := \{V \text{ 到 } V' \text{ 的线性映射}\}$, $\mathrm{Hom}(V, V) := \{V \text{ 上的线性变换}\}$.

在 $\mathrm{Hom}(V, V')$ 中, 规定加法: $(\mathcal{A} + \mathcal{B})\boldsymbol{\alpha} := \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}$, $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V, V'), \boldsymbol{\alpha} \in V$; 规定纯量乘法: $(k\mathcal{A})\boldsymbol{\alpha} := k(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha})$, $\forall k \in F, \mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V'), \boldsymbol{\alpha} \in V$

Def. 3　线性映射空间

易证, $\mathrm{Hom}(V, V')$ 满足线性空间八条运算法则, 其中零元是零映射: $\mathcal{O}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}'$, $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, $\mathcal{A}$ 的负元是: $(-\mathcal{A})\boldsymbol{\alpha} = -\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}$, $\forall \mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V')\boldsymbol{\alpha} \in V$, 因此 $\mathrm{Hom}(V, V')$ 也成为域 F 上的一个线性空间, 称为 V 到 V' 的线性映射空间.

同理, $\mathrm{Hom}(V, V)$ 也是域 F 上的一个线性空间, 称为 V 上的线性变换空间

Def. 4　线性映射的乘法

设线性映射 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$: $V \xrightarrow{\mathcal{A}} U \xrightarrow{\mathcal{B}} W$, 则有线性映射的乘法 $\mathcal{B}\mathcal{A}$, 根据映射乘法的运算律, 线性映射的乘法满足: (1) 结合律; (2) 左右分配律.

易证, $\mathrm{Hom}(V, V)$ 对于加法和乘法是一个有单位元 (恒等变换 $\mathcal{I}$) 的非交换环, 其纯量乘法满足: $k(\mathcal{A}\mathcal{B}) = (k\mathcal{A})\mathcal{B} = \mathcal{A}(k\mathcal{B})$

Prop. 3　基于同构的可逆线性变换判定定理

$\mathcal{A}$ 是 V 上的可逆线性变换 $\iff$ $\mathcal{A}^{-1}$ 是 V 上的可逆线性变换

Def. 5　线性变换的幂运算

设 $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V)$, 令 $\mathcal{A}^m := \underbrace{\mathcal{A}\mathcal{A}\cdots\mathcal{A}}_{m\text{个}}$, $m \in \mathbb{N}^*$, 称为 $\mathcal{A}$ 的正整数指数幂.

$\mathcal{A}^0 := \mathcal{I}$, 称为 $\mathcal{A}$ 的零次幂.

易证, $\mathcal{A}^m\mathcal{A}^l = \mathcal{A}^{m+l}$, $(\mathcal{A}^m)^l = \mathcal{A}^{ml}$, $m, l \in \mathbb{N}$.

若 $\mathcal{A}$ 可逆, 则令 $\mathcal{A}^{-m} := (\mathcal{A}^{-1})^m$, $m \in \mathbb{N}^*$, 称为 $\mathcal{A}$ 的负整数指数幂

2.1.3 投影

Def. 6 投影

设几何空间 V, 过定点 O 的一个平面 U 是 V 的一个子空间, 过定点 O 的一条直线 W 也是 V 的一个子空间, 有: $V = U \oplus W$.

$\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, $\boldsymbol{\alpha} = \underset{\in U}{\boldsymbol{\alpha}_1} + \underset{\in W}{\boldsymbol{\alpha}_2}$, $\boldsymbol{\alpha}$ 平行于 W 在 U 上的投影: $\mathcal{P}_U(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}_1$

设域 F 上的一个线性空间 $V = U \oplus W$, $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, $\boldsymbol{\alpha} = \underset{\in U}{\boldsymbol{\alpha}_1} + \underset{\in W}{\boldsymbol{\alpha}_2}$, 令 $\mathcal{P}_U(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}_1$, 则称 $\mathcal{P}_U$ 为平行于 W 在 U 上的投影

Prop. 4 投影的性质

1. $\mathcal{P}_U$ 是 V 上的一个线性变换
2. $\mathcal{P}_U = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}, & \forall \boldsymbol{\alpha} \in U \\ \mathbf{0}, & \forall \boldsymbol{\alpha} \in W \end{cases}$
3. $\mathcal{P}_U^2 = \mathcal{P}_U$

Def. 7 幂等变换

V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 如果满足: $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是一个幂等变换.

投影 $\mathcal{P}_U$ 是一个幂等变换

Prop. 5 投影判定定理

若 V 上的一个线性变换 $\mathcal{A}$ 满足: $\mathcal{A} = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}, & \forall \boldsymbol{\alpha} \in U \\ \mathbf{0}, & \forall \boldsymbol{\alpha} \in W \end{cases}$, 则 $\mathcal{A} = \mathcal{P}_U$

Pf $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, 设 $\boldsymbol{\alpha} = \underset{\in U}{\boldsymbol{\alpha}_1} + \underset{\in W}{\boldsymbol{\alpha}_2}$, $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1 + \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1 + \mathbf{0} = \mathcal{P}_U$, 从而 $\mathcal{A} = \mathcal{P}_U$

2.2 线性映射的核与像

Def. 8 线性映射的核

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上线性空间 V 到 V' 的一个线性映射, 则 V 的子集 $\operatorname{Ker}\mathcal{A} := \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}'\}$, 称为 $\mathcal{A}$ 的核.

$\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 是 V 的一个子空间, 可以称为核空间; $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 是 V' 的子空间, 称为像空间

Prop. 6 基于核的单射判定定理

$\mathcal{A}$ 是单射 $\iff \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$.

Pf $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}' = \mathcal{A}(\mathbf{0}) \overset{\mathcal{A}\text{是单射}}{\Longrightarrow} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$; 设 $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in V$ 且 $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_2$, 则 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) = \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1 - \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}'$, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A} \overset{\operatorname{Ker}\mathcal{A}=\{\mathbf{0}\}}{\Longrightarrow} \boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2$

Prop. 7　基于像的满射判定定理

$\mathcal{A}$ 是满射 $\Longleftrightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A} = V'$

Prop. 8　投影的核与像

几何空间 $V = U \oplus W$, 设平行于 W 在 U 上的投影 $\mathcal{P}_U$, $\operatorname{Ker}\mathcal{P}_U = W$, $\operatorname{Im}\mathcal{P}_U = U$

Prop. 9　投影的核的商空间与像空间的同构性定理

令 $\sigma : V/W \to \operatorname{Im}\mathcal{P}_U, \boldsymbol{\alpha} + W \mapsto \mathcal{P}_U\boldsymbol{\alpha}$, $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, 易证 σ 既是单射又是满射, 从而 σ 是一个双射, 又满足:

1. $(\boldsymbol{\alpha} + W) + (\boldsymbol{\beta} + W) = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + W \mapsto \mathcal{P}_U(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \mathcal{P}_U\boldsymbol{\alpha} + \mathcal{P}_U\boldsymbol{\beta}$ (保持加法);
2. $k(\boldsymbol{\alpha} + W) = (k\boldsymbol{\alpha}) + W \mapsto \mathcal{P}_U(k\boldsymbol{\alpha}) = k\mathcal{P}_U\boldsymbol{\alpha}$ (保持纯量乘法),

因此, σ 是一个同构映射, 从而 $V/W \cong \operatorname{Im}\mathcal{P}_U$, 即 $V/\operatorname{Ker}\mathcal{P}_U \cong \operatorname{Im}\mathcal{P}_U$.

Thm. 1　第一同构定理

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上线性空间 V 到 V' 的一个线性映射, 则:

$$V/\operatorname{Ker}\mathcal{A} \cong \operatorname{Im}\mathcal{A}$$

于是, 有维数关系: $\dim(\operatorname{Im}\mathcal{A}) = \dim(V/\operatorname{Ker}\mathcal{A}) = \dim V - \dim(\operatorname{Ker}\mathcal{A})$.

Pf　记 $W = \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, 令 $\sigma : V/W \to \operatorname{Im}\mathcal{A}, \boldsymbol{\alpha} + W \mapsto \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha} + W = \boldsymbol{\beta} + W \Longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \in W = \operatorname{Ker}\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}' \Longleftrightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}$, 因此 σ 是一个映射, 并且是一个单射, 显然也是一个满射, 从而 σ 是一个双射, 易证, σ 保持加法与纯量乘法, 因此是 $V/\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 到 $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 的一个同构映射

Thm. 2　线性映射核与像的维数公式 (秩-零度定理)

设 $\mathcal{A} \in \operatorname{Hom}(V, V')$, $\dim V = n$, 则:

$$\dim V = \dim(\operatorname{Ker}\mathcal{A}) + \dim(\operatorname{Im}\mathcal{A})$$

Def. 9　线性映射的秩与零度

将线性映射 $\mathcal{A}$ 的像空间的维数, 称为线性映射的秩, 记作 $\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \dim(\operatorname{Im}\mathcal{A})$.
将 $\mathcal{A}$ 的核的维数, 称为 $\mathcal{A}$ 的零度

Thm. 3　有限维同维线性空间的线性映射单满等价性定理

设 $\mathcal{A} \in \operatorname{Hom}(V, V')$ 且 $\dim V = \dim V'$, 则 $\mathcal{A}$ 是单射 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 是满射.
特别地, $\mathcal{A}$ 是有限维线性空间 V 上的一个线性变换, 则 $\mathcal{A}$ 是单射 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 是满射.

Pf $\mathcal{A}$ 是单射 $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}\mathcal{A}=\{\mathbf{0}\} \Longleftrightarrow \dim V=\dim(\operatorname{Im}\mathcal{A}) \Longleftrightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A}=V' \Longleftrightarrow \mathcal{A}$ 是满射

2.3 线性映射的矩阵表示

设 V 是域 F 上的线性空间, 令:

$$V^n:=\underbrace{V\times V\times\cdots\times V}_{n个}:=\{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\mid \boldsymbol{\alpha}_i\in V,i=1,\cdots,n\}$$

1. 规定相等: $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n):\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}_i,\ i=1,\cdots,n$
2. 规定加法: $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)+(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n):=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n),\ \forall\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_i\in V$
3. 规定纯量乘法: $k(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n):=(k\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,k\boldsymbol{\alpha}_n),\ \forall\boldsymbol{\alpha}_i\in V,k\in F$
   易证, V^n 成为域 F 上的一个线性空间
4. 规定与矩阵的乘法:

$$\underbrace{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)}_{\in V^n}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix}:=\underbrace{(a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\cdots,a_{1m}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_{nm}\boldsymbol{\alpha}_n)}_{\in V^m}$$

满足:
(1) $[(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}]\,\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)(\boldsymbol{AB})$;
(2) $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)(\boldsymbol{AB})$;
(3) $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{A}$;
(4) $k\,[(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}]=[k(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)]\,\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)(k\boldsymbol{A})$

2.3.1 线性映射在一个基下的矩阵

Def. 10 线性变换的矩阵

设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的一个线性变换, V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 基在线性变换下的像一定可以由基线性表出:
线性变换完全被其在基上的作用所决定

$$\begin{cases}\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n\\\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_2=a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n\\\quad\vdots\\\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_n=a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n\end{cases}$$

$$\Longrightarrow (\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{记作}\boldsymbol{A}}$$

$$\text{即}\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) := (\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$$

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵

$\boldsymbol{A}$ 的第 j 列是 $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_j$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标, 于是, 线性变换在一个给定的基下的矩阵是唯一的

Def. 11　线性映射的矩阵

设 $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V'), \dim V = n, \dim V' = s$, V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, V' 中取一个基 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s$, 则:

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}}_{\text{记作}\boldsymbol{A}}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s)\boldsymbol{A}$$

将 $\boldsymbol{A}$ 称为线性映射 $\mathcal{A}$ 在 V 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 和 V' 的基 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s$ 下的矩阵

Prop. 10　线性映射及其矩阵的性质

令 $\sigma : \mathrm{Hom}(V, V') \to \mathrm{M}_{s\times n}(F), \mathcal{A} \mapsto \boldsymbol{A}$, 其中 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s)\boldsymbol{A}$,
设 $\mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V, V')$, $\mathcal{B}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s)\boldsymbol{B}$, 则有:

1. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s)(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$ (保持加法)
2. $(k\mathcal{A})(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s)(k\boldsymbol{A})$ (保持纯量乘法)

Prop. 11　线性变换及其矩阵的特殊性质

1. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V, V)$, 在给定的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下, $\mathcal{A}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, $\mathcal{B}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 则有 $(\mathcal{A}\mathcal{B})(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$ (保持乘法)
2. 令 $\sigma : \mathrm{Hom}(V, V) \to \mathrm{M}_n(F), \mathcal{A} \mapsto \boldsymbol{A}$, 其中 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$, 则 σ 保持加法、纯量乘法、乘法

3. $\mathcal{A}$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\mathcal{A}^{-1}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$

4. $\mathcal{A}$ 是幂等变换 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵

2.3.2 线性映射空间与矩阵空间的关系

Thm. 4 线性映射空间与矩阵空间的同构定理

任给 $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_n) \in \mathrm{M}_{s\times n}$, 根据定理 1, 一定存在唯一的一个线性映射 $\mathcal{C}$, 使得 $\mathcal{C}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s)(\boldsymbol{\gamma}_1, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_n) = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s)\boldsymbol{C}$, 因此 σ 是双射, 从而 σ 是 $\mathrm{Hom}(V, V')$ 到 $\mathrm{M}_{s\times n}(F)$ 的一个同构映射, 于是有:

$$\mathrm{Hom}(V, V') \cong \mathrm{M}_{s\times n}(F)$$

.

特别地, 对于线性变换:

$$\mathrm{Hom}(V, V) \cong \mathrm{M}_n(F)$$

Thm. 5 线性映射空间的维数公式

由于线性映射空间与矩阵空间同构, 二者维数相等, 于是有:

$$\dim\left[\mathrm{Hom}(V, V')\right] = sn = (\dim V)(\dim V')$$

特别地, 对于线性变换:

$$\dim\left[\mathrm{Hom}(V, V)\right] = n^2 = (\dim V)^2$$

.

2.3.3 相似矩阵与不变量

Def. 12 矩阵的迹

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, 对角线元素之和 $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹, 记作 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

Prop. 12 矩阵的迹的性质

1. $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$

2. $\mathrm{tr}(k\boldsymbol{A}) = k\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$

3. $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$

Def. 13　相似矩阵、相似类

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{M}_n(F)$, 如果存在域 F 上的 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是相似的, 记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.
相似关系是 $\mathrm{M}_n(F)$ 上的一个等价关系, 相似关系下的等价类, 称为相似类

Prop. 13　矩阵的行列式、秩、迹在相似关系下的不变性定理

1. 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$, 且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{B})$
   Pf　$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}| = |\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}|^{-1}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{A}|$

2. 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(B)$
   Pf　$\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{APP}^{-1}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$

因此, n 级矩阵的行列式、秩、迹均为相似关系下的不变量.

2.3.4　线性变换在不同基下的矩阵

Def. 14　过渡矩阵

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, V 中取两个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$, 设 $(\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\underbrace{\begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{记作}\boldsymbol{S}}$, 称 $\boldsymbol{S}$ 为基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 的过渡矩阵

Thm. 6　线性变换在不同基下的矩阵相似定理

设 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n) = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{B}$, 则有:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}$$

即, 线性变换 $\mathcal{A}$ 在不同基下的矩阵是相似的.

Pf　从 $\underset{\text{线性无关}}{(\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n)}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$, 可推出 $\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0 \in F^n$

$\Longleftrightarrow$ 从 $\underset{\text{线性无关}}{(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{S}}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$, 可推出 $\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0 \in F^n$

$\Longleftrightarrow$ 从 $\boldsymbol{S}\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=0\in F^n$, 可推出 $\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=0\in F^n$ (齐次线性方程组只有零解)
$\Longleftrightarrow |\boldsymbol{S}|\neq 0\Longleftrightarrow \boldsymbol{S}$ 是可逆矩阵
$\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{AS}=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{B}$

Def. 15　线性变换的行列式、秩、迹

由于 $\mathcal{A}$ 在不同基下的矩阵是相似的, 将 $\mathcal{A}$ 在一个基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式、秩、迹, 称为线性变换 $\mathcal{A}$ 的行列式、秩、迹.

Prop. 14　线性变换的矩阵的秩与像空间维数的关系

设 $\mathcal{A}\in \mathrm{Hom}(V,V)$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$, 则:

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\dim(\mathrm{Im}\,\mathcal{A})$$

.

2.3.5　向量在线性映射下像的坐标

Def. 16　向量在线性映射下像的坐标

.....

2.4　矩阵对角化及特征值与特征向量

Def. 1 in 2.3.1 表明一个线性变换在给定一个基后可以由一个矩阵表示. 于是我们便想找到一个基, 使得线性变换在这个基下的矩阵表示形式最简单. 我们认为最简单的矩阵为对角矩阵, 设这个基为 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$, 对角矩阵为 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots\lambda_n\}$, 则有

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)=(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=(\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{\xi}_n)$$

于是有 $\mathcal{A}\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i\boldsymbol{\xi}_i$, 这引出了特征值与特征向量的问题.

Thm. 4 in 6 表明一个线性变换在不同基下有不同的矩阵表示, 且给出了矩阵之间的关系——相似. 于是我们能够在有一个给定的基及其下矩阵的基础上, 通过 Meth. 2 in 2 给出的对角化方法, 将一个可对角化的矩阵转化为对角矩阵.

2.4.1 线性变换的特征值与特征向量

Def. 17 线性变换的特征值与特征向量

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的一个线性变换, 若存在 $\lambda_0 \in F$ 和一个非零向量 $\boldsymbol{\xi} \in V$, 使得

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda_0 \boldsymbol{\xi}$$

则称 λ_0 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值, 称 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\mathcal{A}$ 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量

Def. 18 特征子空间

设 $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V)$, λ_0 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值, 令

$$V_{\lambda_0} := \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0 \boldsymbol{\alpha}\}$$

由于 $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V_{\lambda_0}, k \in F$, $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, k\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0} \in V_{\lambda_0}$, 从而 V_{λ_0} 是 V 的一个子空间, 称 V_{λ_0} 为 $\mathcal{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征子空间.

Prop. 15 不同特征值对应的特征向量线性无关

设 $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V)$, λ_1, λ_2 是 $\mathcal{A}$ 的不同的特征值, V_{λ_1} 中 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, V_{λ_2} 中 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关.
推广到所有特征值: 设 $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V)$, λ_i 是 $\mathcal{A}$ 的不同的特征值, V_{λ_i} 中 $\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{ir_i}$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_{11}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{1r_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{s1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{sr_s}$ 仍线性无关, $i = 1, \cdots, s$.

Pf 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s + l_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + l_r\boldsymbol{\beta}_r = \mathbf{0}$, 则 $k_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_s + l_1\lambda_2\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + l_r\lambda_2\boldsymbol{\beta}_r = \mathbf{0}$, 于是有 $l_1(\lambda_2 - \lambda_1)\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + l_r(\lambda_2 - \lambda_1)\boldsymbol{\beta}_r = \mathbf{0}$, 由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 从而 $l_1 = \cdots = l_r = 0$, 易得 $k_1 = \cdots = k_s = 0$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关

2.4.2 矩阵的特征值与特征向量

Def. 19 矩阵的特征值与特征向量

设 $\boldsymbol{A} \in \mathrm{M}_n(F)$, 若存在 $\lambda_0 \in F$, 以及 F^n 中一个非零列向量 $\boldsymbol{y}$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \lambda_0 \boldsymbol{y}$, 则称 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的一个特征向量

Prop. 16 有限维线性空间中的特征值与特征向量判定定理

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, $\mathcal{A}$ 在这个基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, V 中的向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在这个基下的坐标记为 $\boldsymbol{y}$, 则:
λ_0 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\mathcal{A}$ 的属于 λ_0 的一个特征向量 $\Longleftrightarrow$

1. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \lambda_0 \boldsymbol{y}$, $\lambda_0 \in F$ 且 $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0} \in F^n$
2. λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{\xi}$ 的坐标 $\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的一个特征向量

Prop. 17　特征值与特征向量求解定理

设 $\boldsymbol{A}\in \mathrm{M}_n(F)$, λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的一个特征向量 $\Longleftrightarrow$

1. $|\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $(\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})X=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解, $\lambda_0\in F$
2. λ_0 是一元多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$ 在 F 中的一个根, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $(\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})X=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解

Def. 20　环上的特征矩阵及其行列式、特征多项式

$$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{pmatrix}$$

是环 $F[\lambda]$ 上的一个矩阵, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵, 可定义加法、纯量乘法、乘法, 且满足与域 F 上矩阵相同的运算法则

环 $F[\lambda]$ 上的 n 级矩阵可定义行列式, 将 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的行列式:

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

将对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式, 称为线性变换 $\mathcal{A}$ 的特征多项式.

Meth. 1　求矩阵全部特征值与特征向量

求域 F 上 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值与特征向量的步骤:

1. 计算 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$
2. 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$ 在 F 中的全部根, 即为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值
3. 对于 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值 λ_i, 求齐次线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})X=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir_i}$
4. 则 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_i 的全部特征向量为

$$\{k_1\boldsymbol{\alpha}_{i1}+\cdots+k_{r_i}a_{ir_i}\mid k_1,\cdots,k_{r_i}\in F, k_1\cdots k_{r_i}\neq 0\}$$

Prop. 18　特征多项式与特征值在相似关系下的不变性定理

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in \mathrm{M}_n(F)$, 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等, 从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值 (重根按重数计算).

Pf　$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}|$
$=|\boldsymbol{P}^{-1}|\,|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{P}|\Longrightarrow|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$

Thm. 7　矩阵特征多项式的展开式定理

设 $\boldsymbol{A}(a_{ij})\in \mathrm{M}_n(F)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式:

$$f(\lambda)=\lambda^n-\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^k\sum_{1\le j_1'<\cdots<j_k'\le n}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}j_1' & \cdots & j_k'\\ j_1' & \cdots & j_k'\end{pmatrix}\lambda^{n-k}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|$$

Pf

2.4.3　线性变换可对角化的条件

Def. 21　可对角化

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, 若 V 中有一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 使得 $\mathcal{A}$ 在这个基下的矩阵为对角矩阵, 则称 $\mathcal{A}$ 可对角化

Prop. 19　基于特征向量的线性变换可对角化判定定理

n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Longleftrightarrow$

1. V 中存在由 $\mathcal{A}$ 的特征向量组成的一个基
2. $\mathcal{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

   Pf　V 中有一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 使得 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$,

   即 $(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_n)=(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n)$, 即 $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i,\ i=1,\cdots,n$

Prop. 20　基于特征子空间的线性变换可对角化判定定理

n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Longleftrightarrow$

1. 所有特征子空间的基合起来, 是 V 的一个基

   Pf　$\underbrace{\boldsymbol{\alpha}_{11},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{1r_1}}_{\in V_{\lambda_1}},\cdots,\underbrace{\boldsymbol{\alpha}_{s1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{sr_s}}_{\in V_{\lambda_s}}$, $r_1+\cdots+r_s=n$, 假如有 V_{λ_j}, $\boldsymbol{\alpha}_{j1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jr_j}$ 不是 V_{λ_j} 的一个基, 则 V_{λ_j} 有一个向量 $\boldsymbol{\beta}_j$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_{j1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jr_j}$ 线性表出, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_{j1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jr_j},\boldsymbol{\beta}_j$ 线性无关, 于是 $\boldsymbol{\alpha}_{11},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{1r_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jr_j},\boldsymbol{\beta}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{sr_s}$ 仍线性无关, 而其向量个

数为 $n+1$, 产生矛盾, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir_j}$ 是 V_{λ_i} 的一个基, $i=1,\cdots,s$

2. $V=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$, 其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是 $\mathcal{A}$ 所有不同的特征值
3. $\dim V=\dim V_{\lambda_1}+\cdots+\dim V_{\lambda_s}$
4. $V_{\lambda_j}=\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})$
   Pf $\boldsymbol{\alpha}_j\in V_{\lambda_j}\Longleftrightarrow\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_j=\lambda_j\boldsymbol{\alpha}_j\Longleftrightarrow\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_j-\lambda_j\mathcal{I}\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{0}\Longleftrightarrow(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{0}\Longleftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_j\in\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})$

Def. 22　特征值的代数重数与几何重数

将特征值 λ_i 作为特征多项式的根的重数, 称为 λ_i 的代数重数; 将特征子空间 V_{λ_i} 的维数, 称为 λ_i 的几何重数.

Prop. 21　基于重数的线性变换可对角化判定定理

n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Longleftrightarrow$
$\mathcal{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$, 其中 $\lambda_1\neq\cdots\neq\lambda_s$; 并且特征值 λ_i 的代数重数, 等于 λ_i 的几何重数.

Pf

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_{11},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{1r_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{sr_s})=(\boldsymbol{\alpha}_{11},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{sr_s})\begin{pmatrix}\lambda_1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&\lambda_1&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&\lambda_s&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&\lambda_s\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow|\lambda\boldsymbol{I}-A|=\begin{vmatrix}\lambda-\lambda_1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&\lambda-\lambda_1&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&\lambda-\lambda_s&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&\lambda-\lambda_s\end{vmatrix}$$

2.4.4 矩阵的对角化

Def. 23 矩阵的可对角化

设 $\boldsymbol{A} \in \mathrm{M}_n(F)$, 若 $\boldsymbol{A}$ 相似于一个对角矩阵, 则称 $\boldsymbol{A}$ 可对角化

Prop. 22 矩阵可对角化判定定理

$\boldsymbol{A}$ 可对角化 $\Longleftrightarrow$ 存在域 F 上的一个 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得:

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Meth. 2 求可对角化矩阵的对角矩阵

2.5 不变子空间与线性变换的多项式

2.5.1 不变子空间的定义与例子

Def. 24 不变子空间

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的一个线性变换, W 是 V 的一个子空间, 若从 $\boldsymbol{\alpha} \in W$ 可推出 $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} \in W$, 则称 W 是 $\mathcal{A}$ 的一个不变子空间

Eg. 2 不变子空间的例子

1. $\{\mathbf{0}\}, V$ 都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间, 称为平凡的不变子空间
2. $\mathcal{A}$ 的特征子空间、$\operatorname{Ker}\mathcal{A}$、$\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 均是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间
   Pf $\boldsymbol{\alpha} \in V_{\lambda_1} \Longrightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha} \in V_{\lambda_1}$; $\boldsymbol{\beta} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$; $\mathcal{A}\boldsymbol{\gamma} \in \operatorname{Im}\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{A}\boldsymbol{\gamma}) \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$
3. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \operatorname{Hom}(V, V)$, 若 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, 则 $\mathcal{B}$ 的特征子空间、$\operatorname{Ker}\mathcal{B}$ 和 $\operatorname{Im}\mathcal{B}$ 均是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间
   Pf $\boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Ker}\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{B}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Ker}\mathcal{B}$; $\mathcal{B}\boldsymbol{\beta} \in \operatorname{Im}\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{B}\boldsymbol{\beta}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}\boldsymbol{\beta}) \in \operatorname{Im}\mathcal{B}$; 设 V_{μ_1} 是 $\mathcal{B}$ 的一个特征子空间, $\boldsymbol{\gamma} \in V_{\mu_1} \Longrightarrow \mathcal{B}\boldsymbol{\gamma} = \mu_1\boldsymbol{\gamma} \Longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A}\boldsymbol{\gamma}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}\boldsymbol{\gamma}) = \mu_1\mathcal{A}\boldsymbol{\gamma} \Longrightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{\gamma} \in V_{\mu_1}$
4. $\mathcal{A}$ 的不变子空间的交与和, 仍是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间
5. 设 $W = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \rangle$ 是 V 的一个子空间, 则:
   W 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间 $\Longleftrightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_i \in W,\ i = 1, \cdots, s$

2.5.2 线性变换的分块对角矩阵表示

Def. 25 限制变换

设 W 是 $\mathcal{A}$ 的一个不变子空间, $\mathcal{A}|_W$ 满足: $\forall \boldsymbol{\alpha} \in W, (\mathcal{A}|_W)\boldsymbol{\alpha} = \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}$, 即对应法则不变, 仅将定义域限制到 W 上, 则称 $\mathcal{A}|_W$ 为 $\mathcal{A}$ 在 W 上的一个限制变换.
易证, $\mathcal{A}|_W$ 是 W 上的一个线性变换

Prop. 23 基于不变子空间的分块对角矩阵结构定理

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, 满足:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_{11}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{1r_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{s1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{sr_s}) = (\boldsymbol{\alpha}_{11}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{sr_s}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix}$$

即 $\mathcal{A}$ 在基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为一个分块对角矩阵, 其中 $\boldsymbol{A}_i$ 是 r_i 级的矩阵, $i = 1, \cdots, s$
$\iff W_1 = \langle \boldsymbol{\alpha}_{11}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{1r_1} \rangle, \cdots, W_s = \langle \boldsymbol{\alpha}_{s1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{sr_s} \rangle$ 是 $\mathcal{A}$ 的非平凡不变子空间, 且 $V = \bigoplus_{i=1}^{s} W_i$, $\boldsymbol{A}_i$ 是 $\mathcal{A}|_{W_i}$ 在 W_i 的基 $\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{ir_i}$ 下的矩阵, $i = 1, \cdots, s$, 即:

$$(\mathcal{A}|_{W_i})(\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{ir_i}) = (\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{ir_i})\boldsymbol{A}_i$$

$\cdots$

2.5.3 零化多项式与 Hamilton-Cayley 定理

Def. 26 线性变换的多项式

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的一个线性变换, 则表达式:

$$b_m\mathcal{A}^m + \cdots + b_1\mathcal{A} + b_0\mathcal{I}$$

称为线性变换 $\mathcal{A}$ 的一个多项式.
$F[\mathcal{A}] := \{\mathcal{A} \text{ 的多项式}\} \subseteq \mathrm{Hom}(V, V)$, 根据域 F 上一元多项式环 $F[x]$ 的通用性质, 不定元 x 可以用 $F[\mathcal{A}]$ 的任一元素代入, 保持加法与乘法运算.
易证 $F[\mathcal{A}]$ 对于减法、乘法均封闭, 因此 $F[\mathcal{A}]$ 是 $\mathrm{Hom}(V, V)$ 的一个子环, 且是一个有单位元 $\mathcal{I}$ 的交换环; $F\mathcal{I} := \{k\mathcal{I} \mid k \in F\} = \{\mathcal{K} \mid k \in F\}$ 是 $F[\mathcal{A}]$ 的一个子环, 且有单位元 $\mathcal{I}$;
设 $\tau : F \to F\mathcal{I}, k \mapsto k\mathcal{I} = \mathcal{K}$, 易证, τ 是 F 到 $F\mathcal{I}$ 的一个环同构映射

Prop. 24　基于多项式互素的核空间直和分解定理

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的一个线性变换, $\mathcal{A}$ 的任何一个多项式 $f(\mathcal{A})$ 都与 $\mathcal{A}$ 可交换, 因此 $\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个不变子空间.
在 $F[x]$ 中, $f(x)=f_1(x)f_2(x)$, 且 $f_1(x), f_2(x)$ 互素, 则:

$$\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})=\operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A})\oplus\operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A})$$

.

Cor. 1

$f(x)=f_1(x)\cdots f_s(x)$, 且 $f_1(x),\cdots,f_s(x)$ 两两互素, 则:

$$\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})=\bigoplus_{i=1}^{s}\operatorname{Ker} f_i(\mathcal{A})$$

Pf　$\Longrightarrow f(\mathcal{A})=f_1(\mathcal{A})f_2(\mathcal{A})$
设 $\boldsymbol{\alpha}_1\in\operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A})\Longrightarrow f_2[(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})\boldsymbol{\alpha}_1]=f_2(\mathcal{A})(\mathbf{0})=\mathbf{0}$
$\Longrightarrow f(\mathcal{A})\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}\Longrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1\in\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$
$\Longrightarrow\operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A})\subseteq\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$, 同理 $\operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A})\subseteq\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$
由于 $f_1(x), f_2(x)$ 互素, 因此存在 $u(x), v(x)\in F[x]$, 使得 $u(x)f_1(x)+v(x)f_2(x)=1$
x 用 $\mathcal{A}$ 代入, 有 $u(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})+v(\mathcal{A})f_2(\mathcal{A})=\mathcal{I}$, 于是.

Def. 27　零化多项式

设 $\mathcal{A}\in\operatorname{Hom}(V,V), f(x)\in F[x]$, 若 $f(\mathcal{A})=\mathcal{O}$, 则称 $f(x)$ 为 $\mathcal{A}$ 的一个零化多项式.
设 $\boldsymbol{A}\in\mathrm{M}_n(F), f(x)\in F[x]$, 若 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$, 则称 $f(x)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个零化多项式.
设 $\mathcal{A}\in\operatorname{Hom}(V,V), \dim V=n$, $\mathcal{A}$ 在 V 的一个基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, $f(x)$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个零化多项式 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个零化多项式.

Eg. 3　投影变换的应用举例

环 $f(\lambda)$ 上的矩阵可以写为 λ 的幂乘域 F 上的矩阵之和.

. . . . . .

Thm. 8　Hamilton-Cayley 定理

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathrm{M}_n(F)$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个零化多项式
2. 设线性变换 $\mathcal{A}\in\operatorname{Hom}(V,V)$, $\mathcal{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个零化多项式

Pf $(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{*}(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| \boldsymbol{I}=f(\lambda) \boldsymbol{I}$

$$\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{pmatrix} \Longrightarrow (\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{*}=\begin{pmatrix} g_{11}(\lambda) & \cdots & g_{n1}(\lambda) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{1n}(\lambda) & \cdots & g_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

其中, $\deg g_{ij}(\lambda) \leq n-1$, 于是可以将伴随矩阵分解为:

$$(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{*}=\lambda^{n-1} \boldsymbol{B}_{n-1}+\lambda^{n-2} \boldsymbol{B}_{n-2} \cdots+\lambda \boldsymbol{B}_{1}+\boldsymbol{B}_{0}$$

其中 $\boldsymbol{B}_{i} \in \mathrm{M}_{n}(F), i=0,1, \cdots, n-1$, 且该式表法唯一
设 $f(\lambda)=\lambda^{n}+a_{n-1} \lambda^{n-1}+\cdots+a_{1} \lambda+a_{0}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda) \boldsymbol{I} &=(\lambda^{n-1} \boldsymbol{B}_{n-1}+\cdots+\lambda \boldsymbol{B}_{1}+\boldsymbol{B}_{0})(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) \\ &=\lambda^{n} \boldsymbol{B}_{n-1}+\cdots+\lambda^{2} \boldsymbol{B}_{1}+\lambda \boldsymbol{B}_{0}-\lambda^{n-1} \boldsymbol{B}_{n-1} \boldsymbol{A}-\cdots-\lambda \boldsymbol{B}_{1} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}_{0} \boldsymbol{A} \\ &=\lambda^{n} \boldsymbol{B}_{n-1}+\lambda^{n-1}(\boldsymbol{B}_{n-2}-\boldsymbol{B}_{n-1} \boldsymbol{A})+\cdots+\lambda(\boldsymbol{B}_{0}-\boldsymbol{B}_{1} \boldsymbol{A})-\boldsymbol{B}_{0} \boldsymbol{A} \\ &=\lambda^{n} \boldsymbol{I}+\lambda^{n-1} a_{n-1} \boldsymbol{I}+\cdots+\lambda a_{1} \boldsymbol{I}+a_{0} \boldsymbol{I} \end{aligned}$$

则: $\boldsymbol{B}_{n-1}=\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{B}_{n-2}-\boldsymbol{B}_{n-1} \boldsymbol{A}=a_{n-1} \boldsymbol{I}$, $\cdots$, $\boldsymbol{B}_{0}-\boldsymbol{B}_{1} \boldsymbol{A}=a_{1} \boldsymbol{I}$, $-\boldsymbol{B}_{0} \boldsymbol{A}=a_{0} \boldsymbol{I}$
对于上述等式, 依次右乘 $\boldsymbol{A}^{n}$, $\boldsymbol{A}^{n-1}$, $\cdots$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{I}$, 再全部相加, 得到:

$$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}^{n}+a_{n-1} \boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_{1} \boldsymbol{A}+a_{0} \boldsymbol{I}=f(\boldsymbol{A})$$

.

Thm. 9　根子空间直和分解定理

在 $F[\lambda]$ 中, $f(\lambda)=p_{1}^{r_{1}}(\lambda) \cdots p_{s}^{r_{s}}(\lambda)$, 其中 $p_{1}(\lambda), \cdots, p_{s}(\lambda)$ 是域 F 上两两不等的首一不可约多项式, 由于 $\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})=\operatorname{Ker}(\mathcal{O})=V$, 于是有:

$$V=\bigoplus_{i=1}^{s} \operatorname{Ker}[p_{i}^{r_{i}}(\mathcal{A})]$$

.
若在 $F(\lambda)$ 中, $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_{1})^{r_{1}} \cdots(\lambda-\lambda_{s})^{r_{s}}$, 其中 $\lambda_{1}, \cdots, \lambda_{s} \in F$ 两两不等, 则:

$$V=\bigoplus_{j=1}^{s} \operatorname{Ker}[(\mathcal{A}-\lambda_{j} \mathcal{I})^{r_{j}}]$$

将 $\operatorname{Ker}[(\mathcal{A}-\lambda_{j} \mathcal{I})^{r_{j}}]$ 称为 $\mathcal{A}$ 的根子空间, $j=1, \cdots, s$.

2.5.4 最小多项式

Def. 28 线性变换的最小多项式

设 $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V,V)$, 在 $\mathcal{A}$ 的所有非零的零化多项式中, 次数最低且首项系数为 1 的多项式, 称为 $\mathcal{A}$ 的最小多项式

Prop. 25 最小多项式的性质

1. $\mathcal{A}$ 的最小多项式是唯一的
2. 设 $m(\lambda)$ 是 $\mathcal{A}$ 的最小多项式, 则 $m(\lambda) \mid g(\lambda) \Longleftrightarrow g(\lambda)$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个零化多项式
   Pf $m(\lambda)$ 整除 $g(\lambda) \Longrightarrow g(\lambda) = h(\lambda)m(\lambda) \Longrightarrow g(\mathcal{A}) = h(\mathcal{A})\mathcal{O} = \mathcal{O}$;
   $g(\lambda) = h(\lambda)m(\lambda) + r(\lambda)$, $\deg r(\lambda) < \deg m(\lambda)$, 假设 $r(\lambda) \neq 0$, 则 λ 用 $\mathcal{A}$ 代入, 有 $g(\mathcal{A}) = h(\mathcal{A})m(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A}) = \mathcal{O} + r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, 于是 $r(\lambda)$ 也是零化多项式, 这与最小多项式定义矛盾, 因此 $r(\lambda) = 0$
3. $\mathcal{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 与最小多项式 $m(\lambda)$ 在域 F 中有相同的根 (重数可以不同), 且不随域的扩大而改变

Def. 29 矩阵的最小多项式

设 $\boldsymbol{A} \in \mathrm{M}_n(F)$, 在 $\boldsymbol{A}$ 的所有非零的零化多项式中, 次数最低且首项系数为 1 的多项式, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式

Thm. 10 线性变换与矩阵的最小多项式等价定理

设 $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V,V)$, $\mathcal{A}$ 在 V 的一个基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 则 $\mathcal{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的最小多项式.

Cor. 2

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 与最小多项式 $m(\lambda)$ 在 F 中有相同的根 (重数可以不同), 且不随域的扩大而改变

Prop. 26 最小多项式在相似关系下的不变性定理

相似矩阵有相同的最小多项式.
Pf 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{M}_n(F)$, 且 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$;
设 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 存在唯一的线性变换 $\mathcal{A}$, 使得 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$, 令 $(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{S}$, 则 $\mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{B} \Longrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$.

Thm. 11　线性变换最小多项式的分解定理

设 $\dim V=n$, $\mathcal{A}\in \mathrm{Hom}(V,V)$, $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_s$, W_i 均为 $\mathcal{A}$ 的非平凡不变子空间, $\mathcal{A}|_{W_j}$ 的最小多项式为 $m_j(\lambda),\ j=1,\cdots,s$, 则 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 为:

$$m(\lambda)=[m_1(\lambda),\cdots,m_s(\lambda)]$$

.

Cor. 3

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_n(F)$, 且 $\boldsymbol{A}_j$ 的最小多项式为 $m_j(\lambda),\ j=1,\cdots,s$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)=[m_1(\lambda),\cdots,m_s(\lambda)]$

Pf　任取 $\mathcal{A}$ 的一个零化多项式 $q(\lambda)$, 则 $q(\mathcal{A})=\mathcal{O}$

$\forall\boldsymbol{\alpha}_j\in W_j$, $q(\mathcal{A}|_{W_j})\boldsymbol{\alpha}_j=\mathcal{O}\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{0}$, 于是 $q(\mathcal{A}|_{W_j})=\mathcal{O}$, 从而 $q(\lambda)$ 是 $\mathcal{A}|_{W_j}$ 的一个零化多项式, 因此 $m(\lambda)\mid q(\lambda),\ j=1,\cdots,s$, 于是 $q(\lambda)$ 是 $m_1(\lambda),\cdots,m_s(\lambda)$ 的一个公倍式, 即 $\{\mathcal{A}$ 的非零零化多项式$\}=$

2.5.5　幂零变换

Def. 30　幂零变换、幂零指数

若有 $l\in\mathbb{N}^*$ 使得 $\mathcal{A}^l=\mathcal{O}$, 则称为幂零变换, 使得 $\mathcal{A}^l=\mathcal{O}$ 成立的最小正整数 l 称为 $\mathcal{A}$ 的幂零指数

Prop. 27　基于最小多项式的幂零变换判定定理

设 $\mathcal{A}$ 是幂零指数为 l 的幂零变换, 则 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)=\lambda^l$.

Pf　$\mathcal{A}^l=\mathcal{O}\Longrightarrow\lambda^l$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个零化多项式, 当 $0<t<l$ 时, $\mathcal{A}^t\neq\mathcal{O}\Longrightarrow\lambda^l$ 不是零化多项式, 因此 $m(\lambda)=\lambda^l$.

Prop. 28　基于最小多项式的可对角化判定定理

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是 $\mathcal{A}$ 的全部特征值, 则 $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_s)$, 即 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可以分解为不同的一次因式的乘积.

Cor. 4

幂零指数 $l>1$ 的幂零变换, 一定不可对角化

Cor. 5

幂等变换一定可对角化

Pf $V_{\lambda_j}=\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})\Longleftrightarrow\forall\boldsymbol{\alpha}_j\in V_{\lambda_j},(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})\boldsymbol{\alpha}_j=\left[\mathcal{A}|_{V_{\lambda_j}}-\lambda_j(\mathcal{I}|_{V_{\lambda_j}})\right]\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{0}\Longleftrightarrow\mathcal{A}|_{V_{\lambda_j}}-\lambda_j(\mathcal{I}|_{V_{\lambda_j}})=\mathcal{O}\Longleftrightarrow\lambda-\lambda_j$ 是 $\mathcal{A}|_{V_{\lambda_j}}$ 的一个零化多项式, 由于最小多项式非零, $\mathcal{A}|_{V_{\lambda_j}}$ 的最小多项式为 $\lambda-\lambda_j\Longleftrightarrow m(\lambda)=[\lambda-\lambda_1,\cdots,\lambda-\lambda_s]$, $j=1,\cdots,s$.

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, $\mathcal{A}$ 的最小多项式为 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可分解为 $m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s}$, 其中 $\lambda_1\neq\cdots\neq\lambda_s$, 则 $V=\mathrm{Ker}\left((\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{I})^{l_1}\right)\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}\left((\mathcal{A}-\lambda_s\mathcal{I})^{l_s}\right)$, 令 $W_j=(\mathcal{A}-\lambda_s\mathcal{I})^{l_s}$, $\forall\boldsymbol{\alpha}_j\in W_j$, $(\mathcal{A}|_{W_j}-\lambda_j\mathcal{I}|_{W_j})^{l_j}\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{0}$, 于是 $(\mathcal{A}|_{W_j}-\lambda_j\mathcal{I}|_{W_j})^{l_j}=\mathcal{O}$, 从而 $(\lambda-\lambda_j)^{l_j}$ 是 $\mathcal{A}|_{W_j}$ 的一个零化多项式, 因此 $\mathcal{A}|_{W_j}$ 的一个最小多项式 $m_j(\lambda)=(\lambda-\lambda_j)^{t_j}$, $t_j\leq l_j$, 于是 $m(\lambda)=[(\lambda-\lambda_1)^{t_1},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{t_s}]=(\lambda-\lambda_1)^{t_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{t_s}$, 据唯一因式分解定理, $t_j=l_j$, 因此 $\mathcal{A}|_{W_j}$ 的最小多项式 $m_j(\lambda)=(\lambda-\lambda_j)^{l_j}$.

设 $\mathcal{A}|_{W_j}$ 在 W_j 的一个基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}_j$, 令 $\mathcal{B}_j=\mathcal{A}|_{W_j}-\lambda_j\mathcal{I}|_{W_j}$, 则 $\mathcal{B}^{l_j}=\mathcal{O}$, 因此 $\mathcal{B}_j$ 是 W_j 上的一个幂零变换, 幂零指数为 l_j, $\mathcal{B}_j$ 在上述基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}_j-\lambda_j\boldsymbol{I}$.

2.6 Jordan 标准型

对于线性变换的矩阵表示, 最理想的简单形式为对角矩阵, 但并非每一个矩阵都可对角化. 对于不可对角化的矩阵, Jordan 标准型为为其最简单的形式, Jordan 标准形是对对角化的扩展. 在复数域上, 任何一个 n 级矩阵都可以化为一个 Jordan 形矩阵, 即矩阵的 Jordan 标准型.

2.6.1 幂零变换的 Jordan 标准型

Lem. 1 幂零变换下的像线性无关

设 $\mathcal{A}\in\mathrm{Hom}(V,V)$, 若 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$, $\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$, $\mathcal{A}^m\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, $m\in\mathbb{N}^*$, 则 $\boldsymbol{\alpha},\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

Pf 设 $k_0\boldsymbol{\alpha}+k_1\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_{m-1}\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 依次做如下变换:

$$\mathcal{A}^{m-1}(k_0\boldsymbol{\alpha}+k_1\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_{m-1}\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha})=k_0\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}\Longrightarrow k_0=0$$

$$\mathcal{A}^{m-2}(k_0\boldsymbol{\alpha}+k_1\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_{m-1}\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha})=k_1\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}\Longrightarrow k_1=0$$

$$\cdots$$

$\Longrightarrow k_0=k_1=\cdots=k_{m-1}=0\Longrightarrow$ 像 $\boldsymbol{\alpha},\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}$ 是线性无关的.

Def. 31　Jordan 块

设域 F 上 t 级矩阵形如:

$$\mathbf{J}_t(a) := \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

则称该矩阵为主对角元为 a 的一个 t 级 Jordan 块

Def. 32　Jordan 形矩阵

由若干个 Jordan 块组成的分块对角矩阵, 称为一个 Jordan 形矩阵

Def. 33　循环子空间、强循环子空间

域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换 $\mathcal{A}$, 如果存在 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \mathcal{A}^{t-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关, 且 $\mathcal{A}^r\boldsymbol{\alpha} \in \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \mathcal{A}^{t-1}\boldsymbol{\alpha} \rangle$, 则称 $\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \mathcal{A}^{t-1}\boldsymbol{\alpha} \rangle$ 是一个 $\mathcal{A}$-循环子空间.

若一个 $\mathcal{A}$-循环子空间还满足 $\mathcal{A}^t = \mathbf{0}$, 则称是一个 $\mathcal{A}$-强循环子空间.

Prop. 29　幂零变换判定定理

设 $\mathcal{B}$ 是域 F 上 r 维线性空间 W 上的一个幂零变换, 其幂零指数为 $l \leq r$.

Pf　$\mathcal{B}^l = \mathcal{O}$, $\mathcal{B}^{l-1} \neq \mathcal{O}$, 于是 $\exists \boldsymbol{\xi} \in W(\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0})$, s.t. $\mathcal{B}^{l-1}\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$, $\mathcal{B}\boldsymbol{\xi} \equiv \mathbf{0}$, 根据 Lem in 1, 有 $\mathcal{B}^{l-1}\boldsymbol{\xi}, \cdots, \mathcal{B}\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}$ 线性无关, 从而 $l \leq \dim W = r$

1. $\langle \mathcal{B}^{l-1}\boldsymbol{\xi}, \cdots, \mathcal{B}\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle$ 是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间, $\mathcal{B}|_{\langle \mathcal{B}^{l-1}\boldsymbol{\xi}, \cdots, \mathcal{B}\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle}$ 在基 $\mathcal{B}^{l-1}\boldsymbol{\xi}, \cdots, \mathcal{B}\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}$ 下的矩阵为一个 Jordan 块:

$$\mathbf{J}_l(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $\langle \mathcal{B}^{l-1}\boldsymbol{\xi}, \cdots, \mathcal{B}\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle$ 是一个 $\mathcal{B}$-强循环子空间

Thm. 12　幂零变换的强循环子空间直和分解定理

设 $\mathcal{B}$ 是域 F 上 r 维线性空间 W 上的一个幂零变换, 其幂零指数为 l, 则 W 可分解为 $\dim W_0$ 个 $\mathcal{B}$-强循环子空间的直和, 其中 W_0 为 $\mathcal{B}$ 的属于特征值 0 的特征子空间.

Pf 对维数 r 做第二数学归纳法: 当 $r=1$ 时, $W=\langle\boldsymbol{\alpha}\rangle$, 此时 $l=1$, 于是 $\mathcal{B}=\mathcal{O}$, $\mathcal{O}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, 因此 $\langle\boldsymbol{\alpha}\rangle$ 是一个 $\mathcal{O}$-强循环子空间; 假设对于维数小于 r 的线性空间, 命题为真; 若 $l=1$, 则 $\mathcal{B}=\mathcal{O}$, W 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1\cdots\boldsymbol{\alpha}_r$, 则 $W=\langle\boldsymbol{\alpha}_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\boldsymbol{\alpha}_r\rangle$, 由于 $\mathcal{O}\boldsymbol{\alpha}_j=\mathbf{0}$, 因此 $\langle\boldsymbol{\alpha}_j\rangle$ 是一个 $\mathcal{O}$-强循环子空间; 假设 $l>1$, 此时 $\mathcal{B}\neq\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$ 有特征值 0, 于是 $\mathcal{B}$ 的属于特征值 0 的特征子空间 $W_0\neq\{\mathbf{0}\}$, 由于 $\mathcal{B}\neq\mathcal{O}$, 因此 $W_0\neq W$, 从而 $1\leq\dim(W/W_0)=\dim W-\dim W_0<\dim W=r$

$\tilde{\mathcal{B}}:W/W_0\to W/W_0,\boldsymbol{\alpha}+W_0\mapsto\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}+W_0$, 易证, $\tilde{\mathcal{B}}$ 是 W/W_0 上的一个线性变换, $\forall\boldsymbol{\alpha}+W_0\in W/W_0$, 有 $\tilde{\mathcal{B}}^l(\boldsymbol{\alpha}+W_0)=\mathcal{B}^l\boldsymbol{\alpha}+W_0=\mathcal{O}\boldsymbol{\alpha}+W_0=W_0$, 因此 $\tilde{\mathcal{B}}$ 是 W/W_0 上的一个幂零变换, 对 W/W_0 用归纳假设, 得:

$$W/W_0=\underbrace{\langle\tilde{\mathcal{B}}^{t_1-1}(\boldsymbol{\xi}_1+W_0),\cdots,(\boldsymbol{\xi}_1+W_0)\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\tilde{\mathcal{B}}^{t_s-1}(\boldsymbol{\xi}_s+W_0),\cdots,(\boldsymbol{\xi}_s+W_0)\rangle}_{\text{均为 }\tilde{\mathcal{B}}\text{-强循环子空间}}$$

$\Longrightarrow$ 商空间得一个基为 $\mathcal{B}^{t_1-1}\boldsymbol{\xi}_1+W_0,\cdots,\boldsymbol{\xi}_1+W_0,\cdots,\mathcal{B}^{t_s-1}\boldsymbol{\xi}_s+W_0,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s+W_0$,

令 $U=\langle\mathcal{B}^{t_1-1}\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\mathcal{B}^{t_s-1}\boldsymbol{\xi}_s,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s\rangle=\langle\mathcal{B}^{t_1-1}\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_1\rangle,\cdots,\langle\mathcal{B}^{t_s-1}\boldsymbol{\xi}_s,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s\rangle$ By Thm 2 in 39, $W=U\oplus W_0$, 由于 $\mathcal{B}^{t_1}\boldsymbol{\xi}_1+W_0=\tilde{\mathcal{B}}^{t_1}(\boldsymbol{\xi}_1+W_0)=W_0\Longrightarrow\mathcal{B}^{t_1}\in W_0\Longrightarrow\mathcal{B}^{t_1+1}\boldsymbol{\xi}_1=\mathcal{B}\underbrace{(\mathcal{B}^{t_1}\boldsymbol{\xi}_1)}_{\in W_0}=.$

Prop. 30 幂零变换的 Jordan 标准型判定定理

设 $\mathcal{B}$ 是域 F 上的一个 r 维线性空间 W 上的一个幂零变换, 其幂零指数为 l, 则在 W 中存在一个基, 使得 $\mathcal{B}$ 在此基下的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是一个 Jordan 形矩阵, 并且

1. 每一个 Jordan 块的主对角元为 0;
2. 每一个 Jordan 块级数不超过 l;
3. Jordan 块的总数为 $\dim W_0=\dim(\operatorname{Ker}\mathcal{B})=r-\operatorname{rank}(\mathcal{B})$;
4. t 级 Jordan 块的个数

$$N(t)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^{t-1})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^{t+1})-2\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^t)=\operatorname{rank}(\mathcal{B}^{t-1})+\operatorname{rank}(\mathcal{B}^{t+1})-2\operatorname{rank}(\mathcal{B}^t)$$

Pf Jordan 块是循环位移矩阵,

$\operatorname{rank}[\mathbf{J}_t(0)]=t-1,\ \operatorname{rank}[\mathbf{J}_t(0)^2]=t-2,\ \cdots,\ \operatorname{rank}[\mathbf{J}_t(0)^{t-1}]=1,\ \operatorname{rank}(\mathbf{J}_t(0)^t)=0$

$\operatorname{rank}(\mathcal{B})=\sum_{t=1}^{l}N(t)\operatorname{rank}(\mathbf{J}_t)=\sum_{t=1}^{l}N(t)\times(t-1)$

$\operatorname{rank}(\mathcal{B}^2)=$

$\operatorname{rank}(\mathcal{B}^{t-1})=N(t)$

$\operatorname{rank}(\mathcal{B}^t)=$

$\operatorname{rank}(\mathcal{B}^{t+1})=$

这个 Jordan 形矩阵 $\boldsymbol{B}$, 称为幂零变换 $\mathcal{B}$ 的 Jordan 标准型, 除了 Jordan 块的排列次序外, $\mathcal{B}$ 的 Jordan 标准型是唯一的.

Cor. 6

设 $\boldsymbol{B}$ 是域 F 上的一个幂零矩阵, 其幂零指数为 l, 则 $\mathcal{B}$ 一定相似于一个 Jordan 形矩阵, 每一个 Jordan 块的主对角元均为 0, 级数不超过 l, 总数为 $r-\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$, $N(t)=\operatorname{rank}[\boldsymbol{B}^{t-1}]+\operatorname{rank}[\boldsymbol{B}^{t+1}]-2\operatorname{rank}[\boldsymbol{B}^{t}]$, 这个 Jordan 形矩阵称为幂零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 Jordan 标准型, 除 Jordan 块的排列顺序外, 是唯一的

2.6.2 线性变换与矩阵的 Jordan 标准型

Prop. 31 线性变换的 Jordan 标准型判定定理

设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, 如果 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中的标准分解式为 $m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s}$, 则

1. V 中有一个基, 使得 $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为一个 Jordan 形矩阵
2. 其主对角线上的元素, 是 $\mathcal{A}$ 的全部特征值
3. 主对角元为 λ_j 的 Jordan 块的总数 $N_j=n-\operatorname{rank}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})$
4. 主对角元为 λ_j 的 t 级 Jordan 块的个数为
   $N_j(t)=\operatorname{rank}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{t-1}+\operatorname{rank}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{t+1}-2\operatorname{rank}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{t},\ 1\leq t\leq l_j$

这个 Jordan 形矩阵 $\boldsymbol{A}$, 称为线性变换 $\mathcal{A}$ 的 Jordan 标准型, 除了 Jordan 块的排列次序外, $\mathcal{A}$ 的 Jordan 标准型是唯一的.

Cor. 7

矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n(F)$, 其最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 能分解为一次因式的乘积, 则 $\boldsymbol{A}$ 相似于一个 Jordan 形矩阵, 其主对角线元素为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值, 主对角元为 λ_j 的 Jordan 块的总数 $N_j=n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})$, t 级 Jordan 块的个数为
$N_j(t)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})^{t-1}+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})^{t+1}-2\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})^{t},\ 1\leq t\leq l_j$, 这个 Jordan 形矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准型, 除 Jordan 块的排列顺序外, 是唯一的

Pf $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是 $\mathcal{A}$ 所有不同的特征值, 且 $V=\bigoplus\limits_{i=1}^{s}\operatorname{Ker}\left[(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{I})^{l_i}\right]=\bigoplus\limits_{i=1}^{s}W_i$, 令 $\mathcal{B}_j=\mathcal{A}|_{W_j}-\lambda_j\mathcal{I}|_{W_j}$, 则 $\mathcal{B}_j$ 是 W_j 上的幂零变换, 其幂零指数为 l_j, W_j 中取一个基, 使得 $\mathcal{B}_j$ 在此基下的矩阵 $\boldsymbol{B}_j$ 是一个 Jordan 形矩阵, 设 $\mathcal{A}|_{W_j}$ 在 W_j 此基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}_j$, 则 $\boldsymbol{A}_j=\lambda_j\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_j$, 于是 $\boldsymbol{A}_j$ 是主对角元为 λ_j 的 Jordan 形矩阵, 因此, $\mathcal{A}$ 在 W_j 的全部的基合起来组成的 V 的一个基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个 Jordan 形矩阵.

$\forall m\in\mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Ker}(\mathcal{A}|_{W_j}-\lambda_j\mathcal{I}|_{W_j})^m\iff\boldsymbol{\alpha}\in W_j$ 且$(\mathcal{A}|_{W_j}-\lambda_j\mathcal{I}|_{W_j})^m\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}\iff\boldsymbol{\alpha}\in W_j$ 且$(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^m\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}\iff\boldsymbol{\alpha}\in\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^m\Longrightarrow N(j)=\dim(\operatorname{Ker}\mathcal{B}_j)=\dim[\operatorname{Ker}(\mathcal{A}|_{W_j}-\lambda_j\mathcal{I}|_{W_j})]=\dim[\ker(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})]=\dim V-\operatorname{rank}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})$

$N_j(t)=\operatorname{rank}(\mathcal{B}_j^{t-1})+\operatorname{rank}(\mathcal{B}_j^{t+1})-2\operatorname{rank}(\mathcal{B}_j^{t})=2\dim(\operatorname{Ker}\mathcal{B}^t)-\dim(\operatorname{Ker}\mathcal{B}^{t-1})-\dim(\operatorname{Ker}\mathcal{B}^{t+1})$
$=2\dim[\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^t]-\dim[\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{t-1}]-\dim[\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{t+1}]$

$= \operatorname{rank}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{t-1} + \operatorname{rank}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{t+1} - 2\operatorname{rank}(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{t}$

Prop. 32　线性变换存在 Jordan 标准型的条件

设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, 则 $\mathcal{A}$ 有 Jordan 标准型 $\Longleftrightarrow$

1. $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可分解为一次因式的乘积
2. $\mathcal{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可分解为一次因式的乘积

Prop. 33　矩阵存在 Jordan 标准型的条件

设 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{M}_n(F)$, $\boldsymbol{A}$ 相似于一个 Jordan 形矩阵 $\Longleftrightarrow$
$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 或最小多项式 $m(\lambda)$, 在 $F[\lambda]$ 可以分解为一次因式的乘积.

Thm. 13　Jordan 标准型定理

复方阵一定有 Jordan 标准型.
根据代数基本定理与复系数多项式唯一因式分解定理可得.

Cor. 8

任意一个 n 级复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都相似于一个 Jordan 形矩阵 $\mathbf{J}$, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得:

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

Prop. 34　矩阵相似判定定理

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in \boldsymbol{M}_n(F)$, 如果二者的特征多项式或最小多项式, 在 $F[\lambda]$ 可以分解为一次因式的乘积, 则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Longleftrightarrow$
$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的 Jordan 标准型 (除 Jordan 块的排列顺序外).
Pf　设 $\boldsymbol{A}\sim\mathbf{J}_1$, $\boldsymbol{B}\sim\mathbf{J}_2$, 则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Longleftrightarrow\mathbf{J}_1\sim\mathbf{J}_2\Longleftrightarrow\mathbf{J}_1$ 与$\mathbf{J}_2$ 都是 $\mathcal{A}$ 的 Jordan 标准型 $\Longleftrightarrow\mathbf{J}_1$ 与 $\mathbf{J}_2$ 是一样的 (除 Jordan 块排列顺序外)

Prop. 35　复矩阵相似判定定理

两个 n 级复矩阵相似 $\Longleftrightarrow$ 二者有相同的 Jordan 标准型 (除 Jordan 块排列顺序外).

2.7　线性函数与对偶空间

Def. 34　线性函数

设 f 是域 F 上的线性空间 V 到 F 的一个线性映射, 即 f 是 V 到 F 的一个映射, 且满足:

1. $f(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=f(\boldsymbol{\alpha})+f(\boldsymbol{\beta})$, $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ (保持加法);
2. $f(k\boldsymbol{\alpha})=kf(\boldsymbol{\alpha})$, $\forall k\in F,\boldsymbol{\alpha}\in V$ (保持纯量乘法),

则称 f 为 V 上的一个线性函数.
设 $\dim V = n$, V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, $\forall \boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n \in V$, 则 $f(\boldsymbol{\alpha}) = x_1 f(\boldsymbol{\alpha}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{\alpha}_n)$, 将此式称为 f 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的表达式.

Eg. 4　线性函数的例子

1. 矩阵的迹 $\mathrm{tr} : \boldsymbol{M}_n(F) \to F, \boldsymbol{A} = (a_{ij}) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ 是 $\boldsymbol{M}_n(F)$ 上的一个线性函数, 称为迹函数
2. 给定 $a_1, \cdots, a_n \in F$, $f : F^n \to F, \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ 是 F^n 上的一个线性函数, 称为 $x_1, \cdots, x_n$ 的一次齐次函数

Prop. 36　线性函数的构造

任给 $a_1, \cdots, a_n$, 存在唯一的线性函数 f, 使得 $f(\boldsymbol{\alpha}_i) = a_i$, $i = 1, \cdots, n$, 于是 $f(\boldsymbol{\alpha}) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$.

Def. 35　对偶空间

$\mathrm{Hom}(V, F) = \{V \text{ 上线性函数}\}$ 是域 F 上的线性空间, 称为 V 上的线性函数空间.
若 V 是有限维的, 则将 $\mathrm{Hom}(V, F)$ 记作 V^*, 称 V^* 为 V 的对偶空间.

Thm. 14　对偶空间的维数公式与同构

设 $\dim V = n$, V^* 为 V 的对偶空间, 则有

$$\dim V^* = (\dim V)(\dim F) = \dim V = n$$

$$V^* \cong V$$

Def. 36　对偶基

V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, V^* 的一个基 $f_1, \cdots, f_n$ 满足:

$$f_i(\boldsymbol{\alpha}_j) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, n$$

则将 $f_1, \cdots, f_n$ 称为 V 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的对偶基.
Pf

F 中给定 n 个元素	V 上的线性函数
$1,0,\cdots,0$	$\exists f_1$ s.t. $f_1(\boldsymbol{\alpha}_1)=1, f_1(\boldsymbol{\alpha}_j)=0, j\neq 1$
$0,1,\cdots,0$	$\exists f_2$ s.t. $f_2(\boldsymbol{\alpha}_2)=1, f_2(\boldsymbol{\alpha}_j)=0, j\neq 2$
$\vdots$	$\vdots$
$0,0,\cdots,1$	$\exists f_n$ s.t. $f_n(\boldsymbol{\alpha}_n)=1, f_n(\boldsymbol{\alpha}_j)=0, j\neq n$

设 $k_1f_1+\cdots+k_nf_n=\mathbf{0}$, 则

$$k_1f_1(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2f_2(\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_nf_n(\boldsymbol{\alpha}_1)=0\Longrightarrow k_1=0$$

$$k_1f_1(\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2f_2(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_nf_n(\boldsymbol{\alpha}_2)=0\Longrightarrow k_2=0$$

$$\vdots$$

$$k_1f_1(\boldsymbol{\alpha}_n)+k_2f_2(\boldsymbol{\alpha}_n)+\cdots+k_nf_n(\boldsymbol{\alpha}_n)=0\Longrightarrow k_n=0$$

从而 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性无关, 又由于 $\dim V^*=n$, 因此 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 V^* 的一个基.

Prop. 37　向量与线性函数的坐标

1. V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i$, 则 $f_j(\boldsymbol{\alpha})=\sum\limits_{i=1}^{n}x_if_j(\boldsymbol{\alpha}_i)=x_j$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_i$
2. V^* 中任一元素 $f=\sum\limits_{j=1}^{n}k_jf_j$, 则 $f(\boldsymbol{\alpha}_i)=\sum\limits_{j=1}^{n}k_jf_j(\boldsymbol{\alpha}_i)=k_i$, 因此 $f=\sum\limits_{j=1}^{n}f(\boldsymbol{\alpha}_j)f_j$

Thm. 15　对偶基过渡矩阵定理

设 V 是域 F 上 n 维线性空间, V 中取两个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$, 过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 有 $(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$; V^* 中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的对偶基为 $f_1,\cdots,f_n$, $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的为 $g_1,\cdots,g_n$, 过渡矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 有 $(g_1,\cdots,g_n)=(f_1,\cdots,f_n)\boldsymbol{B}$, 则

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^{-1})^T$$

.

Pf　$(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&c_{1n}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ c_{n1}&\cdots&c_{nj}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_j=\sum\limits_{i=1}^{n}c_{ij}\boldsymbol{\beta}_i=\sum\limits_{i=1}^{n}g_i(\boldsymbol{\alpha}_j)\boldsymbol{\beta}_i$, 于是 $c_{ij}=g_i(\boldsymbol{\alpha}_j)$;

$(g_1,\cdots,g_n)=(f_1,\cdots,f_n)\boldsymbol{B}=(f_1,\cdots,f_n)\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1i}&\cdots&b_{1n}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ b_{n1}&\cdots&b_{ni}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}$, 则 $g_i=\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ji}f_j=$

$\sum_{j=1}^{n} g_i(\boldsymbol{\alpha}_j)f_j$, 于是 $b_{ji} = g_i(\boldsymbol{\alpha}_j) = c_{ij}$, 因此 $\boldsymbol{B}(j;i) = \boldsymbol{A}^{-1}(i;j) =^{(} \boldsymbol{A}^{-1})^T(j;i)$, $i,j = 1,\cdots,n$

Def. 37　双重对偶空间

设 $\dim V = n$, V^* 的对偶空间为 $(V^*)^*$, 将其称为双重对偶空间, 简记作 V^{**}, 有:

$$\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$$

$$V^{**} \cong V^* \cong V$$

Thm. 16　双重对偶定理

V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, V^* 中关于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的对偶基为 $f_1,\cdots,f_n$, V^{**} 中关于 $f_1,\cdots,f_n$ 的对偶基记作 $\boldsymbol{\alpha}_1^{**},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n^{**}$, 有同构映射 σ,τ:

$$V \xrightarrow{\sigma} V^* \xrightarrow{\tau} V^{**}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{\alpha}_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{\alpha}_i^{**} =: \boldsymbol{\alpha}^{**}$$

$$\begin{aligned}\forall f \in V^*,\ \boldsymbol{\alpha}^{**}(f) &= (\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{\alpha}_i^{**})(f) = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{\alpha}_i^{**}(f) = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{\alpha}_i^{**}[\sum_{j=1}^{n} f(\boldsymbol{\alpha}_j)f_j] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i f(\boldsymbol{\alpha}_j)\boldsymbol{\alpha}_i^{**}(f_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i f(\boldsymbol{\alpha}_j)\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\boldsymbol{\alpha}_i) \\ &= f(\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{\alpha}_i) = f(\boldsymbol{\alpha}) \Longrightarrow \boldsymbol{\alpha}^{**}(f) = f(\boldsymbol{\alpha})\end{aligned}$$

于是 V 到 V^{**} 有一个同构映射 $\tau\sigma : \boldsymbol{\alpha} \mapsto \boldsymbol{\alpha}^{**}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}^{**}(f) = f(\boldsymbol{\alpha})$, 这种不依赖于基的选择的同构映射, 称为自然同构, 可将 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}^{**}$ 等同, 从而可将 V 与 V^{**} 等同, 于是 V 可以看作 V^* 的对偶空间, 因此 V 与 V^* 互为对偶空间.

3　具有度量的线性空间

3.1　双线性函数

3.1.1　双线性函数的概念与性质

Def. 1　双线性函数

设 V 是域 F 中的一个线性空间, $V \times V$ 到 F 的一个映射如果满足:

1. $f(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}) = k_1 f(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}) + k_2 f(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta})$, $\forall \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta} \in V, k_1, k_2 \in F$;
2. $f(\boldsymbol{\alpha}, l_1\boldsymbol{\beta}_1 + l_2\boldsymbol{\beta}_2) = l_1 f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_1) + l_2 f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_2)$, $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2 \in V, l_1, l_2 \in F$,

则称 f 是 V 上的一个双线性函数.

双线性函数给出线性函数:

1. 任给 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, $\boldsymbol{\alpha}_L(\boldsymbol{\beta}) := f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, $\forall \boldsymbol{\beta} \in V$, $\boldsymbol{\alpha}_L$ 是 V 上的一个线性函数
2. 任给 $\boldsymbol{\beta} \in V$, $\boldsymbol{\beta}_R(\boldsymbol{\alpha}) := f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$, $\boldsymbol{\beta}_R$ 是 V 上的一个线性函数

Def. 2　度量矩阵

设 $\dim V = n$, V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, V 中向量 $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)X$, $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)Y$, 设 f 是 V 上的双线性函数, 则

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{\alpha}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{\alpha}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i f(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j)\right] y_j \\
&= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_1) & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T \boldsymbol{A} Y
\end{aligned}
$$

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 f 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的度量矩阵.
将 $f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i y_j f(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = X^T \boldsymbol{A} Y$ 称为 f 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的表达式.

Cor. 1

反之, 任给 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}_n(F)$, 令 $f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) := X^T \boldsymbol{A} Y$, 易证 f 是 V 上的一个双线性函数, 且 f 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的度量矩阵即为 $\boldsymbol{A}$

Thm. 1　双线性函数在不同基下的矩阵

设 f 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数, V 中基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}$, f 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 下的度量矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 则有:

$$
\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}
$$

即, f 在 V 的不同的两个基下的度量矩阵, 是合同的.

Pf　设 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_j & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}$,

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_j,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_j & \cdots & \boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}\Longrightarrow \boldsymbol{\beta}_j=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{p}_j,$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}f(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_n)\\ \vdots & & \vdots\\ f(\boldsymbol{\beta}_n,\boldsymbol{\beta}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{\beta}_n,\boldsymbol{\beta}_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_1^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{p}_n^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{p}_n^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{p}_n^T\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^T,\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P},\Longrightarrow \boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

3.1.2 矩阵的合同

Def. 3 合同矩阵、合同类

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_n(F)$, 若存在域 F 上 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是合同的, 记作 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$.
合同关系是 $\boldsymbol{M}_n(F)$ 上的一个等价关系, 合同关系下的等价类, 称为合同类.

Prop. 1 合同矩阵的秩相等

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_n(F)$, 若 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$, 则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})$.
Pf $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}\Longrightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}$ 可逆 $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{P}$ 满秩, 从而合同不改变矩阵的秩.

Def. 4 矩阵秩

由于合同矩阵的秩相同, 将双线性函数 f 在 V 的一个基下度量矩阵的秩, 称为 f 的矩阵秩, 记作 $\mathrm{rank}_m(f)$.

Cor. 2

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_n(F)$, 若 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$, 则可以将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 看作域 F 上 n 维线性空间 V 上同一个双线性函数 f 在 V 的不同基下的度量矩阵

3.1.3 非退化双线性函数

Def. 5 双线性函数的左根和右根

设 f 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数

1. $\mathrm{rad}_L\ V:=\{\boldsymbol{\alpha}\in V\mid f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0,\ \forall\boldsymbol{\beta}\in V\}$, 称为 f 在 V 中的左根
2. $\mathrm{rad}_L\ V:=\{\boldsymbol{\alpha}\in V\mid f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0,\ \forall\boldsymbol{\beta}\in V\}$, 称为 f 在 V 中的左根

易证, 二者均是 V 的子空间

Def. 6　非退化双线性函数

若双线性函数 f 在 V 上的左根和右根都是 $\{\mathbf{0}\}$, 则称 f 是非退化的.

Prop. 2　非退化的判定

域 F 上 n 维线性空间 V 上的双线性函数 f 是非退化的 $\Longleftrightarrow$

1. f 在 V 中一个基下的度量矩阵是满秩矩阵
2. $\mathrm{rank}_m(f)n$

Pf　V 中取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, f 在此基下的度量矩阵为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标为 X, $\boldsymbol{\beta}$ 的坐标为 Y, $\boldsymbol{\alpha}\in \mathrm{rad}_L\ V \Longleftrightarrow f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0,\ \forall \boldsymbol{\beta}\in V \Longleftrightarrow X^T\boldsymbol{A}Y=0,\ \forall Y\in F^n \Longleftrightarrow X^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i=0,\ i=1,\cdots,n \Longleftrightarrow X^T\boldsymbol{A} \Longleftrightarrow X^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}=0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{A}^TX=0 \Longleftrightarrow X$ 是 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^TZ=0$ 的一个解, $\boldsymbol{A}^TZ=0$ 只有零解 $\Longleftrightarrow \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^T)=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=n$.

3.1.4　对称和斜对称双线性函数

Def. 7　对称双线性函数与斜对称双线性函数

域 F 上线性空间 V 上的双线性函数 f:

1. 若 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=f(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}),\ \forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$, 则称 f 是对称的
2. 若 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=-f(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}),\ \forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$, 则称 f 是斜对称的

Prop. 3　对称与斜对称的判定

$\dim V=n$, f 在 V 的一个基下的度量矩阵 $\boldsymbol{A}$
f 是对称的 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, f 是斜对称的 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 是斜对称矩阵.

Thm. 2

设 f 是特征不为 2 域 F 上的 n 维线性空间 V 上的一个对称双线性函数, 则 V 中存在一个基, 使得 f 在此基下的度量矩阵是对角矩阵.

Cor. 3

特征不为 2 的域 F 上 n 级对称矩阵 $\boldsymbol{A}$

Pf　对线性空间的维数 n 作数学归纳法.

3.2 实内积空间的结构

3.2.1 实线性空间的内积

Def. 8 正定对称双线性函数

实数域上的线性空间 V 上的对称双线性函数 f, 如果满足: $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V,\ f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0,$ 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 时取等, 则称 f 是正定的

Def. 9 正定矩阵

n 级实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 若满足: $X^T \boldsymbol{A} X > 0,\ \forall X \in \mathbb{R}^n$ 且 $X \neq \mathbf{0}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵

Prop. 4 双线性函数正定判定定理

n 维实线性空间 V 上的对称双线性函数 f 是正定的 $\Longleftrightarrow$
f 在 V 的一个基下的度量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足: $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

Def. 10 内积

实线性空间 V 上的一个正定对称双线性函数 f, 称为 V 上的一个内积, 将 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积记为 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$.

Def. 11 实内积空间、欧几里得空间

若实线性空间 V 定义了一个内积, 则称 V 是一个实内积空间, 有限维的实内积空间, 称为欧几里得空间.

Def. 12 标准内积

$\mathbb{R}^n$ 中, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, 令 $(X, Y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T Y$, 则 $(\ ,\ )$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个内积, 称为 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积

Pf $(X, Y) = X^T Y = X^T \boldsymbol{I} Y \Longrightarrow (\ ,\ )$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的度量矩阵是单位矩阵 $\boldsymbol{I}$, 从而 $(\ ,\ )$ 是对称的; $\forall X \in \mathbb{R}^n$ 且 $X \neq \mathbf{0}$, $(X, X) = X^T X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$, 因此 $(\ ,\ )$ 是正定对称双线性函数, 即内积.

3.2.2 实内积空间的度量

设 V 是一个实内积空间

Def. 13　向量的长度、单位向量、单位化

V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度 $|\boldsymbol{\alpha}| := \sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$, 有

$$|k\boldsymbol{\alpha}| = |k||\boldsymbol{\alpha}|,\ \forall k \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$$

若 $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量.
若 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, 则 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个单位向量, 称为将 $\boldsymbol{\alpha}$ 单位化.

Thm. 3　Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz 不等式

$\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V,\ |(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| \leq |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关时取等.

Pf . 形 1: $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 或 $\boldsymbol{\beta} = k\boldsymbol{\alpha}$, $(\mathbf{0},\boldsymbol{\beta}) = (0\mathbf{0},\boldsymbol{\beta}) = 0(\mathbf{0}.\boldsymbol{\beta}) = |0||\boldsymbol{\beta}|$, $|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| = |(\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\alpha})| = |k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})| = |k||(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})| = |k||\boldsymbol{\alpha}|^2 = |\boldsymbol{\alpha}||k\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$;
情形 2: $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关, 则 $\forall t \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{\beta} \neq t\boldsymbol{\alpha}$, 即 $t\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, $0 < (t\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}, t\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = (t\boldsymbol{\alpha}, t\boldsymbol{\alpha}) - 2(t\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) = t^2\boldsymbol{\alpha}^2 - 2t(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}^2 \Longrightarrow \Delta = 4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 - 4|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}| < 0 \Longrightarrow |(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) < |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$.

Cor. 4　向量长度的三角形不等式

$|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}| \leq |\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\beta}|$

Pf . $|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}|^2 = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = |\boldsymbol{\alpha}|^2 + \underbrace{2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}_{\leq 2|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|} + |\boldsymbol{\beta}|^2 = (|\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\beta}|)^2$.

Def. 14　向量的夹角

设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角 $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle := \arccos \dfrac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|},\ 0 \leq \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle \leq \pi$.

Cor. 5

$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \dfrac{\pi}{2} \Longleftrightarrow (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = 0$

Def. 15　向量的正交

若 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = 0$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 记作 $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$.

Cor. 6

只有零向量与自己正交, 若 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = 0,\ \forall \boldsymbol{\beta} \in V$, 则 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 即内积是非退化的对称双线性函数

Cor. 7　勾股定理

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 则 $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2$

Def. 16　向量的距离

$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的距离 $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}):=|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$, 满足:

1. $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=d(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$ (对称性);
2. $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\geq 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$ 时取等 (正定性);
3. $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})\leq d(\boldsymbol{\alpha},be)+d(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$ (三角形不等式)

3.2.3　欧几里得空间的标准正交基与正交矩阵

设 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维欧几里得空间

Prop. 5　定理

实内积空间中, 由两两正交的非零向量组成的集合 S, 一定是线性无关的.

Pf　. 取 S 中一个有限子集 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$, 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$,

则 $(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_i)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}_i)=k_i\underbrace{(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)}_{\geq 0}=0\Longrightarrow k_i=0,\ i=1,\cdots,m.$

Def. 17　正交基、标准正交基

$\mathbb{R}^n$ 中, n 个两两正交的非零向量是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基, 称为 $\mathbb{R}^n$ 的一个正交基.

n 个两两正交的单位向量组成 V 的一个基, 称为 V 的一个标准正交基.

$\mathbb{R}^n$ 中指定标准内积, 有 $\begin{cases}(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_i)=1\\(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j),\ i\neq j\end{cases}$, 因此 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基

Meth. 1　Schmidt 正交化

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个线性无关的向量组, 令:

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_s-\sum_{j=1}^{s-1}\frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\beta}_j)}\boldsymbol{\beta}_j$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是两两正交的非零向量组, 且 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 等价.

Pf . 向量组个数 s 作数学归纳法: $s=1$ 时, $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$, 命题为真; 假设 $s=k$ 时, 命题为真; $s=k+1$ 时, $\boldsymbol{\beta}_{k+1}=\boldsymbol{\alpha}_{k+1}-\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\boldsymbol{\beta}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\beta}_j)}\boldsymbol{\beta}_j$

$$(\boldsymbol{\beta}_{k+1},\boldsymbol{\beta}_i)=(\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\boldsymbol{\beta}_i)-\sum_{j=1}^{k}\frac{(\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\boldsymbol{\beta}_j)}{(\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\beta}_j)}(\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\beta}_i)=(\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\boldsymbol{\beta}_i)-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_i)}(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_i)=0$$

因此 $\boldsymbol{\beta}_{k+1}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_i$ 正交, $i=1,\cdots,k$, 据归纳假设可得, $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k,\boldsymbol{\beta}_{k+1}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ 等价, 从而 $\boldsymbol{\beta}_{k+1}\neq\mathbf{0}$, 因此 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k,\boldsymbol{\beta}_{k+1}$ 是两两正交的非零向量组, 据数学归纳法原理, 对一切 s 命题为真.

Meth. 2　正交基单位化

$\mathbb{R}^n$ 中任取一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\xrightarrow{\text{Schmidt 正交化}}$ 正交基$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$, 令

$$\boldsymbol{\eta}_i=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_i|}\boldsymbol{\beta}_i,\ i=1,\cdots,n$$

得到 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$.

Def. 18　内积的度量矩阵

$\mathbb{R}^n$ 中, 有唯一的内积, 这个内积在 $\mathbb{R}^n$ 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的度量矩阵 $\boldsymbol{A}$, 称为基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的度量矩阵

$$\text{设 }\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\text{ 在基下坐标为 }X,Y,\text{ 则}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=X^T\boldsymbol{A}Y,\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)&\cdots&(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_n)\\ \vdots&&\vdots\\ (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1)&\cdots&(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n)\end{pmatrix}$$

Prop. 6　标准正交基的性质

设 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基, $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)X,\ \boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)Y$

1. $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=X^T\boldsymbol{I}Y=X^TY$
2. $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta}_i)\boldsymbol{\eta}_i$, 称为 Fourier 展开

Def. 19　正交矩阵

若 $\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$ 满足:

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{I}$$

则称 $\boldsymbol{Q}$ 为一个正交矩阵.

Prop. 7　正交矩阵的性质

1. $\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^T$
2. $\boldsymbol{Q}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{Q}^T$ 也是正交矩阵
3. 若 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2$ 均为正交矩阵, 则 $\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2$ 也是正交矩阵

   Pf . $(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2)^T(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2)=\boldsymbol{Q}_2^T\boldsymbol{Q}_1^T\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{I}$
4. $\det(\boldsymbol{Q})=\pm1$

   Pf . $|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^T||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{I}|=1$
5. 对于 $\boldsymbol{Q}$ 的所有特征值 $|\lambda|=1$

Thm. 4　标准正交基间的过渡矩阵

设 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots\boldsymbol{\eta}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基, $(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{P}$,
则 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是标准正交基 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵.

Pf . $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{\beta}_j=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{p}_j$, $\begin{cases}(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_i)=1\\(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=0,\ i\neq j\end{cases}$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{p}_i^T\boldsymbol{p}_i=1\\\boldsymbol{p}_i^T\boldsymbol{p}_j=0\end{cases}\Longleftrightarrow\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1^T\\\vdots\\\boldsymbol{p}_n^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1^T\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_1^T\boldsymbol{p}_n\\\vdots & & \vdots\\\boldsymbol{p}_n^T\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n^T\boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}$$

3.2.4　实内积空间的子空间与正交直和分解

Def. 20　正交补

设 S 是实内积空间 V 的一个非空子集, 令:

$$S^{\perp}:=\{\boldsymbol{\alpha}\in V\mid(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0,\ \forall\boldsymbol{\beta}\in S\}$$

称 $S^{\perp}$ 为 S 的正交补.
易证 $S^{\perp}$ 是 V 的一个子空间, 且也是一个实内积空间.

Thm. 5　正交直和分解

设 U 是实内积空间 V 的一个有限维子空间, 则有:

$$V=U\oplus U^{\perp}$$

将一个实内积空间分解为一个有限维子空间与其正交补的直和, 这种分解称为正交直和分解.

Pf . U 中标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_m$, $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$, 构造 $\boldsymbol{\alpha}_1=\sum\limits_{i=1}^{m}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta}_i)\boldsymbol{\eta}_i\in U$,

令 $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1$, 则 $(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\eta}_j)=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta}_j)-\left(\sum\limits_{i=1}^{m}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta}_i)\boldsymbol{\eta}_i,\boldsymbol{\eta}_j\right)=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta}_j)-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta}_i)\delta_{ij}=0$

从而 $V=U+U^{\perp}$; $\forall\boldsymbol{\gamma}\in U\cap U^{\perp}$, $(\underset{\in U}{\boldsymbol{\gamma}},\underset{\in U^{\perp}}{\boldsymbol{\gamma}})=0\Longrightarrow\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}\Longrightarrow U\cap U^{\perp}=\{\mathbf{0}\}$.

Def. 21　正交投影

若 $V=U\oplus U^{\perp}$, $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_{1+\alpha_2}$, $\boldsymbol{\alpha}\in V,\boldsymbol{\alpha}_1\in U,\boldsymbol{\alpha}_2\in U^{\perp}$, 则有平行于 $U^{\perp}$ 在 U 上的投影 $\mathcal{P}_U$, $\mathcal{P}_U(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}_1$ 称 $\mathcal{P}_U$ 为 V 在 U 上的正交投影, 将 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\mathcal{P}_U$ 下的像 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的正交投影.

Cor. 8

$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的正交投影 $\Longleftrightarrow\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1\in U^{\perp}$

Prop. 8　定理

若 $V=U\oplus U^{\perp}$, 则 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V,\boldsymbol{\alpha}_1\in U$, $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的正交投影 $\Longleftrightarrow$

$$d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1)\le d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}),\ \forall\boldsymbol{\gamma}\in U$$

.

Pf . $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是正交投影 $\Longrightarrow\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1\in U^{\perp}\Longrightarrow[d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})]^2=|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}|^2=|\underbrace{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1}_{\in U^{\perp}}+\underbrace{\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\gamma}}_{\in U}|^2=|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1|^2+|\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\gamma}|^2\ge|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1|^2$; 设 $\boldsymbol{\delta}$ 是正交投影 $\Longrightarrow d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\delta})\le d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1)$, 又 $\boldsymbol{\delta}\in U\Longrightarrow d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1)\le d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\delta})$, 于是 $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\delta})=d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1)$, 从而 $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1|^2=|\underbrace{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\delta}}_{\in U^{\perp}}+\underbrace{\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\alpha}_1}_{\in U}|^2=|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\delta}|^2+|\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\alpha}_1|^2\Longrightarrow|\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\alpha}_1|=0$, 因此 $\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\alpha}_1$.

Def. 22　最佳逼近元

设 U 是实内积空间 V 的一个子空间, 如果对于 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 存在 $\boldsymbol{\delta}\in U$, 使得:

$$d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\delta})\le d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}),\ \forall\boldsymbol{\gamma}\in U$$

则称 $\boldsymbol{\delta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的最佳逼近元.

Cor. 9

当 U 是有限维的, 则有 $V=U\oplus U^{\perp}$, 从而 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$, 有 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的正交投影 $\boldsymbol{\alpha}_1$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的最佳逼近元

3.2.5 实内积空间的同构

Def. 23 实内积空间的同构、保距同构

设 V 与 V' 都是实内积空间, 若 V 到 V' 有一个双射 σ, 且满足:

1. $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta}),\ \forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$
2. $\sigma(l\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\ \forall k\in\mathbb{R},\boldsymbol{\alpha}\in V$
3. $(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\ \forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ (保持内积)

则 σ 是实内积空间 V 到 V' 的一个同构映射, 此时称 V 与 V' 是同构的, 记作 $V\cong V'$.
若 σ 除了保持加法与数量乘法, 还保持向量的内积, 则称 σ 是一个保距同构.
标准正交基在保距同构下的像, 仍为标准正交基.

Thm. 6 欧几里得空间的同构

两个欧几里得空间同构 $\Longleftrightarrow$ 二者有相同的维数.

Pf . "$\Longleftarrow$": 设 $\dim V=\dim V'=n$, V 与 V' 分别取一个标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 与 $\boldsymbol{\delta}_1,\cdots,\boldsymbol{\delta}_n$, 构造映射

$$\sigma: V\to V', \boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\eta}_i\mapsto\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\delta}_i, \boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{n}y_i\boldsymbol{\eta}_i\mapsto\sum_{i=1}^{n}y_i\boldsymbol{\delta}_i$$

则 σ 是 V 到 V' 的一个线性同构

$$\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,\ (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\beta}))=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\delta}_i,\sum_{i=1}^{n}y_i\boldsymbol{\delta}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

从而, σ 是一个保距同构, 因此二者同构.

Cor. 10

任一 n 维欧几里得空间 $V\cong\mathbb{R}^n$, 其中一个同构映射为:

$$\sigma: V\to\mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\eta}_i\mapsto\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\varepsilon}_i=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

3.3 实内积空间上的变换

3.3.1 正交变换

Def. 24 实内积空间上的正交变换

设 $\mathcal{A}$ 是实内积空间 V 上的一个变换, 若 $\mathcal{A}$ 是满射, 且满足:

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}),\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V \text{ (保持内积不变)}$$

则称 $\mathcal{A}$ 是一个正交变换.

Prop. 9 实内积空间上正交变换的性质

设 $\mathcal{A}$ 是实内积空间 V 上的一个正交变换

1. $|\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\alpha}|,\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$
2. $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle,\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$ 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$
3. $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} \perp \mathcal{A}\boldsymbol{\beta} \Longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta},\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$
4. $d(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}) = d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}),\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$
5. $\mathcal{A}$ 一定是线性变换

   Pf . 用内积的正定性: $|\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) - (\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathcal{A}\boldsymbol{\beta})|^2$
   $= (\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) - (\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}), \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) - (\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}))$
   $= |\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})|^2 - 2(\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}), \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}) + (\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathcal{A}\boldsymbol{\beta})$
   $= |\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2 - 2[(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})] + |\boldsymbol{\alpha}|^2 + 2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + |\boldsymbol{\beta}|^2 = 0$
   $\Longrightarrow \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathcal{A}\boldsymbol{\beta})$; 同理, 易证 $\mathcal{A}(k\boldsymbol{\alpha}) = k(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha})$
6. $\mathcal{A}$ 一定是单射, 从而是双射, 即 $\mathcal{A}$ 是可逆的

   Pf . $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ s.t. $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \Longrightarrow \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$, 从而 $\mathcal{A}$ 是单射

总结正交变换保持所有实内积空间的度量性质不变.

Prop. 10 定理

实内积空间 V 上的变换 $\mathcal{A}$ 是正交变换 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 是 V 到自身的一个保距同构.

Cor. 11

正交变换的逆变换, 也是正交变换

Cor. 12

两个正交变换的乘积, 也是正交变换

Prop. 11　欧几里得空间上正交变换的特殊性质

n 维欧几里得空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 是正交变换 $\Longleftrightarrow$

1. $\mathcal{A}$ 保持内积
2. V 中标准正交基在 $\mathcal{A}$ 下的像, 仍是标准正交基
3. $\mathcal{A}$ 在 V 的任一标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵

Def. 25　第一、二类正交变换

n 维欧几里得空间上的正交变换 $\mathcal{A}$ 的行列式等于 1 或 -1, 若 $\det(\mathcal{A}) = 1$, 则称 $\mathcal{A}$ 是第一类的; 若 $\det(\mathcal{A}) = -1$, 则称 $\mathcal{A}$ 是第二类的.

Def. 26　超平面、反射

n 维线性空间的任一 $n-1$ 维子空间, 称为 V 的一个超平面, 设 V 中一个单位向量 $\boldsymbol{\eta}$, 则将超平面记作 $\langle \boldsymbol{\eta} \rangle^{\perp}$.
$\mathcal{P}$ 是 V 在 $\langle \boldsymbol{\eta} \rangle$ 上的正交投影, $\mathcal{I}$ 为恒等变换, 令:

$$\mathcal{R} = \mathcal{I} - 2\mathcal{P}$$

则称 $\mathcal{R}$ 为关于 $\langle \boldsymbol{\eta} \rangle^{\perp}$ 的反射.
在欧几里得空间中, 关于超平面的反射是第二类正交变换.

Thm. 7　正交变换的分块对角矩阵

设 $\mathcal{A}$ 是 n 维欧几里得空间 V 上的一个正交变换, 则 V 中存在一个标准正交基, 使得 $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵为分块对角矩阵, 形如:

$$\begin{pmatrix}
\lambda_1 & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & \\
& & \lambda_r & & & & & \\
& & & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & \\
& & & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\
& & & & & \ddots & & \\
& & & & & & \cos\theta_m & -\sin\theta_m \\
& & & & & & \sin\theta_m & \cos\theta_m
\end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_i=\pm1,\ i=1,\cdots,r,0\le r\le n;\ 0<\theta_j<\pi,\ j=1,\cdots,m,0\le m\le\dfrac{n}{2}$.

3.3.2 对称变换与实对称矩阵

Def. 27 实内积空间上的对称变换

设 $\mathcal{A}$ 是实内积空间 V 上的一个变换, 若满足:

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathcal{A}\boldsymbol{\beta}),\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$$

则称 $\mathcal{A}$ 为 V 上的一个对称变换.

Cor. 13

$\mathcal{A}$ 一定是线性变换

Pf . 用 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}),\ \forall\boldsymbol{\gamma}\in V\Longleftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

Prop. 12 对称变换判定定理

n 维欧几里得空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 是对称变换 $\Longleftrightarrow$
$\mathcal{A}$ 在 V 中一个标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵.

Pf . $\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\mathcal{A}\boldsymbol{\eta}_j=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{\eta}_i\\ \mathcal{A}\boldsymbol{\eta}_j=\sum\limits_{i=1}^{n}(\mathcal{A}\boldsymbol{\eta}_j,\boldsymbol{\eta}_i)\boldsymbol{\eta}_i\end{cases}\Longrightarrow a_{ij}=(\mathcal{A}\boldsymbol{\eta}_j,\boldsymbol{\eta}_i),\ \mathcal{A}\text{ 是对称变换}\Longleftrightarrow a_{ij}=a_{ji}$$

Thm. 8 实对称矩阵的特征多项式实根定理

n 级实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 的复根均为实数.

Pf . 取 $f(\lambda)$ 的一个复根 λ_0, 将 $\boldsymbol{A}$ 看作复矩阵, 则 λ_0 是复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, $\exists\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^n$ 且$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$,

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\text{ 是实矩阵}\Longrightarrow\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}}=\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\overline{\lambda_0}\overline{\boldsymbol{\alpha}}\\ \boldsymbol{A}\text{是对称矩阵}\Longrightarrow(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^T=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}^T\end{cases}\Longrightarrow\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}^T\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\overline{\lambda_0}\boldsymbol{\alpha}^T\overline{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^T\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\begin{pmatrix}a_1&\cdots&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{a_1}\\ \vdots\\ \overline{a_n}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_i\overline{a_i}=\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\xrightarrow[\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}]{\boldsymbol{\alpha}^T\overline{\boldsymbol{\alpha}}\neq\boldsymbol{0}}\lambda_0=\overline{\lambda_0}\Longrightarrow\lambda_0\in\mathbb{R}$$

Thm. 9　对称变换的特征向量正交性

实内积空间上的对称变换 $\mathcal{A}$ 的属于不同特征值的特征向量是正交的.

Pf　. λ_1, λ_2 是 $\mathcal{A}$ 的不同特征值, $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 分别为属于 λ_1, λ_2 的一个特征向量,

$$\lambda_1(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = (\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = (\mathcal{A}\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = (\boldsymbol{\xi}_1, \mathcal{A}\boldsymbol{\xi}_2) = (\boldsymbol{\xi}_1, \lambda_2\boldsymbol{\xi}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) \xrightarrow{\lambda_1 \neq \lambda_2} (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = 0$$

Cor. 14

n 级实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量一定是正交的

Prop. 13　定理

设 $\mathcal{A}$ 是实内积空间 V 上的一个对称变换, 若 W 是 $\mathcal{A}$ 的一个不变子空间, 则 $W^\perp$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

Pf　. $\forall \boldsymbol{\alpha} \in W, \boldsymbol{\beta} \in W^\perp$, $(\mathcal{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\beta}, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = 0 \Longrightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{\beta} \in W^\perp$.

Prop. 14　定理

设 $\mathcal{A}$ 是 n 维欧几里得空间 V 上的一个对称变换, 则 V 中存在一个标准正交基, 使得 $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵为对角矩阵.

Pf　. 欧几里得空间的维数作数学归纳法: $n = 1$ 时, 显然命题成立; 假设维数为 $n-1$ 时, 命题为真; 维数为 n, 实对称矩阵一定有特征值, 取 $\mathcal{A}$ 的一个特征值 λ_1, 设 $\boldsymbol{\eta}_1$ 为 $\mathcal{A}$ 的属于 λ_1 的单位特征向量, 则 $V = \langle \boldsymbol{\eta}_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{\eta}_1 \rangle^\perp$, 由于 $\langle \boldsymbol{\eta}_1 \rangle$ 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间, 则 $\langle \boldsymbol{\eta} \rangle^\perp$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间, 从而 $\mathcal{A}|_{\langle \boldsymbol{\eta}_1 \rangle^\perp}$ 是 $\langle \boldsymbol{\eta}_1 \rangle^\perp$ 上的对称变换, 据归纳假设, $\mathcal{A}|_{\langle \boldsymbol{\eta}_1 \rangle^\perp}$ 在 $\langle \boldsymbol{\eta}_1 \rangle^\perp$ 的一个标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 下的矩阵为 $\mathrm{diag}\{\lambda_2, \cdots \lambda_n\}$, $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 是一个标准正交基, $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵为 $\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, 据数学归纳法原理, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 命题为真.

Cor. 15

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级实对称矩阵, 则存在一个 n 级正交矩阵 $\boldsymbol{T}$, 使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$$

此时, 称 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于对角矩阵

Meth. 3　实对称矩阵的正交对角化

求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵

1. 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部不同的特征值 (必为实数)
2. 对每一个特征值 λ_i, 求 $(\lambda_i\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})X$ 的一个基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{ir_i}$
3. $\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{ir_i} \xrightarrow{\text{Schmidt 正交化}} \boldsymbol{\beta}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{ir_i} \xrightarrow{\text{单位化}} \boldsymbol{\eta}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{ir_i}$
4. 得到正交矩阵 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\eta}_{11}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{1r_1}, \boldsymbol{\eta}_{s1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{sr_s})$

5. 求得对角矩阵 $\mathrm{diag}\{\underbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{r_1\text{ 个}},\cdots,\underbrace{\lambda_s,\cdots\lambda_s}_{r_s\text{ 个}}\}$

谱定理？.

3.4 酉空间的结构及其上变换

3.4.1 酉空间的内积与度量

复数域上线性空间 V 的一个双线性函数 f 有

$$f(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha},\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha})=(\mathrm{i}\cdot\mathrm{i})f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=-f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}),\ f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geq 0\in\mathbb{R}$$

与正定性矛盾, 但要求保留正定性, 则改为

$$\begin{cases}f(\boldsymbol{\alpha},\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha})=\bar{\mathrm{i}}f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\\ f(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\mathrm{i}f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\end{cases}\Longrightarrow f(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha},\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha})=\mathrm{i}\bar{\mathrm{i}}f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$$

$$\Longrightarrow\overline{f(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\overline{\mathrm{i}f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\bar{\mathrm{i}}f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=f(\boldsymbol{\alpha},\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha})$$

失去对称性.

Def. 28　复线性空间上的内积、Hermite 性

复线性空间 V 上的一个二元函数 $(\ ,\ )$, 即 $V\times V$ 到 $\mathbb{C}$ 的一个映射, 如果满足:

1. $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})=\overline{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})},\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ (Hermite 性)
2. $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}),\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$ (对第一个变量保持加法)
3. $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\ \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,k\in\mathbb{C}$ (对第一个变量保持数量乘法)
4. $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geq 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时取等 (正定性)

则称 $(\ ,\ )$ 是 V 上的一个内积.
对第二个变量:

1. $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\delta})=\overline{\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\alpha}}=\overline{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}+\overline{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\alpha})}$
2. $(\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta})=\overline{(k\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}=\overline{k(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}=\overline{k}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$

则称 $(\ ,\ )$ 对第二个变量是共轭线性的.
对比实内积与复内积:

1. 实线性空间的内积是一个正定的对称双线性函数
2. 复线性空间的内积是一个正定的共轭对称半线性函数

Def. 29　复内积空间、酉空间

若复线性空间 V 指定了一个内积, 则称 V 是一个复内积空间, 或称酉空间.

Def. 30　标准内积

$\mathbb{C}^n$ 中, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, 规定

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}=\boldsymbol{y}^{\dagger}\boldsymbol{x}$$

易证, $(\ ,\ )$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的一个内积, 称为标准内积.

Def. 31　酉空间中向量长度

设 V 是一个酉空间, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度 $|\boldsymbol{\alpha}|:=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$, 易证 $|k\boldsymbol{\alpha}|=|k||\boldsymbol{\alpha}|$.

Thm. 10　酉空间中的 Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz 不等式

在酉空间 V 中, $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$, $|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|\le|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关时取等.

Pf　. 形 1: $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 易证 $|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|=|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$; 情形 2: $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关,

$\forall t\in\mathbb{C}$, $\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$, 由正定性 $0<(\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta})=|\boldsymbol{\alpha}|^2+\bar{t}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+t\overline{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}+t\bar{t}|\boldsymbol{\beta}|^2$

取 $t=-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\beta}|^2}$, 代入得 $|\boldsymbol{\alpha}|^2-\dfrac{|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|^2}{|\boldsymbol{\beta}|^2}>0$.

Def. 32　酉空间中向量夹角

在酉空间 V 中, 若 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角为

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle:=\arccos\frac{|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}$$

其中 $0\le\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\le\dfrac{\pi}{2}$.

物理意义 $\cos^2\langle\psi_k,\psi\rangle$ 是在 ψ 态下测量力学量 A_j 得到 λ_{jk} 的概率.

Def. 33　酉空间中向量正交

在酉空间中, 若 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 记作 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.

Cor. 16　三角形不等式

$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|\le|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|$

Cor. 17　勾股定理

若 $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$, 则 $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2 = |\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2$

Def. 34　酉空间中的距离

在酉空间中, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的距离 $d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) := |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|$.

3.4.2　有限维酉空间的标准正交基与酉矩阵

Def. 35　正交规范集

在酉空间中, 由两两之间的非零向量组成的集合是线性无关的, 两两正交的单位向量组成的子集, 称为正交规范集.

Def. 36　有限维酉空间的标准正交基

n 维酉空间 V 中, 由 n 个两两正交的非零向量组成的基, 称为 V 的一个正交基; 由 n 个两两正交的单位向量组成的基, 称为 V 的一个标准正交基

Prop. 15　标准正交基的性质

设 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots \boldsymbol{\eta}_n$ 是 V 的一个标准正交基, $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots \boldsymbol{\eta}_n)X$, $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\eta}_1, \cdots \boldsymbol{\eta}_n)Y$

1. $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{\eta}_i, \sum\limits_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{\eta}_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \boldsymbol{y}^\dagger \boldsymbol{x}$
2. $\boldsymbol{\alpha} = \sum\limits_{i=1}^{n} (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta}_i) \boldsymbol{\eta}_i$ (Fourier 展开)

Thm. 11

n 维酉空间中一定有标准正交基.

Pf　. 一个基进行 Schmidt 正交化与单位化后得到标准正交基.

Def. 37　酉矩阵

若 $\boldsymbol{U} \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{C})$ 满足:

$$\boldsymbol{U}^\dagger \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\dagger = \boldsymbol{I}$$

则称 $\boldsymbol{U}$ 为一个酉矩阵.

Prop. 16　酉矩阵的性质

1. $\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^\dagger$
2. $\boldsymbol{U}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{U}^\dagger$ 也是酉矩阵
3. 若 $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2$ 均为酉矩阵, 则 $\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_2$ 也是酉矩阵

4. $|\det(\boldsymbol{U})|=1$

5. 对于 $\boldsymbol{U}$ 的所有特征值 $|\lambda|=1$

Thm. 12　酉空间中标准正交基之间的过渡矩阵

设 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是 n 维酉空间 V 的一个标准正交基, 令 $(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{P}$, 则 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是标准正交基 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{P}^{\dagger}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$, 即有限维酉空间中, 标准正交基到标准正交基的过渡矩阵, 为酉矩阵.

Pf . $(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_j & \cdots & \boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}\Longrightarrow \boldsymbol{\beta}_j=(\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{p}_j$,

$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是标准正交基 $\Longleftrightarrow (\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=\delta_{ij}\Longleftrightarrow \boldsymbol{p}_j^{\dagger}\boldsymbol{p}_i=\delta_{ij}$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1^{\dagger}\\ \vdots\\ \boldsymbol{p}_n^{\dagger}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{\dagger}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$$

3.4.3　酉空间的正交直和分解与同构

Prop. 17　酉空间的正交分解与正交投影判定定理

设 U 是酉空间 V 的一个有限维子空间, 则有

$$V=U\oplus U^{\perp}$$

.

若 $V=U\oplus U^{\perp}$, 则平行于 $U^{\perp}$ 在 U 上的投影 $\mathcal{P}_U$, 称为 V 在 U 上的正交投影, 设 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1\in U,\boldsymbol{\alpha}_2\in U^{\perp}$, 将 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的正交投影.

$\boldsymbol{\alpha}\in U$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的正交投影 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1\in U^{\perp}\Longleftrightarrow d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1)\leq d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}),\ \forall\boldsymbol{\gamma}\in U.$

Def. 38　酉空间中的最佳逼近元

酉空间 V 的一个子空间 U, 如果存在 $\boldsymbol{\delta}\in U$, 使得

$$d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\delta})\leq d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}),\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V,\boldsymbol{\gamma}\in U$$

则称 $\boldsymbol{\delta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上的最佳逼近元.

若 U 是有限维的, 则 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$, $\boldsymbol{\alpha}$ 在 U 上都有最佳逼近元, 即 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{U}$ 上的正交投影.

Def. 39　Hilbert 空间

设 V 是一个复 (实) 内积空间, 若 V 中每一个 Cauchy 序列都在 V 中有极限, 则称 V 是一个 Hilbert 空间, 即为一个完备化的复 (实) 内积空间.

Thm. 13　Hilbert 空间的正交分解定理

设 V 是一个 Hilbert 空间, 若 U 是 V 的一个闭子空间, 则 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都在 U 上有最佳逼近元, 从而有

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

.

Thm. 14　酉空间的同构

设 V 和 V' 都是酉空间, 如果存在 V 到 V' 的一个双射 σ, 使得 σ 保持加法与纯量乘法, 且 σ 保持向量的内积不变, 则称 σ 是 V 到 V' 的一个同构映射 (保距同构), 此时称 V 与 V' 是同构的, 记作 $V \cong V'$.

两个有限维酉空间同构 $\Longleftrightarrow$ 二者维数相同, 从而任一酉空间同构于 $\mathbb{C}^n$.

3.4.4　酉变换

Def. 40　酉变换

酉空间 V 上的一个变换 $\mathcal{A}$, 如果 $\mathcal{A}$ 是满射, 且满足:

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}),\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$$

则称 $\mathcal{A}$ 是一个酉变换.

酉变换保持酉空间的内积, 即保持一切度量性质, 保持向量的长度、夹角、正交性、距离不变.

易证, 酉变换一定是线性变换, 且一定是单射, 从而是双射, 是可逆的.

Prop. 18　酉变换的判定

酉空间 V 上的变换 A 是酉变换 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 是 V 到自身的一个同构映射 (保距同构).

易证, 酉变换的逆变换、酉变换的乘积, 仍是酉变换.

Prop. 19　有限维酉空间上酉变换的判定

n 维酉空间 V 上的变换 $\mathcal{A}$, 若满足:

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}),\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$$

即为酉变换

Prop. 20　酉变换的特征值

n 维酉空间 V 上酉变换 $\mathcal{A}$ 的特征值的模为 1.

Pf　. λ_0 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\mathcal{A}$ 的属于 λ_0 的一个特征向量, 则有

$(\mathcal{A}\boldsymbol{\xi}, \mathcal{A}\boldsymbol{\xi}) = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = (\lambda_0\boldsymbol{\xi}, \lambda_0\boldsymbol{\xi}) = \lambda_0\overline{\lambda_0}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \xrightarrow{\boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0}} |\lambda_0| = 1.$

Thm. 15　酉变换的不变子空间

设 $\mathcal{A}$ 是酉空间 V 上的一个酉变换, 若 W 是 V 的一个有限维的子空间, 且 W 是 A 的一个不变子空间, 则 $W^\perp$ 也是 $\mathcal{A}$ 的一个子空间.

Pf　. $\mathcal{A}|_W$ 是 W 上的一个线性变换, 由于 $\mathcal{A}$ 是 V 到自身的单射, 因此 $\mathcal{A}|_W$ 是 W 到自身的单射, 又由于 W 是有限维的, 因此 $\mathcal{A}|_W$ 是满射; $\forall\boldsymbol{\alpha} \in W$, $\exists\boldsymbol{\gamma} \in W$ s.t. $\mathcal{A}\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}$, 任取 $\boldsymbol{\beta} \in W^\perp$, $(\mathcal{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = (\mathcal{A}\boldsymbol{\beta}, \mathcal{A}\boldsymbol{\gamma}) = (\underset{\in W^\perp}{\boldsymbol{\beta}}, \underset{\in W}{\boldsymbol{\gamma}}) = 0 \Longrightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{\beta} \in W^\perp$.

Thm. 16　酉变换的对角矩阵

设 $\mathcal{A}$ 是 n 维酉空间 V 上的一个酉变换, 则 V 中存在一个标准正交基, 使得 $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵为对角矩阵.

Pf　. 酉空间的维数作数学归纳法:

Cor. 18

n 级酉矩阵一定相似于一个对角矩阵, 称为酉相似

3.4.5　Hermite 变换

Def. 41　Hermite 变换

$\mathcal{A}$ 是酉空间 V 上的一个变换, 若满足:

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}),\ \forall\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$$

则称 $\mathcal{A}$ 是一个 Hermite 变换.

Hermite 变换一定是线性变换.

Def. 42　Hermite 矩阵

若 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{C})$ 满足:

$$\boldsymbol{A}^\dagger = \boldsymbol{A}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为一个 Hermite 矩阵.

Prop. 21　定理

n 维酉空间上的线性变换 $\mathcal{A}$ 是 Hermite 变换 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 在 V 的任一标准正交基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 矩阵.

Prop. 22　Hermite 变换特征值实值定理

n 维酉空间上 Hermite 变换 $\mathcal{A}$ 的特征值一定是实数.

Pf　. λ_0 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值, $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\mathcal{A}$ 的属于 λ_0 的一个特征向量, 则有

$(\mathcal{A}\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=(\lambda_0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=\lambda_0(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=(\boldsymbol{\xi},\mathcal{A}\boldsymbol{\xi})=(\boldsymbol{\xi},\lambda_0\boldsymbol{\xi})=\overline{\lambda_0}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})\Longrightarrow\lambda_0=\overline{\lambda_0}$.

Thm. 17　Hermite 变换的不变子空间

设 $\mathcal{A}$ 是酉空间 V 上的一个 Hermite 变换, 若 W 是 V 的一个有限维的子空间, 且 W 是 A 的一个不变子空间, 则 $W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$ 的一个子空间.

Thm. 18　Hermite 变换的实对角矩阵

设 $\mathcal{A}$ 是 n 维酉空间 V 上的一个 Hermite 变换, 则 V 中存在一个标准正交基, 使得 $\mathcal{A}$ 在此基下的矩阵为实对角矩阵.

Cor. 19

n 级酉矩阵一定酉相似于一个实对角矩阵

3.5　正交空间与辛空间

3.5.1　Lorentz 变换

$$\text{Galileo 变换}\begin{cases}t'=t\\x'=x\\y'=y\\z'=z\end{cases}\xrightarrow{\text{光速不变原理}}\text{Lorentz 变换}(\mathcal{L})\begin{cases}t'=\dfrac{t-\dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\\x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\\y'=y\\z'=z\end{cases}$$

令 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, 则 Lorentz 变换的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\dfrac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\dfrac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\mathbb{C}^4$ 中, 设 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} t_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} t_2 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, 若指定正定对称双线性函数 $(\ ,\ )$ 作为内积, 则 $(\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}), \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta})) \neq (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, 即在洛伦兹变换下不保持内积不变

3.5.2 Minkowski 空间

于是令

$$f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = -c^2 t_1 t_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

则 f 是一个非退化的对称双线性函数.

将 f 作为 $\mathbb{R}^4$ 的内积, 此时称 $(\mathbb{R}^4, f)$ 为一个 Minkowski 空间, 满足:

$$(\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}), \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$$

.

$f(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的时-空间隔平方, 满足:

$$f(\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}), \mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})$$

.

3.5.3 正交空间

域 F 上线性空间 V 指定了一个对称双线性函数 f, 则称 f 为 V 上的一个内积, 称 V 是一个正交空间, 记作 (V, f).

若 f 是非退化的, 则称 (V, f) 是正则的, 否则则称 (V, f) 是非正则的.

Minkowski 空间是一个 4 维的正交空间.

3.5.4 辛空间

域 F 上线性空间 V 指定了一个斜对称双线性函数 f, 则称 f 为 V 上的一个内积, 称 V 是一个辛空间.

3.6 对易与李代数

Def. 43 矩阵的对易及运算法则

在 $\boldsymbol{M}_n(F)$ 中, $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 称为矩阵的对易子, 记作 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$, 诱导出对易运算:

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA},\ \forall \boldsymbol{AB}\in \boldsymbol{M}_n(F)$$

对易运算满足:

1. $[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C},\boldsymbol{B}]=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]+[\boldsymbol{C},\boldsymbol{B}],\ [\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}]=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]+[\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}]$,
   $[k\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=[\boldsymbol{A},k\boldsymbol{B}]=k[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$ (线性性)
2. $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=-[\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}]$ (反交换律)
3. $[\boldsymbol{A},[\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]]+[\boldsymbol{B},[\boldsymbol{C},\boldsymbol{A}]]+[\boldsymbol{C},[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]]=\boldsymbol{0}$ (Jacobi 恒等式)

Def. 44 李代数

4 多项式

4.1 一元多项式环

4.1.1 一元多项式及其运算

Def. 1 一元多项式、次数

设 K 是一个数域, x 是一个符号, 形如下述的表达式:

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_ix^i+\cdots+a_1x+a_0$$

其中, $n\in\mathbb{N}$, 系数 $a_n,\cdots,a_1\in K$, 如果满足: 两个这种形式的表达式相等 $\Longleftrightarrow$ 二者含有完全相同的项, 则称这种表达式为数域 K 上的一个一元多项式, x 称为不定元.
系数全为 0 的一元多项式, 称为零多项式.
若 $a_n\neq 0$, 则称 n 为 $f(x)$ 的次数, 记作 $\deg f(x)$.
0 次多项式形如 b, 其中 $b\in K^*$, 等同于 K 中的非零元.
零多项式的次数为负无穷, 记作 $-\infty$, 且规定 $-\infty<n,(-\infty)+n=-\infty,\forall n\in\mathbb{N}$

Def. 2 多项式的运算

$K[x]:=\{$数域K 上一元多项式$\}$,

1. 规定加法: $\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i+\sum\limits_{i=0}^{n}b_ix^i=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)x^i$

2. 规定乘法: $(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i)(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j} = \sum_{s=0}^{n+m}(\sum_{i+j=s} a_i b_j)x^s$

3. 从而有数量乘法: $k(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=0}^{n}(ka_i)x^i$

4. 于是有减法: $f(x) - g(x) = f(x) + [-g(x)]$

$K[x]$ 对于加法和数量乘法, 成为数域 K 上的一个无限维的线性空间.

Pf $K[x]$ 中每个多项式都可以由 $\Omega = \{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$ 中有限多个多项式线性表出, 任取 Ω 的一个有限子集 $\Omega_1 = \{x^{i_1}, \cdots, x^{i_m}\}$, 设 $k_1 x^{i_1} + \cdots + k_m x^{i_m} = 0$, 则 $k_1 = \cdots = k_m = 0$, 因此 Ω_1 线性无关, 从而 Ω 线性无关, 所以 $\Omega = \{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$ 是 $K[x]$ 的一个基, 从而 $K[x]$ 是一个无限维的线性空间.

$K[x]$ 的乘法满足: 交换律、结合律、分配律, 有单位元, 即 $1f(x) = f(x)1 = f(x)$

Thm. 1　多项式和与积的次数定理

设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 则 $\deg[f(x) + g(x)] \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$

次数相同且首项系数互为相反数时取 $<$.

$\deg[f(x)g(x)] = \deg f(x) + \deg g(x)$

对零多项式同样成立.

Cor. 1

$f(x) \neq 0, g(x) \neq 0 \Longrightarrow f(x)g(x) \neq 0$

Cor. 2　多项式乘法的消去律

$f(x)g(x) = f(x)h(x)$, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $g(x) = h(x)$

4.1.2　环的概念及其性质

Def. 3　环

一个非空集合 R, 如果有两个代数运算, 一个称为加法, 一个称为乘法, 并且满足以下运算法则:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in R$ (加法结合律)

2. $a + b = b + a$, $\forall a, b \in R$ (加法交换律)

3. R 中有一个元素 0, 有 $0 + a = a + 0 = a$, $\forall a \in R$, 称 0 为 R 的零元 (有零元)

4. $\forall a \in R, \exists b \in R$, s.t. $a + b = b + a = 0$, 称 b 为 a 的负元, 记作 $-a$ (有负元)

5. $(ab)c = a(bc)$ (乘法结合律)

6. $a(b+c)=ab+ac,\ (b+c)a=ba+ca,\ \forall a,b,c\in R$ (左右分配律)

则称 R 为一个环.
对于负元可以定义环中的减法: $a-b=a+(-b),\ \forall a,b\in R$

Def. 4　交换环、单位元、零因子

设 R 是一个环,
(1) 若 R 的乘法满足交换律, 则称 R 是一个交换环;
(2) 若 R 有一个元素 e, 满足: $ea=ae=a,\ \forall a\in R$, 则称 e 为 R 的单位元, 记作 1, 且若 R 有单位元, 则单位元唯一;
(3) $\forall a\in R$, 若存在 $b\in R$, 且 $b\neq 0$, 使得 $ab=0$, 则称 a 是一个左零因子, 若 $ba=0$, 则称为右零因子, 统称为零因子, 且在 R 中, 有 $0a=a0=0,\ \forall a\in R$, 从而 0 是零因子, 称为平凡零因子

4.1.3　子环的概念及其判定

Def. 5　子环

环 R 的一个非空子集 R_1, 若对于 R 的加法、乘法运算, 也成为一个环, 则称 R_1 是 R 的一个子环

Prop. 1　子环判定定理

环 R 的一个非空子集 R_1 是一个子环
$\Longleftrightarrow$ 从 $a,b\in R_1$ 可以推出 $a-b,ab\in R_1$, 即 R_1 对于 R 的减法与乘法均封闭.
Pf　证明“$\Longleftarrow$”: $\forall c\in R_1\Longrightarrow c-c=0\in R_1$ (有零元); $\forall b\in R_1\Longrightarrow -b=0-b\in R_1$ (有负元); $\forall a,b\in R_1\Longrightarrow a+b=a-(-b)\in R_1$ (加法), 易证, R_1 称为一个环, 从而 R_1 是 R 的一个子环

Eg. 1　子环的例子

1. $\forall \boldsymbol{A}\in \boldsymbol{M}_n(K)$, 表达式 $b_m\boldsymbol{A}^m+\cdots+b_1\boldsymbol{A}+b_0\boldsymbol{I}\ (m\in\mathbb{N})$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的多项式, $K[\boldsymbol{A}]:=\{$数域 K 上矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式$\}$, 易证 $K[\boldsymbol{A}]$ 对于矩阵的减法与乘法封闭, 从而 $K[\boldsymbol{A}]$ 是环 $\boldsymbol{M}_n(K)$ 的一个子环, 并且是一个有单位元的交换环

2. $K\boldsymbol{I}$ 是 $K[\boldsymbol{A}]$ 的一个子环

4.1.4 一元多项式环的通用性质

Def. 6 同构映射与环同构

若环 R 到环 R' 有一个双射 σ, 满足: $\sigma(a+b)=\sigma(a)+\sigma(b)$, $\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b)$, $\forall a,b\in R$ (保持加法和乘法), 则称 σ 是 R 到 R' 的一个同构映射, 此时称 R 和 R' 是同构的.
若环 R 到环 R' 有一个同构映射 σ, 且 R 有单位元 e, 则 $\sigma(e)$ 是 R' 的单位元 e', 即, 单位元在同构映射下的像, 一定是单位元.

Thm. 2 一元多项式环的通用性质 (泛性质)

设 K 是一个数域, R 是一个有单位元的交换环, 且 K 到 R 的一个子环 R_1 有一个同构映射 τ, $\forall t\in R$, 令:

$$\sigma_t: K[x]\to R, f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\mapsto f(t):=\sum_{i=0}^{n}\tau(a_i)t^i$$

由于 $f(x)$ 表法唯一, 因此 σ_t 是 $K[x]$ 到 R 的一个映射.
$\sigma_t(x)=t$, 且 σ_t 保持加法和乘法运算, 即:

$$f(x)+g(x)=h(x),\ f(x)g(x)=p(x)\Longrightarrow f(t)+g(t)=h(t),\ f(t)g(t)=p(t)$$

称 σ_t 为 x 用 t 代入.

4.2 n 元多项式环及其通用性质

Def. 7 n 元多项式

设 F 是一个域, $x_1,\cdots,x_n$ 是 n 个符号, 有

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}a_{i_1i_2\cdots i_n}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$$

其中 $i_1,i_2,\cdots,i_n\in\mathbb{N}$, $a_{i_1i_2\cdots i_n}\in F$ 称为系数.
若只有有限多个系数不为 0, 且当且仅当两个这种形式的表达式, 除系数为 0 的项外, 有完全相同的项时二者相等, 则称这种形式的表达式为域 F 上的一个 n 元多项式, 记作 $f(x_1,\cdots,x_n)$, 称 $x_1,\cdots,x_n$ 为 n 个无关的不定元.
称其中一项 $a_{i_1i_2\cdots i_n}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ 为单项式, 称幂指数之和 $i_1+\cdots+i_n$ 为单项式的次数, 称系数非零的最高单项式次数为 n 元多项式的次数.

Def. 8 n 元多项式环

$F[x_1,\cdots,x_n]:=\{$域 F 上 n 元多项式$\}$, 易证, $F[x_1,\cdots,x_n]$ 成为一个有单位元的交换环, 称为域 F 上的 n 元多项式环.

Def. 9　齐次多项式

若 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的每个系数非零的单项式的次数均为 m, 则称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为一个 m 次齐次多项式.
零多项式可以是任意次齐次多项式.
{域 F 上 n 元 m 次齐次多项式} 是域 F 上的一个线性空间.

Thm. 3　n 元多项式环的通用性质

设 F 是一个域, R 是一个有单位元的交换环, 且 F 到 R 有一个子环 R_1 有一个同构映射 τ, $\forall t_1,\cdots,t_n\in R$, 令

$$\sigma_{t_1,\cdots,t_n}:F[x_1,\cdots,x_n]\to R$$

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}a_{i_1i_2\cdots i_n}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}\mapsto\sum_{i_1,\cdots,i_n}\tau(a_{i_1,\cdots,i_n})t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n}$$

则 $\sigma_{t_1,\cdots,t_n}$ 是 $F[x_1,\cdots,x_n]$ 到 R 的一个映射, 且 $\sigma_{t_1,\cdots,t_n}$ 保持加法和乘法运算, 将 $\sigma_{t_1,\cdots,t_n}$ 称为 $x_1,\cdots,x_n$ 分别用 $t_1,\cdots,t_n$ 代入.

5　多重线性代数

5.1　多重线性映射

Prop. 1　定义 1: 多重线性映射

设 $V_1,\cdots,V_r$ 与 W 均为域 F 上的线性空间, $\mathcal{A}$ 为 $V_1\times\cdots\times V_r$ 到 W 的一个映射, 若 $\forall\alpha_i,\beta_i\in V_i$, $k\in F$, 有

1. $\mathcal{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_i+\beta_i,\cdots,\alpha_r)=\mathcal{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_r)+\mathcal{A}(\alpha_1,\cdots,\beta_i,\cdots,\alpha_r)$;
2. $\mathcal{A}(\alpha_1,\cdots,k\alpha_i,\cdots,\alpha_r)=k\mathcal{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_r)$,

则称 $\mathcal{A}$ 为从 $V_1\times\cdots\times V_r$ 到 W 的一个多重线性映射.

Prop. 2　引理 2:多重线性映射的唯一性

存在唯一的线性映射 $\mathcal{A}$ 使得

$$\mathcal{A}(\alpha_{1j_1},\cdots,rj_r)=\beta_{j_1\cdots j_r}\tag{5.1}$$

Cor. 1　多重线性函数的唯一性

存在唯一的多重线性函数 f 使得

$$f(\alpha_{1j_1},\cdots,\alpha_{rj_r})=b_{j_1\cdots j_r}\tag{5.2}$$

Prop. 3　定理 2:多重线性函数空间的维数

$$\dim\{\boldsymbol{M}ult(V_1,\cdots,V_r;F)\}=n_1\cdots n_r \tag{5.3}$$

Prop. 4　定理 3:双线性函数空间的基

5.2　线性空间的张量积

5.3　张量代数

5.4　外代数