三维空间旋转与 SO(3)

Rotations in 3-Dim Space and the Group SO(3)

角动量理论系列讲义, 第一篇: 旋转的群结构, 参数化, 无穷小生成元与 Lie 代数

RongYu

角动量理论系列讲义

2026.8.9

目录

导言 3

I 空间旋转与旋转群 SO(3) 4

1 三维空间旋转 5

1.1 空间旋转的定义 5

1.2 旋转矩阵的性质 6

2 三维旋转群 SO(3) 8

2.1 旋转矩阵构成一个群 8

2.2 旋转的非对易性 9

2.3 连续性与三个参数 10

II 旋转的表示方法 11

3 三维旋转的表示方法 12

3.1 基本坐标轴旋转 12

3.2 轴角表示 13

3.3 Euler 角 15

III 无穷小旋转, 生成元与 Lie 代数 18

4 无穷小旋转与生成元 19

4.1 无穷小旋转 19

4.2 旋转生成元 21
4.3 生成元为什么是反对称矩阵 22
4.4 叉乘与生成元 22

5 SO(3) 的 Lie 代数 24

5.1 李代数 so(3) 24
5.2 生成元的对易关系 24

6 从生成元回到有限旋转 27

6.1 固定轴旋转与单参子群 27
6.2 指数形式 28
6.3 Rodrigues 公式 30

7 总结：为下一篇准备什么 32

导言

空间是各向同性的:物理定律不依赖于坐标系绕原点的取向. 把整个物理系统绕任意轴转动任意角度, 系统的行为应当保持不变. 在经典力学中, 这条对称性由 Noether 定理联系到角动量守恒; 在量子力学中, 它表现为 Hilbert 空间上存在一族与旋转群 SO(3) 相应的幺正算符, 而角动量算符从这族算符的无穷小生成元中涌现出来. 两条路线指向同一个出发点: 先把三维空间中的旋转本身研究透彻.

本讲是《角动量理论》系列的第一篇. 系列按空间旋转结构 → Hilbert 空间表示 → 物理中的角动量理论三步组织: 本讲只研究三维旋转群 SO(3) 本身; 第二篇利用群表示把 SO(3) 映射到 Hilbert 空间, 讨论量子旋转算符、旋转生成元与角动量对易代数的数学来源; 第三篇才进入角动量本征值理论、轨道角动量、自旋及其物理应用. 因此本讲的目标非常明确: 把第二篇真正会用到的结构准备齐全, 即

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{SO}(3) \longrightarrow \text{无穷小旋转} \longrightarrow \text{生成元 } G_i \longrightarrow \mathfrak{so}(3) \longrightarrow [G_i, G_j] = \varepsilon_{ijk} G_k \longrightarrow \mathrm{e}^{\theta\, \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}} \\ \text{有限旋转与群结构 (第 1–3 节)} \longrightarrow \text{无穷小结构与 Lie 代数 (第 4–5 节)} \longrightarrow \text{指数映射 (第 6 节)}\end{array}} \tag{0.1}$$

全讲分三部分. 第一部分 (第 1–2 节) 建立旋转的定义与旋转矩阵的基本性质, 证明旋转矩阵构成群 SO(3), 通过具体例子体会其非对易性, 并指出 SO(3) 是连续依赖三个参数的 Lie 群. 第二部分 (第 3 节) 给出旋转的三种表示方法: 基本坐标轴旋转, 轴角表示与 Euler 角表示, 它们是对 SO(3) 群元的具体参数化. 第三部分 (第 4–6 节) 是全文的核心: 从无穷小旋转引入生成元 G_1, G_2, G_3, 建立 Lie 代数 $\mathfrak{so}(3)$ 与对易关系 $[G_i, G_j] = \varepsilon_{ijk} G_k$, 再通过指数映射回到有限旋转, 得到 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}, \theta) = \mathrm{e}^{\theta\, \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}}$ 与 Rodrigues 公式. 第 7 节把整条链条收束起来, 并引出第二篇的问题.

为使学习路线更顺, 本讲刻意不展开下列内容: 流形与切空间的严格定义, 旋转群的全局拓扑 (如基本群与射影空间表示), Baker–Campbell–Hausdorff 公式, 伴随表示, 以及 SU(2) 双覆盖. 它们在本讲的链条中并不必要; 等到第二篇真正遇到为什么 SO(3) 不能直接容纳半整数自旋的问题时再引入, 会更自然.

Part I

空间旋转与旋转群 SO(3)

本部分建立旋转的严格定义, 推出旋转矩阵的代数刻画 $R^{\mathsf{T}}R = \boldsymbol{I}$, $\det R = 1$, 验证旋转矩阵在乘法下构成群 SO(3), 并通过显式例子体会旋转的非对易性, 最后说明 SO(3) 是连续依赖三个参数的 Lie 群.

内容概要

- 掌握旋转的定义: 保持内积与取向的线性映射, 主动约定的含义.
- 会证明旋转矩阵的刻画 $R^{\mathsf{T}}R = \boldsymbol{I}$, $\det R = 1$, 以及复合与取逆保持旋转性质.
- 理解 SO(3) 的群结构, 会用矩阵验证旋转的非对易性, 理解旋转顺序的重要性.
- 理解 SO(3) 的连续性: 旋转可连续变化, 且由三个独立参数标记.

1

三维空间旋转

1.1 空间旋转的定义

本讲采用主动旋转 (active rotation) 的约定: 一个旋转把空间中的每个点与每个向量按刚体方式同时搬动, 而坐标系保持不动. 与之相对的是被动观点 (旋转坐标架), 两种观点的区别只是描述方式, 数学对象 (旋转矩阵及其乘法) 完全相同. 本篇统一使用主动约定.

Def. 1　空间旋转

设 $\boldsymbol{R}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 是线性映射. 若 $\boldsymbol{R}$ 保持内积, 即对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3$ 有

$$(\boldsymbol{R}\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{R}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}, \tag{1.1}$$

且 $\det\boldsymbol{R}=1$, 则称 $\boldsymbol{R}$ 为三维空间中的旋转 (rotation).

保持内积的条件等价于保持一切长度与一切夹角, 因而旋转正是以原点为不动点的刚体转动.

Prop. 1　长度, 夹角与内积

对线性映射 $\boldsymbol{R}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, 下列条件等价: (i) $\boldsymbol{R}$ 保持内积, 即(1.1) 对一切 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 成立; (ii) $\boldsymbol{R}$ 保持一切长度: $|\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}|=|\boldsymbol{x}|$ 对一切 $\boldsymbol{x}$ 成立; (iii) $\boldsymbol{R}$ 保持一切夹角: 对任意非零 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$, 向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的夹角与 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{x},\boldsymbol{R}\boldsymbol{y}$ 的夹角相等.

Pf　(i) $\Rightarrow$ (ii) 在(1.1) 中取 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ 即得. (ii) $\Rightarrow$ (i) 用极化恒等式: 对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$,

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\frac{|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4},\qquad (\boldsymbol{R}\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{R}\boldsymbol{y})=\frac{|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^2-|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|^2}{4},$$

由保长度, 两式右端相等, 故(1.1) 成立. (i) $\Leftrightarrow$ (iii) 由内积与夹角的关系 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\theta$ 直接得出: 内积与长度不变, 夹角余弦即不变. □

由此, 旋转使刚体上任意两点的距离保持不变: 两点连线视为向量 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$, 其长度在旋转

下不变. 条件 $\det \boldsymbol{R} = 1$ 表示保持取向: 右手系仍被映为右手系, 因而排除了镜像操作. 反射与空间反演同样保持长度与夹角, 但改变空间手性, 不属于旋转 (第 1.2 节).

1.2 旋转矩阵的性质

Prop. 2　旋转的刻画

线性映射 $\boldsymbol{R} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 是旋转, 当且仅当

$$\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}, \qquad \det \boldsymbol{R} = 1. \tag{1.2}$$

此时 $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{R}^{-1}$. 称满足 $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$ 的矩阵为正交矩阵 (orthogonal matrix).

Pf　设 $\boldsymbol{R}$ 是旋转. 由定义, 对一切 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ 有 $|\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}|^2 = \boldsymbol{v}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$, 即对称矩阵 $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R} - \boldsymbol{I}$ 的二次型恒为零, 故 $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$. 反过来, 若 $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$, 则对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 有 $(\boldsymbol{R}\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{R}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$, 内积条件自动成立; 加上 $\det \boldsymbol{R} = 1$ 即还原旋转的定义. 由于 $\boldsymbol{R}$ 是方阵, 左逆 $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}$ 自动成为右逆, 故 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{I}$ 不必单独假设. □

Cor. 1　行列式的取值

正交矩阵的行列式只能取 ± 1: 由 $\det\left(\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R}\right) = (\det \boldsymbol{R})^2 = 1$ 得 $\det \boldsymbol{R} = \pm 1$. 行列式为 1 的是真转动 (proper rotation), 即旋转; 行列式为 -1 的是非真转动, 如反射与空间反演. 最简单的非真转动是空间反演 $\boldsymbol{P} = \operatorname{diag}(-1,-1,-1) = -\boldsymbol{I}$, 它把每个向量变成自己的负向量.

Prop. 3　逆旋转与复合

设 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2 \in \mathrm{SO}(3)$. (a) 逆旋转仍是旋转, 且 $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}$; (b) 两个旋转的复合仍是旋转: $\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2$ 满足 $(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2)^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2) = \boldsymbol{I}$ 且 $\det(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2) = 1$.

Pf　(a) $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}$ 正交且 $\det \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}} = \det \boldsymbol{R} = 1$, 故逆旋转是旋转; 由正交条件 $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$ 立得 $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}$. (b) 直接计算:

$$(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2)^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2) = \boldsymbol{R}_2^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R}_1^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{R}_2^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{I}, \qquad \det(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2) = \det \boldsymbol{R}_1 \cdot \det \boldsymbol{R}_2 = 1.$$

故复合保持旋转的两条性质. □

性质 (b) 说明旋转对复合封闭, 这是第 2 节中 SO(3) 成群的关键; 性质 (a) 说明” 转回去”

的旋转就是转置, 逆旋转总是存在.

Eg. 1　验证一个旋转

循环置换矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

满足 $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$: 三行两两正交且模为 1; 其行列式把 $\boldsymbol{R}$ 的行做两次交换即化为单位阵, 故 $\det\boldsymbol{R}=1$. 因此它是旋转, 作用效果为 $\boldsymbol{e}_1\mapsto\boldsymbol{e}_2\mapsto\boldsymbol{e}_3\mapsto\boldsymbol{e}_1$: 把三个基向量循环搬运. 第 3.2 节与第 6.3 节将看到, 它是绕方向 $(1,1,1)$ 的轴转 $2\pi/3$ 的旋转.

2

三维旋转群 SO(3)

2.1 旋转矩阵构成一个群

Def. 1　群

集合 G 配上映射 $G \times G \to G$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$ (称为群乘法), 若满足结合律 $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, 存在单位元 e, 且每个元素都有逆元, 则称 G 为群. 群的乘法不必可交换; 可交换的群称为 Abel 群.

第 1.2 节已经验证了旋转的全部群公理: 复合封闭 (命题 1.2 之 (b)), 单位元是恒等变换 $\boldsymbol{I}$ (它显然是旋转), 逆元存在且 $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}$ (命题 1.2 之 (a)), 结合律由矩阵乘法继承. 于是:

Prop. 1　SO(3) 是群

集合

$$\mathrm{SO}(3) = \{\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ s.t. } \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I},\ \det \boldsymbol{R} = 1\} \tag{2.1}$$

在矩阵乘法下构成群, 称为三维旋转群 (special orthogonal group). 全体正交矩阵构成的群记作 O(3); SO(3) 是其中行列式为 1 的部分.

Pf　封闭性, 单位元与逆元已在第 1.2 节逐一验证; 结合律是矩阵乘法的结合律, 自动成立. □

O(3) 按行列式分成 ± 1 两个不相交的部分: 反射与反演不在 SO(3) 中. 由于 $\det(\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2) = \det \boldsymbol{R}_1 \det \boldsymbol{R}_2$, 行列式为 -1 的部分甚至不构成子群 (两个非真转动的复合是真转动); SO(3) 才是真正的旋转群.

2.2 旋转的非对易性

Eg. 1　绕不同轴的旋转不对易

比较先绕 x 轴转 $\pi/2$ 再绕 y 轴转 $\pi/2$ 与相反次序的两个复合:

$$\boldsymbol{R}_x(\pi/2)\,\boldsymbol{R}_y(\pi/2)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{R}_y(\pi/2)\,\boldsymbol{R}_x(\pi/2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}.$$

两者不同, 故旋转次序不能交换. 有趣的是两个乘积的迹都等于 0, 因而都是转 $2\pi/3$ 的旋转; 差别完全在转轴方向: 前者以 $(1,1,1)$ 为轴, 后者以 $(1,1,-1)$ 为轴 (用第 3.2 节的方法由矩阵提取轴角即可验证).

Prop. 2　绕同一轴的旋转可交换

设 $\boldsymbol{n}$ 是单位向量, 记 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)$ 为绕轴 $\boldsymbol{n}$ 转动角 θ 的旋转 (记号 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)$ 将在第 3.2 节系统讨论). 则

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)\,\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\varphi)=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta+\varphi)=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\varphi)\,\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta).$$

Pf　绕同一轴的两个旋转都保持该轴不动; 在垂直于轴的平面上, 它们分别限制为转角 θ 与 φ 的平面旋转. 平面旋转的复合是转角相加的平面旋转 (两角和公式直接验证), 因而复合结果仍是绕同一轴的旋转, 转角为 $\theta+\varphi$. 同一轴上的平面旋转互相可交换, 故两个复合次序给出同一结果. □

因此 SO(3) 非 Abel 的本质在于转轴可以不同: 绕同一轴的旋转构成可交换的子族, 绕不同轴的旋转一般不对易. 这一差别在物理上非常重要: 描述刚体姿态时, 旋转的次序不能颠倒. 它也是量子力学中角动量分量不对易的经典根源: 第二篇将看到, 群乘积的非对易性在无穷小层面表现为生成元的对易子不为零.

2.3 连续性与三个参数

Prop. 3　连续转动族

固定单位向量 $\boldsymbol{n}$. 映射 $\theta \mapsto \boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)$ 连续, 且满足 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\varphi) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta+\varphi)$, $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},0) = \boldsymbol{I}$.

Pf　绕固定轴的旋转矩阵元是 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 的连续函数, 故作为 θ 的函数连续; 复合性质就是上一命题. □

由此, 任意一个旋转都可以从恒等旋转连续地变过去: 先把转轴连续转到目标转轴, 再把转角连续增大到目标值. 在拓扑学的语言里, 这称为 SO(3) 是连通的; 本讲只需要这个直观. 与连续性相伴的是参数个数:

Prop. 4　三个独立参数

旋转由三个独立参数标记: 转轴方向给两个自由度 (单位向量 $\boldsymbol{n} \in S^2$, 单位球面上的点), 转角给一个自由度. 从矩阵角度看: $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$ 给出 9 个矩阵元的 6 个独立正交条件, 故 $9-6=3$; 行列式条件在恒等元附近自动成立 (行列式连续且 $\det\boldsymbol{I}=1$), 不额外减少自由度. 两种计数一致.

Def. 2　Lie 群, 直观版本

若一个群 G 的元素由有限个连续实参数标记, 且群乘法与取逆运算都连续地依赖于这些参数, 则称 G 为 Lie 群. 严格的 Lie 群定义需要微分流形的概念, 本讲不展开, 只用" 连续" 这一层含义.

SO(3) 是 Lie 群: 矩阵元是参数的连续函数, 乘法与取逆 (转置) 都连续, 参数个数为 3. 连续性给旋转理论带来的关键新内容, 是可以谈论" 无穷小的旋转": 转角趋于零的极限携带旋转的全部局部信息, 这正是第 4 节的主题.

Part II

旋转的表示方法

本部分给出 SO(3) 群元的三套具体参数化: 绕坐标轴的基本旋转矩阵, 轴角表示 (转轴与转角) 与 Euler 角表示 (三次基本旋转的复合), 并给出由矩阵反解转轴与转角的方法.

内容概要

- 会写绕三个坐标轴的基本旋转矩阵, 理解其复合性质.
- 掌握 Euler 转动定理与轴角表示 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)$, 理解旋转向量与表示的冗余.
- 会由矩阵的迹与反对称部分提取转轴与转角.
- 掌握 Euler 角的 zyz 约定 $\boldsymbol{R}(\alpha,\beta,\gamma)=\boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_z(\gamma)$, 理解分解定理与万向锁的由来.

3

三维旋转的表示方法

3.1 基本坐标轴旋转

绕坐标轴 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ (即 x, y, z 轴) 转动角 θ 的旋转按右手定则约定方向: 拇指指向轴的正向, 旋转方向为其余手指弯曲的方向. 三个基本旋转矩阵为

$$\boldsymbol{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

例如 $\boldsymbol{R}_z(\theta)$ 保持第三个分量不变, 在前两个分量张成的平面内作平面旋转: 它是平面旋转群 SO(2) 嵌入 SO(3) 的矩阵. 由命题 2.2, 绕同一轴复合即转角相加:

$$\boldsymbol{R}_i(\theta)\boldsymbol{R}_i(\varphi) = \boldsymbol{R}_i(\theta+\varphi), \qquad i = 1, 2, 3;$$

绕不同轴的复合一般不可交换 (第 2.2 节的例子). 这三个基本矩阵是构造一切旋转的砖块: 任意旋转都可以写成若干基本旋转的乘积, Euler 角表示 (第 3.3 节) 是这一思想最典型的实现. 更深刻的是, 它们分别是后面三个基本生成元 (第 4.2 节) 的直接来源: 绕 x, y, z 轴的无穷小旋转给出 G_1, G_2, G_3.

3.2 轴角表示

Thm. 1 Euler 转动定理

对任意 $\boldsymbol{R} \in \mathrm{SO}(3)$, 存在单位向量 $\boldsymbol{n}$ 使得 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}$: 每个三维旋转都是绕某个固定轴的旋转.

Pf 只需证明 1 是 $\boldsymbol{R}$ 的本征值. 利用 $\det \boldsymbol{R} = 1$ 与 $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}$:

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{I}) &= \det\left(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}})\right) = \det \boldsymbol{R} \cdot \det\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\right) = \det\left((\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})^{\mathsf{T}}\right) \\ &= \det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R}) = (-1)^3 \det(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{I}) = -\det(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{I}),\end{aligned}$$

故 $\det(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{I}) = 0$: $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{I}$ 奇异, $\boldsymbol{R}$ 有本征值 1. 其本征向量单位化后即为 $\boldsymbol{n}$. □

Def. 1 轴角表示与旋转向量

对单位向量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\theta \in \mathbb{R}$, 记 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}, \theta)$ 为绕轴 $\boldsymbol{n}$ 转动角 θ 的旋转: 沿 $\boldsymbol{n}$ 正向看去, 转角为正时逆时针旋转. 由 Euler 转动定理, 每个旋转都唯一地写成这样的形式 (除下述冗余). 三元组 $(\boldsymbol{n}, \theta)$ 称为轴角表示. 把两者合并为旋转向量 $\boldsymbol{\theta} = \theta\boldsymbol{n}$: 方向是转轴, 长度是转角.

轴角表示有自然的冗余: 绕反向轴转反向角与原来的旋转相同, 转角增加 2π 的整数倍给出同一个旋转. 因此常取 $\theta \in [0, \pi]$; 此时只剩下 $\theta = \pi$ 处的对径识别 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}, \pi) = \boldsymbol{R}(-\boldsymbol{n}, \pi)$. 另外要注意, 旋转向量不能像普通向量那样相加: 复合旋转一般不对应旋转向量的加法, 只有绕同一轴的旋转才满足转角相加 (命题 2.2), 这正是非对易性的表现.

Prop. 1 迹与本征值

设 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}, \theta)$. 则

$$\operatorname{Tr} \boldsymbol{R} = 1 + 2\cos\theta,$$

且 $\boldsymbol{R}$ 的本征值为 1, $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$: 本征值 1 对应本征向量 $\boldsymbol{n}$; 在垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的平面内, $\boldsymbol{R}$ 限制为转角 θ 的平面旋转.

Pf 选取右旋标准正交基 $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$. 轴向向量 $\boldsymbol{n}$ 不动, 平面内按右手定则 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{e} = \cos\theta\,\boldsymbol{e} + \sin\theta\,\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{R}\boldsymbol{f} = -\sin\theta\,\boldsymbol{e} + \cos\theta\,\boldsymbol{f}$. 故在该基下 $\boldsymbol{R}$ 的矩阵为 $\operatorname{diag}(1, \cos\theta, \sin\theta;\ -\sin\theta, \cos\theta)$ 的分块对角形, 迹为 $1 + 2\cos\theta$, 本征值为 1 与 $\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$. □

Meth. 1　由矩阵提取轴角

给定 $\boldsymbol{R}\in\mathrm{SO}(3)$, 提取 $(\boldsymbol{n},\theta)$: 1. 转角由迹确定: $\cos\theta=(\operatorname{Tr}\boldsymbol{R}-1)/2$, 取 $\theta\in[0,\pi]$; 2. 若 $\sin\theta\neq 0$, 由反对称部分

$$\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}=2\sin\theta\,[\boldsymbol{n}]_{\times},\qquad \boldsymbol{n}=\frac{1}{2\sin\theta}\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_{32}-\boldsymbol{R}_{23}\\ \boldsymbol{R}_{13}-\boldsymbol{R}_{31}\\ \boldsymbol{R}_{21}-\boldsymbol{R}_{12}\end{pmatrix};$$

3. 若 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$ (即 $\theta=0$), 转轴任意; 若 $\theta=\pi$, 由 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}$ (转角为 π 时垂直分量反号) 得 $\boldsymbol{R}=2\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathsf{T}}-\boldsymbol{I}$, 再由对角元 $\boldsymbol{R}_{ii}=2n_i^2-1$ 与一个符号约定解出 $\boldsymbol{n}$.

公式的依据: 迹公式即上一命题; 反对称部分在第 6.3 节的 Rodrigues 公式处给出独立的直接推导; $\theta=\pi$ 的情形来自转角为 π 的几何 (转 π 把垂直于轴的每个向量反号).

Eg. 1　提取轴角

对循环置换矩阵 $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$: $\operatorname{Tr}\boldsymbol{R}=0$, 故 $\cos\theta=-1/2$, $\theta=2\pi/3$. 又

$$\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix},$$

由方法第 2 步 $(2\sin\theta=\sqrt{3})$ 得 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)/\sqrt{3}$. 代入可验证 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},2\pi/3)$, 并把 $\boldsymbol{e}_1\to\boldsymbol{e}_2\to\boldsymbol{e}_3\to\boldsymbol{e}_1$ 循环搬运: 这正是绕立方体体对角线方向的旋转.

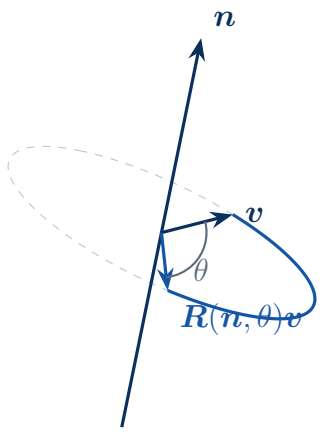


图 1: 轴角表示: 向量 $\boldsymbol{v}$ 绕单位轴 $\boldsymbol{n}$ 转动角 θ 得 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)\boldsymbol{v}$, 其端点沿垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的圆轨道运动; 转轴方向由 $\boldsymbol{n}$ 给出两个自由度, 转角 θ 给出一个自由度.

轴角表示给出旋转最直接的几何图像: 先确定轴, 再确定转角. 它也是后面生成元与指数形式最自然的出发点: 第 4 节将看到, 生成元携带的正是" 转轴方向 + 转动速率" 的信息, 是轴角在无穷小层面的版本.

3.3 Euler 角

轴角表示强调转轴与转角的几何. 另一种常用的三参数方案, 是把任意旋转分解成三次绕坐标轴的基本旋转.

Def. 2 zyz 约定的 Euler 角

设 α,β,γ 为实数. 定义

$$\boldsymbol{R}(\alpha,\beta,\gamma)=\boldsymbol{R}_z(\alpha)\,\boldsymbol{R}_y(\beta)\,\boldsymbol{R}_z(\gamma), \tag{3.3}$$

乘积从右往左作用, 依次为: 自转 γ (绕本体 z 轴), 章动 β (绕新 y 轴, 即节线), 进动 α (绕空间 z 轴). 通常取参数范围 $0\le\alpha<2\pi$, $0\le\beta\le\pi$, $0\le\gamma<2\pi$.

三个角度的几何意义: α 是空间 x 轴与节线 (体面与水平面的交线) 的夹角, 称进动角 (precession); β 是空间 z 轴与本体 z' 轴的夹角, 称章动角 (nutation); γ 是节线与本体 x' 轴的夹角, 称自转角 (spin). " 本体" 指随刚体固连的坐标架: 自转绕刚体自身的轴, 进动绕空间固定的轴.

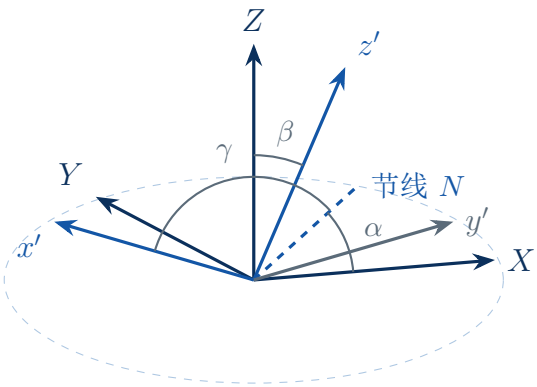


图 2: Euler 角 (zyz 约定) 的几何: 空间架 $\{X, Y, Z\}$ 与本体架 $\{x', y', z'\}$ 共原点, α 是 X 轴与节线 N 的夹角 (进动), β 是 Z 轴与 z' 轴的夹角 (章动), γ 是节线与 x' 轴的夹角 (自转). 本体 z' 轴的方向完全由 (α, β) 决定, 虚线椭圆表示空间水平面.

Thm. 2　Euler 角分解

对任意 $\boldsymbol{U} \in \mathrm{SO}(3)$, 存在实数 α, β, γ 使得

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}_z(\alpha)\, \boldsymbol{R}_y(\beta)\, \boldsymbol{R}_z(\gamma) = \boldsymbol{R}(\alpha, \beta, \gamma).$$

特别地, 任意旋转都可以分解为三次基本旋转.

Pf　分两步. 第 1 步 (确定本体轴方向): 设 $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{U}\boldsymbol{e}_3$, 取它的球坐标

$$\boldsymbol{z}' = (\sin\beta\cos\alpha,\ \sin\beta\sin\alpha,\ \cos\beta)^{\mathsf{T}}, \qquad 0 \le \beta \le \pi, \quad 0 \le \alpha < 2\pi,$$

并令 $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_y(\beta)$. 直接计算 $\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{e}_3 = (\sin\beta, 0, \cos\beta)^{\mathsf{T}}$, 再经 $\boldsymbol{R}_z(\alpha)$ 作用得 $\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{z}'$. 第 2 步 (分解余下的自转): 构造 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}_1^{-1}\boldsymbol{U}$. 由第 1 步, $\boldsymbol{V}\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{R}_1^{-1}\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{e}_3$, 即 $\boldsymbol{V}$ 保持 z 轴不动; 又 $\boldsymbol{V} \in \mathrm{SO}(3)$, 故 $\boldsymbol{V}$ 在 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 张成的平面上限制为保持内积与取向的平面线性变换, 必为某个平面旋转: 存在 γ 使 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}_z(\gamma)$. 于是 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_z(\gamma) = \boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_z(\gamma)$. □

分解的几何过程说明三个角度各管一个自由度: 前两步把空间 z 轴搬到本体 z' 轴的方向, 第三步决定绕该轴的自转. 分解一般不唯一: 在 $\beta = 0$ 或 π 处, $\boldsymbol{z}' = \pm\boldsymbol{e}_3$ 不再携带 α 的信息. 例如 $\beta = 0$ 时

$$\boldsymbol{R}(\alpha, 0, \gamma) = \boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_z(\gamma) = \boldsymbol{R}_z(\alpha + \gamma),$$

进动与自转只在和中出现, 三个参数实际只剩两个自由度; 这就是万向锁 (Gimbal lock).

($\beta = \pi$ 的情形类似, 用 $\boldsymbol{R}_y(\pi)\boldsymbol{R}_z(\gamma) = \boldsymbol{R}_z(-\gamma)\boldsymbol{R}_y(\pi)$, 直接相乘即可验证.) 万向锁是参数化的奇点而非旋转本身的奇点: 转动 $\boldsymbol{R}_z(\alpha+\gamma)$ 完全正常, 只是它有无穷多种 Euler 角描述. 类似的, 轴角表示在 $\theta = 0$ 处转轴无定义, 在 $\theta = \pi$ 处对径轴合并. 本讲只需知道这一点, 不做深入讨论.

Eg. 2 一个 Euler 角旋转

取 $\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi/2$, $\gamma = 0$:

$$\boldsymbol{R}(\pi/2, \pi/2, 0) = \boldsymbol{R}_z(\pi/2)\boldsymbol{R}_y(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

其第三列 $(0,1,0)^{\mathsf{T}}$ 正是 $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_3$ 的方向: 先章动 90° 使 z 轴指向 x 方向, 再进动 90° 使该方向绕空间 z 轴转到 y 方向, 自转角为零.

Part III

无穷小旋转, 生成元与 Lie 代数

本部分是全文的核心: 从无穷小旋转的一阶展开引入三个基本生成元 G_1, G_2, G_3 与生成元三元组 $\boldsymbol{G}$, 由正交条件推出生成元的反对称性, 建立叉乘与生成元的联系, 引入 Lie 代数 $\mathfrak{so}(3)$ 并推导对易关系 $[G_i, G_j] = \varepsilon_{ijk} G_k$, 最后通过单参子群与指数映射从生成元重建有限旋转.

内容概要

- 掌握无穷小旋转 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}, \mathrm{d}\theta) = \boldsymbol{I} + \mathrm{d}\theta\, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{G} + O(\mathrm{d}\theta^2)$.
- 会写三个基本生成元与生成元三元组, 理解任意方向生成元是基本生成元的线性组合.
- 会从正交条件推导生成元的反对称性, 理解叉乘矩阵与生成元的对应.
- 掌握 $\mathfrak{so}(3)$ 的定义, 会完整推导对易关系 $[G_i, G_j] = \varepsilon_{ijk} G_k$ 并理解其含义.
- 掌握指数映射 $\mathrm{e}^{\theta\, \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}, \theta)$ 与 Rodrigues 公式.

4

无穷小旋转与生成元

4.1 无穷小旋转

考虑转角很小的旋转.设 $\boldsymbol{n}$ 是单位向量, 转角记为 $\mathrm{d}\theta$. 把任意向量 $\boldsymbol{v}$ 分解为轴向与垂直分量: $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{\parallel}+\boldsymbol{v}_{\perp}$. 绕轴 $\boldsymbol{n}$ 转动时轴向分量不动; 垂直分量 $\boldsymbol{v}_{\perp}$ 在垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的平面内转过 $\mathrm{d}\theta$. 在平面内, 转过小角 $\mathrm{d}\theta$ 把向量 $\boldsymbol{w}$ 变为 $\boldsymbol{w}\cos\mathrm{d}\theta+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{w})\sin\mathrm{d}\theta$ (其中 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{w}$ 是 $\boldsymbol{w}$ 在该平面内绕 $\boldsymbol{n}$ 转 $+\pi/2$ 的像, 与 $\boldsymbol{w}$ 垂直且等长). 展开到一阶: $\boldsymbol{w}\mapsto\boldsymbol{w}+\mathrm{d}\theta\,(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{w})+O(\mathrm{d}\theta^2)$. 由于 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}_{\perp}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}$, 得到

Prop. 1　无穷小旋转

对单位向量 $\boldsymbol{n}$ 与无穷小角 $\mathrm{d}\theta$,

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\mathrm{d}\theta)\,\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\theta\,(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})+O(\mathrm{d}\theta^2), \tag{4.1}$$

其中 $O(\mathrm{d}\theta^2)$ 项与 $\boldsymbol{v}$ 有关. 矩阵形式为 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\mathrm{d}\theta)=\boldsymbol{I}+\mathrm{d}\theta\,[\boldsymbol{n}]_{\times}+O(\mathrm{d}\theta^2)$, 其中 $[\boldsymbol{n}]_{\times}$ 是满足 $[\boldsymbol{n}]_{\times}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}$ (对一切 $\boldsymbol{v}$) 的矩阵, 其显式形式见第 4.4 节.

Pf　上述几何推导: 轴向分量贡献 $\boldsymbol{v}_{\parallel}$, 垂直分量贡献 $\boldsymbol{v}_{\perp}+\mathrm{d}\theta(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}_{\perp})+O(\mathrm{d}\theta^2)$, 相加即得. □

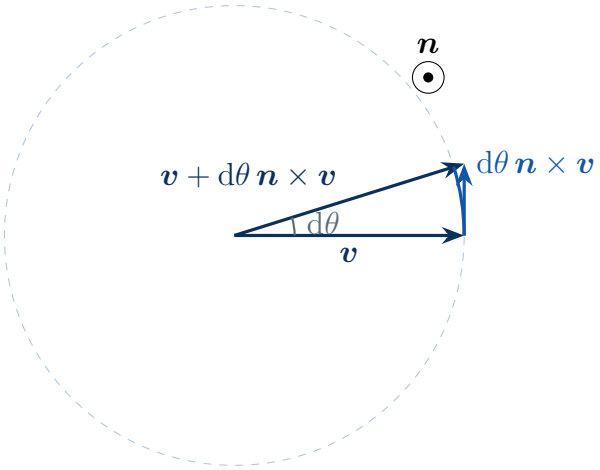


图 3: 无穷小旋转: 在垂直于转轴 $\boldsymbol{n}$ 的平面内 (视面), 向量 $\boldsymbol{v}$ 转过 $\mathrm{d}\theta$ 后变为 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}, \mathrm{d}\theta)\boldsymbol{v} \approx \boldsymbol{v} + \mathrm{d}\theta\, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}$, 其中 $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}$ 沿圆周切线方向, 长度与 $\boldsymbol{v}$ 相同. 符号 $\otimes$ 表示 $\boldsymbol{n}$ 指向视面外.

无穷小旋转非常接近单位矩阵: 它与 $\boldsymbol{I}$ 的差别是 $\mathrm{d}\theta$ 的一阶小量, 一阶修正的方向由转轴决定. 这一事实的意义在于: 一个有限的旋转可以被切成任意多份无穷小的旋转, 而每一份都由同一个线性部分刻画; 有限旋转是这些无穷小旋转" 积累" 的结果 (第 6.1 节把这一直觉精确化).

Eg. 1　绕 z 轴的无穷小旋转

由 $\boldsymbol{R}_z(\theta)$ 的显式矩阵 ((3.1)) 展开 $\cos \mathrm{d}\theta = 1 + O(\mathrm{d}\theta^2)$, $\sin \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta + O(\mathrm{d}\theta^3)$:

$$\boldsymbol{R}_z(\mathrm{d}\theta) = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{d}\theta & 0 \\ \mathrm{d}\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + O(\mathrm{d}\theta^2),$$

与(4.1) 取 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_3$ 一致.

4.2 旋转生成元

Def. 1 旋转生成元

记 $\boldsymbol{G}_i = [\boldsymbol{e}_i]_\times$ $(i = 1, 2, 3)$, 称为旋转群 SO(3) 的三个基本生成元 (generator). 显式地,

$$\boldsymbol{G}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{G}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

它们满足 $\boldsymbol{G}_i \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{v}$, 分别是绕三个坐标轴的无穷小旋转的线性部分: $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{e}_i, \mathrm{d}\theta) = \boldsymbol{I} + \mathrm{d}\theta\, \boldsymbol{G}_i + O(\mathrm{d}\theta^2)$.

Def. 2 生成元三元组与点乘

把三个生成元合成三元组 $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{G}_2, \boldsymbol{G}_3)$. 对任意向量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, 定义点乘

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{G} = a_1 \boldsymbol{G}_1 + a_2 \boldsymbol{G}_2 + a_3 \boldsymbol{G}_3,$$

即按分量线性组合三个生成元.

Prop. 2 任意方向的无穷小旋转

对单位向量 $\boldsymbol{n}$,

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}, \mathrm{d}\theta) = \boldsymbol{I} + \mathrm{d}\theta\, (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{G}) + O(\mathrm{d}\theta^2),$$

即绕轴 $\boldsymbol{n}$ 的无穷小旋转是三个基本生成元的线性组合 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{G}$; 称 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{G}$ 为绕轴 $\boldsymbol{n}$ 的旋转生成元.

Pf 由(4.1), 无穷小旋转的线性部分是矩阵 $[\boldsymbol{n}]_\times$, 其作用为 $[\boldsymbol{n}]_\times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}$. 由于 $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v} = \sum_i n_i (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{v}) = \sum_i n_i \boldsymbol{G}_i \boldsymbol{v}$, 对一切 $\boldsymbol{v}$ 成立, 故 $[\boldsymbol{n}]_\times = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{G}$. □

因此三个基本生成元携带了旋转的全部无穷小信息: 任何转轴方向的无穷小旋转都由它们的线性组合给出. 这是" 生成元" 一词的由来: 从 G_1, G_2, G_3 可以生成 (重建) 整个旋转群 (第 6 节).

4.3 生成元为什么是反对称矩阵

Prop. 3 生成元的反对称性

设 $\boldsymbol{R}(\mathrm{d}\theta)=\boldsymbol{I}+\mathrm{d}\theta\,\boldsymbol{G}+O(\mathrm{d}\theta^2)$ 是一族正交矩阵, 即 $\boldsymbol{R}(\mathrm{d}\theta)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R}(\mathrm{d}\theta)=\boldsymbol{I}$. 则

$$\boldsymbol{G}^{\mathsf{T}}=-\boldsymbol{G},$$

即旋转生成元必为反对称矩阵.

Pf 把展开代入正交条件(1.2), 保留到 $\mathrm{d}\theta$ 的一阶:

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{R}(\mathrm{d}\theta)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R}(\mathrm{d}\theta)=\big(\boldsymbol{I}+\mathrm{d}\theta\,\boldsymbol{G}^{\mathsf{T}}+O(\mathrm{d}\theta^2)\big)\big(\boldsymbol{I}+\mathrm{d}\theta\,\boldsymbol{G}+O(\mathrm{d}\theta^2)\big)=\boldsymbol{I}+\mathrm{d}\theta(\boldsymbol{G}^{\mathsf{T}}+\boldsymbol{G})+O(\mathrm{d}\theta^2).$$

一阶项必须为零: $\boldsymbol{G}^{\mathsf{T}}+\boldsymbol{G}=0$, 即 $\boldsymbol{G}^{\mathsf{T}}=-\boldsymbol{G}$. □

注意结论不依赖具体的转轴: 对任何 $\boldsymbol{n}$ 的展开都成立. 反对称矩阵的对角元恒为零 ($\boldsymbol{G}_{ii}=-\boldsymbol{G}_{ii}$), 且只有三个独立元素, 恰好对应旋转的三个自由度, 维度上的一致并非偶然: 旋转的连续参数个数与生成元的独立参数个数总是一样的. 若把离散的无穷小角换成连续时间, 同一论证给出切向量条件: 对光滑族 $\boldsymbol{R}(t)$ ($\boldsymbol{R}(0)=\boldsymbol{I}$), 由 $\boldsymbol{R}(t)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R}(t)=\boldsymbol{I}$ 对 t 求导并在 $t=0$ 取值, 得 $\dot{\boldsymbol{R}}(0)^{\mathsf{T}}+\dot{\boldsymbol{R}}(0)=0$.

4.4 叉乘与生成元

Def. 3 叉乘矩阵

对 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathsf{T}}\in\mathbb{R}^3$, 定义叉乘矩阵

$$[\boldsymbol{a}]_\times=\begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix}.$$

它满足 $[\boldsymbol{a}]_\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v}$ 对一切 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ 成立.

Prop. 4　反对称矩阵与向量的同构

映射 $\boldsymbol{a} \mapsto [\boldsymbol{a}]_\times$ 是 $\mathbb{R}^3$ 到全体三维实反对称矩阵之集的线性同构: 每个三维反对称矩阵恰好来自一个参数向量, 三个独立分量对应向量的三个坐标.

Pf　反对称条件 $\boldsymbol{G}_{ij} = -\boldsymbol{G}_{ji}$ 给出对角线全零与三对独立元素 $(\boldsymbol{G}_{12}, \boldsymbol{G}_{13}, \boldsymbol{G}_{23})$, 正是 $[\boldsymbol{a}]_\times$ 中 $(-a_3, a_2, -a_1)$ 的三个参数; 对应 $\boldsymbol{a} \mapsto [\boldsymbol{a}]_\times$ 是一一对应的线性映射. □

结合命题 4.2, 生成元与叉乘的关系可以写成:

Prop. 5　生成元的叉乘作用

对任意 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ 与 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{G})\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}.$$

特别地 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{G} = [\boldsymbol{n}]_\times$, 且无穷小旋转(4.1) 有一个几何读法: 小转角下, 每个向量沿垂直于转轴的圆周切向移动 $\mathrm{d}\theta|\boldsymbol{v}|$ 的长度.

Pf　由 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{G}$ 的定义与 $\boldsymbol{G}_i \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{v}$ 直接计算 $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{G})\boldsymbol{v} = \sum_i a_i (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}$. □

至此, 旋转的无穷小结构完全翻译成了向量代数: 生成元对应向量, 生成元作用对应叉乘. 下一节将看到对易关系也能这样翻译: 对易子对应叉乘.

5

SO(3) 的 Lie 代数

5.1 李代数 so(3)

Def. 1 $\mathfrak{so}(3)$

集合

$$\mathfrak{so}(3) = \{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{G} \mid \boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3\}$$

称为旋转群 SO(3) 的 Lie 代数 (Lie algebra), 读作"SO(3) 的 so". 直观上, 它是全部无穷小旋转生成元的空间: 每个元素 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{G}$ 携带一个转轴方向 (单位化 $\boldsymbol{a}$) 与一个转动速率 ($|\boldsymbol{a}|$).

Prop. 1 基与维数

$\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{G}_2, \boldsymbol{G}_3$ 构成 $\mathfrak{so}(3)$ 的一组基, 因而 $\dim\mathfrak{so}(3) = 3$. 由命题 4.4, $\mathfrak{so}(3)$ 正是全体三维实反对称矩阵之集.

Pf 线性无关: 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{G} = 0$, 则对一切 $\boldsymbol{v}$ 有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v} = 0$; 取 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 不平行 ($\boldsymbol{a}\neq 0$ 时总可以做到), 得 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v}\neq 0$, 矛盾, 故 $\boldsymbol{a} = 0$. 又由命题 4.4, $\mathfrak{so}(3)$ 中元素正是全部反对称矩阵, 而三维反对称矩阵由三个独立参数确定, 故 $\mathfrak{so}(3)$ 由三个基向量张成. □

" 代数" 一词的由来在下一小节: $\mathfrak{so}(3)$ 中的元素不仅可加可数乘, 而且对" 对易子" 运算封闭, 这就是 Lie 代数的结构. 本讲不采用流形与切空间的严格语言: 把 $\mathfrak{so}(3)$ 理解为全部无穷小旋转生成元的空间就足够了.

5.2 生成元的对易关系

先建立生成元乘积的矩阵元恒等式, 再推导对易关系. 记对易子 $[\boldsymbol{G}_i, \boldsymbol{G}_j] = \boldsymbol{G}_i\boldsymbol{G}_j - \boldsymbol{G}_j\boldsymbol{G}_i$.

Lem. 1　乘积恒等式

对一切 $i,j,a,b\in\{1,2,3\}$,

$$(\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{G}_j)_{ab}=\delta_{ib}\delta_{aj}-\delta_{ij}\delta_{ab}.$$

Pf　由 $\boldsymbol{G}_i$ 的矩阵元 $(\boldsymbol{G}_i)_{jk}=-\varepsilon_{ijk}$ (Levi–Civita 符号), 乘积的矩阵元为 $(\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{G}_j)_{ab}=\sum_c\varepsilon_{iac}\varepsilon_{jcb}$ (两个负号相消). 用 Levi–Civita 符号的标准收缩恒等式 $\sum_c\varepsilon_{ikc}\varepsilon_{lmc}=\delta_{il}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{kl}$ 以及 $\varepsilon_{jcb}=-\varepsilon_{jbc}$:

$$(\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{G}_j)_{ab}=-\sum_c\varepsilon_{iac}\varepsilon_{jbc}=-(\delta_{ij}\delta_{ab}-\delta_{ib}\delta_{aj})=\delta_{ib}\delta_{aj}-\delta_{ij}\delta_{ab}.$$

□

Thm. 1　对易关系

旋转生成元满足

$$[\boldsymbol{G}_i,\boldsymbol{G}_j]=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{G}_k. \tag{5.1}$$

Pf　由引理,

$$[\boldsymbol{G}_i,\boldsymbol{G}_j]_{ab}=\delta_{ib}\delta_{aj}-\delta_{ij}\delta_{ab}-\big(\delta_{jb}\delta_{ai}-\delta_{ji}\delta_{ab}\big)=\delta_{ib}\delta_{aj}-\delta_{jb}\delta_{ai}.$$

另一方面 $(\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{G}_k)_{ab}=-\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kab}=-\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abk}$ (循环置换下标), 由收缩恒等式 $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abk}=\delta_{ia}\delta_{jb}-\delta_{ib}\delta_{ja}$, 得 $(\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{G}_k)_{ab}=\delta_{ib}\delta_{ja}-\delta_{ia}\delta_{jb}$, 与上式逐项一致. □

写成分量: $[\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2]=\boldsymbol{G}_3$, $[\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3]=\boldsymbol{G}_1$, $[\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_1]=\boldsymbol{G}_2$ (循环). 定理的意义有四点. 第一, 三个生成元彼此不对易, 这正是第 2.2 节有限旋转非对易性的无穷小版本: 乘积次序不能交换的性质, 在无穷小层面表现为对易子不为零. 第二, 对易子仍然是生成元的线性组合, 即 $\mathfrak{so}(3)$ 在对易子下封闭: 这一封闭性使 $\mathfrak{so}(3)$ 配 $\boldsymbol{G}_i$ 之间的括号成为一个 Lie 代数. 第三, 系数 ε_{ijk} 完全决定 $\mathfrak{so}(3)$ 的结构, 称为结构常数. 第四, 这条对易关系是第二篇的直接基础: 下一篇把旋转群映到 Hilbert 空间后, 旋转生成元变成角动量算符, 而 $[G_i,G_j]=\varepsilon_{ijk}G_k$ 将变成角动量对易关系 $[\hat{J}_i,\hat{J}_j]=\mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k$ (多出的 i 来自量子生成元的自伴性, $\hbar$ 来自量纲); 本讲把这条关系的所有数学内容在经典层面准备齐全.

Cor. 1　矢量形式

对任意 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$,

$$[\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{G},\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{G}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{G}.$$

即映射 $\boldsymbol{a}\mapsto\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{G}$ 把叉乘映为对易子: $\mathfrak{so}(3)$ 与带叉乘的 $\mathbb{R}^3$ 同构, $\mathfrak{so}(3)\cong(\mathbb{R}^3,\times)$.

Pf　由对易子的双线性与定理(5.1): $[\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{G},\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{G}]=\sum_{ij}a_ib_j[\boldsymbol{G}_i,\boldsymbol{G}_j]=\sum_{ijk}a_ib_j\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{G}_k=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{G}$. □

由同构 $\mathfrak{so}(3)\cong(\mathbb{R}^3,\times)$, 对易子的双线性、反对称与 Jacobi 恒等式自动由 $\mathbb{R}^3$ 的叉乘继承, 不必逐一验证.

Cor. 2　乘积恒等式

对任意 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$,

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{G})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{G})=\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathsf{T}}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{I}.$$

Pf　由引理,

$$\Big((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{G})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{G})\Big)_{mn}=\sum_{ij}a_ib_j(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{ij}\delta_{mn})=a_mb_n-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\delta_{mn},$$

即矩阵 $\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathsf{T}}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{I}$ 的 (m,n) 元. □

这个恒等式是第 6.2 节指数级数精确求和的代数引擎: 单位向量的生成元只有两个独立的幂.

6

从生成元回到有限旋转

6.1 固定轴旋转与单参子群

绕固定轴 $\boldsymbol{n}$ 的旋转族 $\theta \mapsto \boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)$ 只依赖一个连续参数, 并且满足复合法则 (命题 2.2) 与连续性 (命题 2.3). 这样的对象有标准名称:

Def. 1　单参子群

连续映射 $g:\mathbb{R}\to G$ 若满足 $g(s)g(t)=g(s+t)$ 对一切 $s,t\in\mathbb{R}$ 成立, 且 $g(0)=e$ (群的单位元), 则称为群 G 的单参子群 (one-parameter subgroup). 绕固定轴的旋转族 $\theta\mapsto\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)$ 是 SO(3) 的单参子群.

单参子群的意义在于: 群元素被一个参数连续地参数化, 而且参数可以相加. 现在从无穷小的一端重建它. 把有限旋转 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)$ 等分成 N 份:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta/N)^{N}.$$

对每一份用无穷小展开(4.1), 误差为 $O(1/N^2)$:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)=\Big(\boldsymbol{I}+\frac{\theta}{N}\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}+O\Big(\frac{1}{N^2}\Big)\Big)^{N}.$$

取极限 $N\to\infty$ 时, 无穷多个无穷小旋转的复合应当收敛到某个有限旋转. 这是下述标准事实:

Prop. 1　乘积极限

对任意矩阵 $\boldsymbol{X}$,

$$\lim_{N\to\infty}\Big(\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{X}}{N}\Big)^{N}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{X}},\tag{6.1}$$

其中 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{X}}=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{X}^{k}/k!$ 是矩阵指数.

Pf 由二项式定理, $\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{X}/N\right)^N=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}\boldsymbol{X}^k N^{-k}$, 且

$$\binom{N}{k}\frac{1}{N^k}=\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{N}\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}\frac{1}{k!}.$$

对固定 k 逐项收敛; 余项由 $\sum_k\|\boldsymbol{X}\|^k/k!=\mathrm{e}^{\|\boldsymbol{X}\|}$ 的收敛性控制到任意小, 故整个和收敛到 $\sum_k \boldsymbol{X}^k/k!=\mathrm{e}^{\boldsymbol{X}}$. □

把 $\boldsymbol{X}=\theta\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}$ 代入, 误差项 $O(1/N^2)$ 在极限下消失:

Cor. 1 旋转是无穷小旋转的积累

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)=\lim_{N\to\infty}\left(\boldsymbol{I}+\frac{\theta}{N}\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}\right)^N=\mathrm{e}^{\theta\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}}.$$

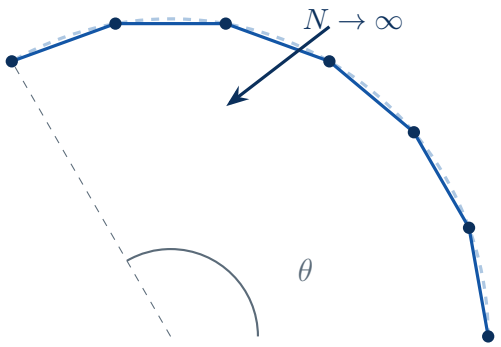


图 4: 有限旋转作为无穷小旋转的积累: 蓝色折线是把 θ 等分成 N 份后依次复合得到的轨道, 每份近似为 $\boldsymbol{I}+(\theta/N)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}$; 取极限 $N\to\infty$, 折线收敛到光滑圆弧, 即 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)\boldsymbol{v}=\mathrm{e}^{\theta\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}}\boldsymbol{v}$.

Eg. 1 匀速转动

刚体绕固定轴 $\boldsymbol{n}$ 以角速度 ω 匀速转动, 时间 t 后的旋转为 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\omega t)$; 生成元 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}$ 携带转轴与角速度的全部信息, 有限旋转是它对时间的指数.

6.2 指数形式

上一小节在概念上建立了 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)=\mathrm{e}^{\theta\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}}$, 但还缺一个显式表达式. 指数级数可以用生成元的幂恒等式精确求和. 由推论 5.2 取 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{n}$:

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G})^2=\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathsf{T}}-\boldsymbol{I}.$$

又 $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G})\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}=0$, 故 $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G})^3=(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G})(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathsf{T}}-\boldsymbol{I})=-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G})$. 归纳得幂的循环约化: 对 $k\geq 1$,

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G})^{2k}=(-1)^{k-1}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G})^2,\qquad (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G})^{2k+1}=(-1)^k(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}).$$

Thm. 1　指数映射

设 $\boldsymbol{n}$ 是单位向量, $\theta\in\mathbb{R}$. 则

$$\mathrm{e}^{\theta\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}}=\boldsymbol{I}\cos\theta+\sin\theta\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G})+(1-\cos\theta)\,\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathsf{T}},\tag{6.2}$$

且右端正是绕轴 $\boldsymbol{n}$ 转动角 θ 的旋转: $\mathrm{e}^{\theta\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}}=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)$.

Pf　把指数级数按奇偶幂拆开, 代入循环约化:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\theta\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}}&=\boldsymbol{I}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^{2k}}{(2k)!}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G})^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G})^{2k+1}\\&=\boldsymbol{I}+(1-\cos\theta)(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathsf{T}}-\boldsymbol{I})+\sin\theta\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}),\end{aligned}$$

其中 $\sum_{k\geq1}(-1)^{k-1}\theta^{2k}/(2k)!=1-\cos\theta$ 与 $\sum_{k\geq0}(-1)^k\theta^{2k+1}/(2k+1)!=\sin\theta$ 是余弦与正弦的级数. 这就得到(6.2). 验证它是旋转: 由 $\boldsymbol{X}=\theta\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}$ 反对称, $(\mathrm{e}^{\boldsymbol{X}})^{\mathsf{T}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}}=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{X}}=(\mathrm{e}^{\boldsymbol{X}})^{-1}$, 且 $\det\mathrm{e}^{\boldsymbol{X}}=\mathrm{e}^{\operatorname{Tr}\boldsymbol{X}}=1$, 故 $\mathrm{e}^{\theta\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}}\in\mathrm{SO}(3)$. 它保持轴: $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G})\boldsymbol{n}=0$ 使 $\mathrm{e}^{\theta\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}}\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}$; 它的迹为 $\operatorname{Tr}\mathrm{e}^{\theta\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}}=3\cos\theta+(1-\cos\theta)=1+2\cos\theta$, 由命题 3.2, 这是绕 $\boldsymbol{n}$ 转 $\pm\theta$ 的旋转. 当 $\theta\to0$ 时它与 $\boldsymbol{I}$ 的距离为 θ 的一阶, 与 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)$ 同号且随 θ 连续变化, 故符号取正: 恰为 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)$. □

生成元与有限旋转

定理(6.2) 建立了本篇最重要的对应:

$$\boxed{\text{生成元}\ \longleftrightarrow\ \text{有限旋转},\qquad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}\ \longmapsto\ \mathrm{e}^{\theta\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}}=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta).}$$

每条"转轴 + 转动速率"的无穷小信息, 经过指数累积成一个有限旋转; 反过来, 在恒等元附近取对数 (第 3.2 节的提取轴角方法) 从有限旋转读回生成元. 指数映射 $\exp:\mathfrak{so}(3)\to\mathrm{SO}(3)$, $\boldsymbol{X}\mapsto\mathrm{e}^{\boldsymbol{X}}$ 把 Lie 代数映回 Lie 群.

6.3 Rodrigues 公式

指数形式的显式矩阵就是轴角旋转的 Rodrigues 公式.

Thm. 2 Rodrigues 公式

设 $\boldsymbol{n}$ 是单位向量, $\theta \in \mathbb{R}$. 对任意 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\cos\theta + (1-\cos\theta)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{n} + \sin\theta\,(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}), \tag{6.3}$$

等价地, 矩阵形式为

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta) = \boldsymbol{I}\cos\theta + (1-\cos\theta)\,\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathsf{T}} + \sin\theta\,[\boldsymbol{n}]_\times.$$

Pf 矩阵形式正是(6.2) (其中 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G} = [\boldsymbol{n}]_\times$, 命题 4.4). 对向量形式, 用 $\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}$ 与 $[\boldsymbol{n}]_\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}$ 逐项作用即可. □

Rodrigues 公式的几何读法: 轴向分量 $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}$ 不动, 垂直分量 $\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}$ 在垂直于轴的平面内转过 θ, 系数 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 正是平面旋转的系数; 这是第 4.1 节几何图像在有限角度下的精确版本.

Eg. 2 校验基本旋转

取 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_3$. 则 $\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3^{\mathsf{T}} = \operatorname{diag}(0,0,1)$, $[\boldsymbol{e}_3]_\times = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 代入矩阵形式:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{e}_3,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}_z(\theta),$$

与(3.1) 一致; 同理 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{e}_i,\theta) = \boldsymbol{R}_i(\theta)$. 三个基本旋转矩阵都是 Rodrigues 公式的特例, 也是 $\mathrm{e}^{\theta\boldsymbol{G}_i} = \boldsymbol{R}_i(\theta)$ 的直接结果.

Eg. 3　Rodrigues 公式的应用

由第 3.2 节的例子, 循环置换矩阵 $\boldsymbol{R}$ 满足 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},2\pi/3)$, $\boldsymbol{n}=(1,1,1)/\sqrt{3}$. 取 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1$: $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_1=1/\sqrt{3}$, $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e}_1=(1,1,1)\times(1,0,0)/\sqrt{3}=(0,1,-1)/\sqrt{3}$, 代入(6.3) ($\cos(2\pi/3)=-1/2$, $\sin(2\pi/3)=\sqrt{3}/2$):

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1=-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{(0,1,-1)}{\sqrt{3}}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=(0,1,0)=\boldsymbol{e}_2,$$

正是循环置换的效果. 由此也可复核第 3.2 节提取轴角的结果.

Cor. 2　迹与反对称部分

对 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\theta)$:

$$\operatorname{Tr}\boldsymbol{R}=1+2\cos\theta,\qquad \boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}=2\sin\theta\,[\boldsymbol{n}]_\times,\qquad \boldsymbol{R}(\boldsymbol{n},\pi)=2\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathsf{T}}-\boldsymbol{I}.$$

Pf　由矩阵形式: 第一式取迹, 用 $\operatorname{Tr}[\boldsymbol{n}]_\times=0$ 与 $\operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathsf{T}}\right)=1$; 第二式由 $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}=\boldsymbol{I}\cos\theta+(1-\cos\theta)\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathsf{T}}-\sin\theta\,[\boldsymbol{n}]_\times$ 相减; 第三式代入 $\theta=\pi$. □

这三条公式正是第 3.2 节提取轴角方法的依据: 至此, 由矩阵反解转轴与转角的方法完全自洽. Rodrigues 公式是轴角旋转的显式矩阵, 也是指数映射在 SO(3) 上的完全显式化; 本讲之后不再需要更复杂的计算技巧.

7

总结: 为下一篇准备什么

本讲建立的完整链条如下:

$$\boxed{\mathrm{SO}(3) \longrightarrow \text{无穷小旋转} \longrightarrow G_i \longrightarrow \mathfrak{so}(3) \longrightarrow [G_i, G_j] = \varepsilon_{ijk} G_k \longrightarrow \mathrm{e}^{\theta\, \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}}} \tag{7.1}$$

链条的每一环都对应本讲的确定内容, 也是第二篇的直接输入:

- SO(3): 旋转是保持内积与取向的线性映射, 由 $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$, $\det \boldsymbol{R} = 1$ 刻画; 旋转构成三参数连续群, 且绕不同轴的旋转不对易 (第 1–2 节). 群元有两套常用参数化: 轴角表示 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}, \theta)$ 与 Euler 角表示 $\boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_z(\gamma)$ (第 3 节).
- 无穷小旋转: 转角趋于零时 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}, \mathrm{d}\theta) = \boldsymbol{I} + \mathrm{d}\theta\, \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G} + O(\mathrm{d}\theta^2)$, 有限旋转是无穷小旋转的积累 (第 4.1 节, 第 6.1 节).
- G_i: 三个基本生成元有显式矩阵, 绕任意轴的生成元是它们的线性组合 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}$; 正交条件迫使生成元反对称, 反对称矩阵与向量一一对应, 生成元作用即叉乘 (第 4.2–4.4 节).
- $\mathfrak{so}(3)$: 全部生成元构成的空间, 即三维实反对称矩阵之集, 以 G_1, G_2, G_3 为基; 它与带叉乘的 $\mathbb{R}^3$ 同构 (第 5.1 节).
- $[G_i, G_j] = \varepsilon_{ijk} G_k$: 生成元彼此不对易, 但对易子仍在 $\mathfrak{so}(3)$ 中; 这是 SO(3) 非 Abel 性在无穷小层面的精确表现, 也是第二篇角动量对易关系的直接前身 (第 5.2 节).
- $\mathrm{e}^{\theta\, \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}, \theta)$: 指数映射把生成元累积成有限旋转, Rodrigues 公式给出显式矩阵与对向量的作用 (第 6 节).

第二篇的问题

已知三维空间旋转由 SO(3) 描述: 旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$, 生成元 G_i, 对易关系 $[G_i, G_j] = \varepsilon_{ijk} G_k$, 指数形式 $\mathrm{e}^{\theta\, \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{G}}$. 现在的问题是: 通过群表示把 SO(3) 映射到量子力学的 Hilbert 空间后, 旋转矩阵、生成元、对易关系和指数形式分别会变成什么? 第二篇将从这个问题

出发: 正交矩阵变成幺正算符, 反对称生成元变成自伴生成元 (出现 i 因子与 $\hbar$), 对易关系保持同一结构, 指数成为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\,\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}/\hbar}$, 由此进入角动量算符的理论.