经典力学中的空间旋转

Spatial Rotations in Classical Mechanics

旋转矩阵的轴角表示与 Euler 角表示, 等价性与万向锁

RongYu

经典力学系列讲义

2026.8.6

目录

导言 3

I 旋转矩阵与轴角表示 4

1 旋转矩阵与旋转群 5
1.1 转动的定义与旋转群 . . . 5
1.2 基本旋转矩阵 . . . 5
1.3 叉乘矩阵与旋转代数 . . . 6
1.4 转动的复合与非对易 . . . 6

2 轴角表示与 Rodrigues 公式 8
2.1 Euler 转动定理 . . . 8
2.2 Rodrigues 公式 . . . 8
2.3 旋转向量与指数映射 . . . 9
2.4 轴角表示的性质与反解 . . . 10

3 轴角表示的参数独立性 12
3.1 三个自由分量 . . . 12
3.2 一般区域上的全局坐标 . . . 12
3.3 例外点与识别 . . . 13

II Euler 角表示与两种表示的等价性 14

4 Euler 角的定义与矩阵形式 15
4.1 动机与约定 . . . 15
4.2 显式矩阵 . . . 15
4.3 Euler 角作为局部坐标 . . . 16

5 轴角表示与 Euler 角的相互转换 18
5.1 由矩阵反解 Euler 角 . . . 18
5.2 由 Euler 角求轴角 . . . 18
5.3 大多数情形下的等价性 . . . 19

III 万向锁与参数独立性的严格分析 20

6 万向锁 Gimbal Lock 21

6.1 现象 21
6.2 数学本质: 秩的退化 21
6.3 近奇异行为与体积元 22
6.4 与轴角表示的对比 23

7 参数独立性的严格分析 24

7.1 轴角: 严格的三个独立参数 24
7.2 Euler 角: 三个参数独立吗? 24
7.3 两种表示对照 25

习题 26

导言

刚体在空间中的姿态,向量在不同坐标系下的分量变换, 以及刚体绕定点的转动, 全都归结为同一个数学对象: 三维空间中的转动矩阵. 一个转动是保持长度与夹角的线性变换, 全体转动矩阵在矩阵乘法下构成三维旋转群 SO(3), 这是一个三维的流形: 一个转动由三个独立参数确定. 经典的力学与几何文献给出了两种最常用的三参数描述:

- 轴角表示 (axis-angle). 由 Euler 转动定理, 任意转动都是绕某一固定轴的转动: 指定单位转轴 $\boldsymbol{n}$ 与转角 θ, 记旋转向量

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \boldsymbol{n}, \tag{0.1}$$

  则转动矩阵写成 $\hat{R}(\boldsymbol{n}, \theta) = \hat{R}(\boldsymbol{\theta})$. 它由 Rodrigues 公式给出, 且等于矩阵指数 $\hat{R}(\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{e}^{[\boldsymbol{\theta}]_\times}$.
- Euler 角表示 (Euler angles). 把任意转动分解为三次绕坐标轴的基本转动, $\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)$, 三个角度 α, β, γ 依次为进动角, 章动角与自转角.

两种表示在大多数情形下是等价的: 对” 几乎所有” 转动, 既存在唯一的轴角三元组, 也存在唯一的 Euler 角三元组, 二者可光滑地相互转换. 然而它们在病态点处的表现截然不同. Euler 角在 $\beta = 0$ 与 $\beta = \boldsymbol{\pi}$ 处出现万向锁 (Gimbal lock): 参数映射的秩从 3 降到 2, 一个自由度消失; 轴角表示则没有这种局部退化. 由此引出一个被反复讨论的问题:

本讲要回答的问题

轴角表示给出严格的三个独立参数. Euler 角也是三个参数, 那么它们严格独立吗?

本讲主要给出上述两种表示的数学形式: 定义, 显式矩阵, 转换公式, 以及它们各自的病态点. 全讲分三部分. 第一部分 (第 1-3 节) 建立旋转矩阵的代数基础, 给出轴角表示与 Rodrigues 公式, 并论证轴角表示在一般区域上是严格的三个独立参数. 第二部分 (第 4-5 节) 引入 Euler 角, 给出其显式矩阵, 建立它与轴角表示的相互转换, 说明二者在大多数情形下的等价性. 第三部分 (第 6-7 节) 严格分析万向锁的数学本质, 并回答 Euler 角是否也是三个严格独立的参数.

Part I

旋转矩阵与轴角表示

本部分从旋转的定义出发, 建立旋转矩阵与叉乘矩阵的代数基础, 再由 Euler 转动定理给出轴角表示: 任意转动由单位转轴 $\boldsymbol{n}$ 与转角 θ 确定, 等价地由旋转向量 $\boldsymbol{\theta} = \theta\boldsymbol{n}$ 确定; 其矩阵元由 Rodrigues 公式给出, 且 $\hat{R}(\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{e}^{[\boldsymbol{\theta}]_\times}$. 最后论证轴角表示在一般区域上是严格的三个独立参数.

内容概要

- 掌握 SO(3) 的定义, 基本旋转矩阵与叉乘矩阵的恒等式.
- 会用 Rodrigues 公式写出绕任意轴的转动矩阵, 并能由矩阵反解转轴与转角.
- 理解旋转向量与指数映射的关系, 以及开球 B_π 作为 SO(3) 全局坐标的性质.

1

旋转矩阵与旋转群

1.1 转动的定义与旋转群

Def. 1 三维转动

线性映射 $\hat{R}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 称为一个转动 (rotation), 若它保持内积与取向: 对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3$, $\left\langle \hat{R}\boldsymbol{x}\middle|\hat{R}\boldsymbol{y}\right\rangle=\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle$, 且 $\det\hat{R}=1$. 在标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 下, $\hat{R}$ 由矩阵 $\hat{R}\in\mathbb{R}^{3\times3}$ 表示, 满足

$$\hat{R}^{\mathsf{T}}\hat{R}=\boldsymbol{I},\qquad \det\hat{R}=1. \tag{1.1}$$

保持内积等价于保持一切长度与夹角, 所以转动正是以原点为不动点的刚体转动: 它把整个空间刚性地转一个角度. 条件 $\hat{R}^{\mathsf{T}}\hat{R}=\boldsymbol{I}$ 说明 $\hat{R}$ 是正交矩阵 (orthogonal matrix), $\det\hat{R}=1$ 说明它保持手性, 排除了反射. 全体满足(1.1) 的矩阵构成特殊正交群

Prop. 1 三维旋转群

集合

$$\mathrm{SO}(3)=\left\{\hat{R}\in\mathbb{R}^{3\times3}\ \text{s.t.}\ \hat{R}^{\mathsf{T}}\hat{R}=\boldsymbol{I},\ \det\hat{R}=1\right\} \tag{1.2}$$

在矩阵乘法下构成一个群, 且是非 Abel 的.

Pf 单位阵属于 SO(3); 由 $\hat{R}^{\mathsf{T}}\hat{R}=\boldsymbol{I}$ 得 $\hat{R}^{-1}=\hat{R}^{\mathsf{T}}$, 又 $\det\hat{R}^{-1}=\det\hat{R}=1$, 故逆元在集合内; 若 $\hat{R}_1,\hat{R}_2\in\mathrm{SO}(3)$, 则 $(\hat{R}_1\hat{R}_2)^{\mathsf{T}}\hat{R}_1\hat{R}_2=\hat{R}_2^{\mathsf{T}}\hat{R}_1^{\mathsf{T}}\hat{R}_1\hat{R}_2=\boldsymbol{I}$, $\det\left(\hat{R}_1\hat{R}_2\right)=\det\hat{R}_1\det\hat{R}_2=1$, 故乘积封闭. 结合律来自矩阵乘法. 非交换性由第 1.4 小节的例子说明. □

三维旋转群是一个紧致连通的三维 Lie 群: 一个转动由三个独立参数标记, 且相邻的转动可以连续变形. 描述这三个参数正是本讲的主题.

1.2 基本旋转矩阵

绕坐标轴 $\boldsymbol{e}_i$ 转动角 θ (右手定则, 主动转动) 的矩阵分别记为 $\hat{R}_x(\theta),\hat{R}_y(\theta),\hat{R}_z(\theta)$:

$$\begin{aligned}\hat{R}_x(\theta)&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},\\ \hat{R}_y(\theta)&=\begin{pmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta\\0&1&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix},\qquad \hat{R}_z(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{1.3}$$

例如 $\hat{R}_z(\theta)$ 作用在向量上, 保持第三分量不变而在前两个分量所在的平面内旋转. 三个基本旋转矩阵 $\hat{R}_i(\theta)=\mathrm{e}^{\theta[\boldsymbol{e}_i]_\times}$ (见第 2.3 小节) 是构造一切旋转的砖块: 任意转动都可以写成若干基本旋转的乘积, Euler 角表示正是这一思想的最典型实现.

1.3 叉乘矩阵与旋转代数

在轴角表示中,转轴与转角要进入矩阵, 最自然的途径是把一个向量 $\boldsymbol{\omega}$ 映射为它的叉乘矩阵 (skew-symmetric matrix):

Def. 2　叉乘矩阵

对 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)^{\mathsf{T}}\in\mathbb{R}^3$, 定义

$$[\boldsymbol{\omega}]_\times=\begin{pmatrix}0&-\omega_3&\omega_2\\ \omega_3&0&-\omega_1\\ -\omega_2&\omega_1&0\end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

它满足 $[\boldsymbol{\omega}]_\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$ 对一切 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ 成立.

叉乘矩阵是反对称的, $[\boldsymbol{\omega}]_\times^{\mathsf{T}}=-[\boldsymbol{\omega}]_\times$, 且 $[\boldsymbol{\omega}]_\times$ 到 $\boldsymbol{\omega}$ 的对应是 $\mathbb{R}^3$ 与三维反对称矩阵空间之间的一一对应. 全体三维反对称矩阵构成旋转代数 $\mathfrak{so}(3)$, 它是旋转群 $\mathrm{SO}(3)$ 的 Lie 代数: 光滑经过单位元的转动族 $\hat{R}(t)$ 满足 $\hat{R}(t)^{\mathsf{T}}\hat{R}(t)=\boldsymbol{I}$, 求导得 $\dot{\hat{R}}(0)^{\mathsf{T}}+\dot{\hat{R}}(0)=\boldsymbol{O}$, 即切向量 $\dot{\hat{R}}(0)$ 必为反对称矩阵. 下一条恒等式是轴角表示推导的引擎:

Prop. 2　叉乘矩阵的幂恒等式

对单位向量 $\boldsymbol{n}$ 与任意向量 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{n}$, 有

$$[\boldsymbol{n}]_\times^2=\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathsf{T}}-\boldsymbol{I},\qquad [\boldsymbol{n}]_\times^3=-[\boldsymbol{n}]_\times,\qquad [\boldsymbol{\omega}]_\times^2=\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathsf{T}}-\omega^2\boldsymbol{I}. \tag{1.5}$$

Pf　取标准基并直接展开. 用 $[\boldsymbol{n}]_\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}$, 先对任意 $\boldsymbol{v}$ 验证 $[\boldsymbol{n}]_\times^2\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})-\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathsf{T}}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}$, 即第一式; 再由 $[\boldsymbol{n}]_\times^3\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}))$ 与第一式得 $[\boldsymbol{n}]_\times^3=-[\boldsymbol{n}]_\times$. 第三式是把 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{n}$ 代入第一式并乘以 ω^2. □

Rmk　恒等式(1.5) 的几何意义是: 在垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的平面内, $[\boldsymbol{n}]_\times$ 把向量绕 $\boldsymbol{n}$ 转过 $+\pi/2$; 两次作用转 $+\pi$, 变为取负, 即 $[\boldsymbol{n}]_\times^2$ 在垂直平面上等于 $-\boldsymbol{I}$, 这正对应第二式.

1.4 转动的复合与非对易

两个转动先后作用, 复合对应的矩阵为乘积: 先作 $\hat{R}_1$ 再作 $\hat{R}_2$ 总变换为 $\hat{R}=\hat{R}_2\hat{R}_1$ (矩阵作用在列向量 $\boldsymbol{x}\mapsto\hat{R}\boldsymbol{x}$ 上, 从右往左依次作用). 乘积顺序一般不可交换:

Eg. 1　转动的非对易

比较

$$\hat{R}=\hat{R}_x(\pi/2)\hat{R}_y(\pi/2)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\qquad \hat{R}'=\hat{R}_y(\pi/2)\hat{R}_x(\pi/2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}.$$

二者迹都为 0, 因而都是 120° 的转动, 但转轴不同 (分别沿 $(1,1,1)$ 与 $(1,1,-1)$ 方向), 故 $\hat{R}\neq\hat{R}'$. 这说明 SO(3) 是非 Abel 群, 也是" 转动的复合不等于旋转向量的加法" 的直观来源 (见第 2.4 小节).

2

轴角表示与 Rodrigues 公式

2.1 Euler 转动定理

轴角表示的出发点是一条几何事实: 任何转动都保持一条直线不动.

Thm. 1 Euler 转动定理

对任意 $\hat{R} \in \mathrm{SO}(3)$, 存在单位向量 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^3$ 使得 $\hat{R}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}$: 每个转动都是绕某个固定轴的转动.

Pf 只需证明 1 是 $\hat{R}$ 的本征值. 由 $\hat{R}^{\mathsf{T}}\hat{R} = \boldsymbol{I}$ 得 $\hat{R}^{-1} = \hat{R}^{\mathsf{T}}$, 而 $\det \hat{R} = 1$, 故

$$\begin{aligned}\det\left(\hat{R} - \boldsymbol{I}\right) &= \det\left(\hat{R}(\boldsymbol{I} - \hat{R}^{\mathsf{T}})\right) = \det \hat{R} \cdot \det\left(\boldsymbol{I} - \hat{R}^{\mathsf{T}}\right) \\ &= \det\left(\boldsymbol{I} - \hat{R}\right) = (-1)^3 \det\left(\hat{R} - \boldsymbol{I}\right) = -\det\left(\hat{R} - \boldsymbol{I}\right),\end{aligned}$$

因而 $\det\left(\hat{R} - \boldsymbol{I}\right) = 0$, $\hat{R}$ 有本征值 1, 其本征向量方向取为单位向量即为 $\boldsymbol{n}$. □

于是任何一个转动都由一条轴与一个转角唯一确定, 这正为轴角表示提供了存在性依据.

2.2 Rodrigues 公式

Thm. 2 Rodrigues 公式

设 $\boldsymbol{n}$ 是单位向量, $\theta \in \mathbb{R}$. 绕轴 $\boldsymbol{n}$ 转动角 θ 的矩阵为

$$\hat{R}(\boldsymbol{n}, \theta) = \cos\theta\, \boldsymbol{I} + (1 - \cos\theta)\, \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathsf{T}} + \sin\theta\, [\boldsymbol{n}]_\times = \boldsymbol{I} + \sin\theta\, [\boldsymbol{n}]_\times + (1 - \cos\theta)\, [\boldsymbol{n}]_\times^2. \quad (2.1)$$

Pf 把任意向量 $\boldsymbol{v}$ 按平行与垂直于轴的分量分解: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\parallel + \boldsymbol{v}_\perp$, 其中 $\boldsymbol{v}_\parallel = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})$. 转动保持轴向分量不变, 只作用在垂直分量上. 在垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的平面内, $\boldsymbol{v}_\perp$ 与 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}$ 垂直且等长, 且 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{v}_\perp$ 绕 $\boldsymbol{n}$ 转过 $+\pi/2$ 的像. 因此 $\boldsymbol{v}_\perp$ 绕 $\boldsymbol{n}$ 转过 θ 后变为 $\cos\theta\,\boldsymbol{v}_\perp + \sin\theta\,(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})$, 于是

$$\hat{R}(\boldsymbol{n}, \theta)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) + \cos\theta\,\boldsymbol{v}_\perp + \sin\theta\,(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}).$$

代入 $\boldsymbol{v}_\perp = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{n}]_\times\boldsymbol{v}$ 与 $[\boldsymbol{n}]_\times^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}_\perp$, 逐项整理即得(2.1) 的第一行; 再由 $\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{I} + [\boldsymbol{n}]_\times^2$ 得第二行. □

Rmk 直接用(1.5) 可验证(2.1) 给出的矩阵满足 $\hat{R}(\boldsymbol{n},\theta)^{\mathsf{T}}\hat{R}(\boldsymbol{n},\theta) = \boldsymbol{I}$ 与 $\det \hat{R}(\boldsymbol{n},\theta) = 1$, 即它确实属于 $\mathrm{SO}(3)$: 几何构造已经保证了这一点, 代数验算可作为练习 (习题 1).

两个立即的特殊情形:

Cor. 1　半角转动

绕轴 $\boldsymbol{n}$ 转过 π 的矩阵是对称矩阵

$$\hat{R}(\boldsymbol{n},\pi)=2\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathsf{T}}-\boldsymbol{I},$$

其迹为 -1. 而 $\hat{R}(\boldsymbol{n},0)=\hat{R}(\boldsymbol{n},2\pi)=\boldsymbol{I}$, $\hat{R}(\boldsymbol{n},-\theta)=\hat{R}(\boldsymbol{n},\theta)^{-1}$.

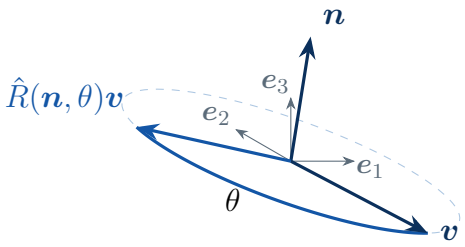


图 1: 轴角表示的几何: 向量 $\boldsymbol{v}$ 绕单位轴 $\boldsymbol{n}$ 转动角 θ 得 $\hat{R}(\boldsymbol{n},\theta)\boldsymbol{v}$, 其端点沿垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的圆运动.

2.3 旋转向量与指数映射

把轴与角合并为一个三向量, 即旋转向量 (rotation vector):

Def. 1　旋转向量

设 $\boldsymbol{n}$ 为单位向量. 称 $\boldsymbol{\theta}=\theta\boldsymbol{n}$ 为旋转向量, 并记

$$\hat{R}(\boldsymbol{\theta})\equiv\hat{R}(\boldsymbol{n},\theta). \tag{2.2}$$

即 $\boldsymbol{\theta}$ 的方向给出转轴, 其模长 $|\boldsymbol{\theta}|=\theta$ 给出转角.

旋转向量与矩阵指数有精确的关系, 这是轴角表示最深的一层数学结构:

Thm. 3　指数映射

对任意 $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^3$, 有

$$\hat{R}(\boldsymbol{\theta})=\mathrm{e}^{[\boldsymbol{\theta}]_\times}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}[\boldsymbol{\theta}]_\times^k. \tag{2.3}$$

即指数映射 $\exp:\mathfrak{so}(3)\to\mathrm{SO}(3)$, $[\boldsymbol{\theta}]_\times\mapsto\mathrm{e}^{[\boldsymbol{\theta}]_\times}$ 恰好给出绕轴 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\theta}/|\boldsymbol{\theta}|$ 转动 $|\boldsymbol{\theta}|$ 角的矩阵.

Pf　记 $\theta=|\boldsymbol{\theta}|$, $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\theta}/\theta$. 由(1.5), $[\boldsymbol{n}]_\times$ 的偶数幂与奇数幂分别化为 $[\boldsymbol{n}]_\times^2$ 与 $[\boldsymbol{n}]_\times$ 的倍数: 对 $k\geq1$, $[\boldsymbol{n}]_\times^{2k}=(-1)^{k-1}[\boldsymbol{n}]_\times^2$, $[\boldsymbol{n}]_\times^{2k+1}=(-1)^k[\boldsymbol{n}]_\times$. 把指数级数按奇偶拆开,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{[\boldsymbol{\theta}]_\times}&=\boldsymbol{I}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^{2k}}{(2k)!}[\boldsymbol{n}]_\times^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}[\boldsymbol{n}]_\times^{2k+1}\\&=\boldsymbol{I}+\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\theta^{2k}}{(2k)!}\Big)[\boldsymbol{n}]_\times^2+\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big)[\boldsymbol{n}]_\times.\end{aligned}$$

两个括号分别是 $1-\cos\theta$ 与 $\sin\theta$, 代入即得 Rodrigues 公式(2.1). □

由(2.3) 立得无穷小转动的表达式: 当 $\|\boldsymbol{\theta}\|$ 很小时, 略去二阶以上项,

$$\hat{R}(\delta\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}]_\times + O(\|\delta\boldsymbol{\theta}\|^2). \tag{2.4}$$

Rmk 无穷小转动的形式直接联系到角速度. 若刚体在瞬时角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 下转动, 经过小时间 $\mathrm{d}t$, 其姿态变化为 $\hat{R} = \boldsymbol{I} + [\boldsymbol{\omega}]_\times \mathrm{d}t + O(\mathrm{d}t^2)$, 即旋转向量近似为 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}t$. 一般地, 对一族转动 $\hat{R}(t)$ 有 $\dot{\hat{R}} = [\boldsymbol{\omega}]_\times \hat{R}$, 其中 $\boldsymbol{\omega}$ 由 $[\boldsymbol{\omega}]_\times = \dot{\hat{R}}\hat{R}^{\mathsf{T}}$ 给出. 这是经典力学中" 无穷小转动即反对称矩阵" 的表述, 后面第 6.2 小节将用它分析 Euler 角的退化.

2.4 轴角表示的性质与反解

Prop. 1 轴角表示的性质

设 $\boldsymbol{n}$ 为单位向量, $\boldsymbol{\theta} = \theta\boldsymbol{n}$. 则

$$\hat{R}(-\boldsymbol{\theta}) = \hat{R}(\boldsymbol{\theta})^{\mathsf{T}} = \hat{R}(\boldsymbol{\theta})^{-1}, \qquad \hat{R}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}, \qquad \operatorname{Tr}\hat{R}(\boldsymbol{\theta}) = 1 + 2\cos\theta, \tag{2.5}$$

且 $\hat{R}(\boldsymbol{\theta})$ 的本征值为 1, $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$, 其中 1 对应的本征向量为 $\boldsymbol{n}$.

Pf 前两式来自 $\hat{R}(-\boldsymbol{\theta}) = \hat{R}(\boldsymbol{n}, -\theta)$ 与正交性. 轴被固定, 故 $\hat{R}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$. 由 Rodrigues 公式与 $\operatorname{Tr}[\boldsymbol{n}]_\times = 0$, $\operatorname{Tr}\big(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathsf{T}}\big) = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = 1$ 得 $\operatorname{Tr}\hat{R}(\boldsymbol{\theta}) = 3\cos\theta + (1-\cos\theta) = 1 + 2\cos\theta$. 本征值由" 沿轴本征值 1, 垂直平面内是二维旋转" 给出. □

利用这些性质可以由已知矩阵反解轴角:

Meth. 1 由矩阵提取轴角

给定 $\hat{R} \in \mathrm{SO}(3)$, 提取 $\boldsymbol{n}, \theta$:

1. 转角由迹确定: $\cos\theta = (\operatorname{Tr}\hat{R} - 1)/2$, 取 $\theta = \arccos\big((\operatorname{Tr}\hat{R} - 1)/2\big) \in [0, \pi]$.
2. 若 $\sin\theta \neq 0$ (即 $\theta \notin \{0, \pi\}$), 由反对称部分

$$\sin\theta\,[\boldsymbol{n}]_\times = \frac{1}{2}(\hat{R} - \hat{R}^{\mathsf{T}}), \qquad \boldsymbol{n} = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{pmatrix} \hat{R}_{32} - \hat{R}_{23} \\ \hat{R}_{13} - \hat{R}_{31} \\ \hat{R}_{21} - \hat{R}_{12} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

3. 若 $\hat{R} = \boldsymbol{I}$ (即 $\theta = 0$), 轴任意, 约定 $\boldsymbol{n}$ 未定义.
4. 若 $\theta = \pi$, 则 $\hat{R}$ 对称且 $\hat{R} = \hat{R}(\boldsymbol{n}, \pi) = 2\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\mathsf{T}} - \boldsymbol{I}$, 由对角线 $\hat{R}_{ii} = 2n_i^2 - 1$ 得 $|n_i| = \sqrt{(\hat{R}_{ii}+1)/2}$, 符号由非对角元 $\hat{R}_{ij} = 2n_i n_j$ 决定.

Rmk 迹公式表明转角与轴的选择无关, 只有反对称部分才携带轴的信息: 这是" 轴角表示" 与" 矩阵表示" 之间唯一的反解入口. 注意 $(\boldsymbol{n}, \theta)$ 与 $(-\boldsymbol{n}, -\theta)$ 描述同一个转动, 转角的约定 $\theta \in [0, \pi]$ 消除了这一冗余, 但付出的代价是 $\theta = \pi$ 处出现二对一的球面 (见第 3.3 小节).

关于复合, 再次强调旋转向量没有可加性:

Prop. 2　复合的不可加性

一般地 $\hat{R}(\boldsymbol{\theta}_1)\hat{R}(\boldsymbol{\theta}_2) \neq \hat{R}(\boldsymbol{\theta}_1+\boldsymbol{\theta}_2)$. 复合 $\hat{R}(\boldsymbol{\theta}_1)\hat{R}(\boldsymbol{\theta}_2)$ 仍是某个转动 $\hat{R}(\boldsymbol{\theta}_{12})$, 其旋转向量由 Tr 与反对称部分按上面方法反解得到.

Pf　群封闭性保证复合仍在 SO(3), 由 Euler 转动定理必有轴角表示. 但 $\mathrm{e}^{[\boldsymbol{\theta}_1]_\times}\mathrm{e}^{[\boldsymbol{\theta}_2]_\times} = \mathrm{e}^{[\boldsymbol{\theta}_1+\boldsymbol{\theta}_2]_\times}$ 仅在 $[\boldsymbol{\theta}_1]_\times$ 与 $[\boldsymbol{\theta}_2]_\times$ 可交换 (即两轴平行或其一为零) 时成立, 这与第 1.4 小节的非对易例子一致. 反解算法见上. □

3

轴角表示的参数独立性

3.1 三个自由分量

旋转向量 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$ 有三个分量 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, 它们都是自由实数. 拆分来看, 单位转轴 $\boldsymbol{n}$ 落在单位球面 S^2 上, 给出两个自由度; 转角 θ 给出一个自由度, 合计三个自由度, 与 SO(3) 的维数一致. 由 Euler 转动定理, 每个转动都来自某个 $\boldsymbol{\theta}$, 故映射

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{SO}(3), \qquad \boldsymbol{\theta} \mapsto \hat{R}(\boldsymbol{\theta}) \tag{3.1}$$

是满射.

3.2 一般区域上的全局坐标

轴角表示不只是" 三个参数", 它在一般区域上还是严格的全局坐标:

Prop. 1　开球上的双射

记开球 $B_\pi = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3 \text{ s.t. } 0 < |\boldsymbol{\theta}| < \pi\}$, $S_\pi = \{\hat{R}(\boldsymbol{n}, \pi) \text{ s.t. } \boldsymbol{n} \in S^2\}$ 为全体半角转动之集, $\boldsymbol{I}$ 为单位元. 映射 Φ 把 B_π 双射到 $\mathrm{SO}(3) \setminus (\{\boldsymbol{I}\} \cup S_\pi)$.

Pf　满射性: 任一非恒等转动 $\hat{R}$ 有转轴 $\boldsymbol{n}$ 与转角 $\theta \in (0, \pi]$; 若 $0 < \theta < \pi$, 则 $\boldsymbol{\theta} = \theta\boldsymbol{n} \in B_\pi$ 且 $\hat{R} = \hat{R}(\boldsymbol{\theta})$, 故除恒等元与半角转动 (它们对应 $\theta = 0$ 与 $\theta = \pi$) 外都被覆盖. 单射性: 设 $\hat{R}(\boldsymbol{\theta}_1) = \hat{R}(\boldsymbol{\theta}_2)$, $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2 \in B_\pi$. 由迹公式 $\mathrm{Tr}\,\hat{R} = 1 + 2\cos\theta$ 与 cos 在 $(0, \pi)$ 上严格单调递减, 得 $\theta_1 = \theta_2$; 又 $\sin\theta \neq 0$, 由(2.6) 得 $[\boldsymbol{n}_1]_\times = [\boldsymbol{n}_2]_\times$, 即 $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}_2$. 故 $\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_2$. □

更重要的是, 参数映射在一般区域上处处非退化, 即局部是微分同胚:

Prop. 2　映射的正则性

对一切 $0 < |\boldsymbol{\theta}| < 2\pi$, 映射 Φ 在 $\boldsymbol{\theta}$ 处的 Jacobi 矩阵秩为 3: 轴角表示是 SO(3) 在这些点处的局部坐标.

Pf　在 $\boldsymbol{\theta} = \theta\boldsymbol{n}$ 处取三个参数方向: 转角方向 θ 与轴的两个独立转动方向 φ_1, φ_2, 后者把 $\boldsymbol{n}$ 分别绕与它垂直的两个正交轴 $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ 转动. 由 Rodrigues 公式与 $[\boldsymbol{\omega}]_\times \hat{R} = [\hat{R}\boldsymbol{\omega}]_\times \hat{R}^{-1}\hat{R}$ 型的公式, 三个切向量可写成右乘形式 $[\boldsymbol{\omega}_\lambda]_\times \hat{R}(\boldsymbol{\theta})$, 其中

$$\boldsymbol{\omega}_\theta = \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{n}_j - \hat{R}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{n}_j \quad (j = 1, 2).$$

$\boldsymbol{\omega}_\theta$ 沿转轴; $\boldsymbol{\omega}_j$ 在垂直于转轴的平面内, 而 $\hat{R}(\boldsymbol{\theta})$ 限制在该平面上是转角为 θ 的旋转, 其本征值 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta} \neq 1$ (因 $0 < \theta < 2\pi$), 故 $\boldsymbol{I} - \hat{R}(\boldsymbol{\theta})$ 在该平面上可逆, $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2$ 线性无关. 于是三个 $\boldsymbol{\omega}_\lambda$ 线性无关, $\{[\boldsymbol{\omega}_\lambda]_\times \hat{R}(\boldsymbol{\theta})\}$ 张成切空间 $T_{\hat{R}(\boldsymbol{\theta})}\,\mathrm{SO}(3)$, 秩为 3. □

Rmk　这两个命题合起来给出" 严格的三个独立参数" 的精确含义: 在开球 B_π 内, $\boldsymbol{\theta}$ 的三个分量是 SO(3) 的一个单张全局坐标, 既无秩的退化, 也无参数冗余, 且覆盖了除恒等元与半角转动外的一切转动.

3.3 例外点与识别

轴角映射的" 病态点" 只有两类, 而且都不是局部的秩退化:

- 恒等元 $\theta = 0$: 一切轴都给出同一个转动 $\boldsymbol{I}$, 轴无定义. 但 Φ 在 $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ 处仍可逆 (微分等于恒等映射), 只是不单射: 沿同一方向 $\boldsymbol{n}$, $\theta = 2\pi k$ 都给 $\boldsymbol{I}$.
- 半角转动 $\theta = \pi$: 有识别 $\hat{R}(\boldsymbol{n}, \pi) = \hat{R}(-\boldsymbol{n}, \pi)$, 因为绕轴转 π 与绕反方向转 π 相同. 故球面 $|\boldsymbol{\theta}| = \pi$ 上的点按对径点两两等同.

因此轴角映射 $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{SO}(3)$ 在每根射线方向 $\boldsymbol{n}$ 上以 2π 为周期; 若把 $|\boldsymbol{\theta}| \le \pi$ 的闭球内部等同掉, 再按边界对径点粘合, 就得到 $\mathrm{SO}(3)$ 本身. 这正是 $\mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{R}P^3$ 的标准描述: 旋转群同胚于三维实射影空间. 这一拓扑事实是第 7 节对比 Euler 角时的参照物.

Part II

Euler 角表示与两种表示的等价性

本部分引入 Euler 角: 把任意转动分解为三次绕坐标轴的基本转动, 采用 zyz 约定 $\hat{R}(\alpha,\beta,\gamma)=\hat{R}_z(\alpha)\hat{R}_y(\beta)\hat{R}_z(\gamma)$, 给出显式矩阵, 再建立它与轴角表示的相互转换, 说明在” 大多数情形” 下二者等价.

内容概要

- 掌握 zyz 约定的 Euler 角及其几何意义 (进动, 章动, 自转).
- 会由矩阵反解 Euler 角, 也会把 Euler 角转换为轴角.
- 能说清” 两种表示在大多数情形下等价” 的精确含义.

4

Euler 角的定义与矩阵形式

4.1 动机与约定

轴角表示参数优美但物理图像不直观: 转轴 $\boldsymbol{n}$ 的方向没有直接的可操作意义. 在刚体动力学中, 人们更习惯用绕坐标轴的三次基本转动来描述姿态. 把任意转动写成三个基本旋转的乘积, 就得到 Euler 角表示. 由于绕坐标轴的顺序可以任意选取, 存在多种约定; 本讲采用经典力学中最常用的 zyz 约定 (intrinsic, 沿体轴):

Def. 1　zyz 约定的 Euler 角

设 α, β, γ 为实数. 定义

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) = \hat{R}_z(\alpha)\, \hat{R}_y(\beta)\, \hat{R}_z(\gamma). \tag{4.1}$$

依次按" 自转 γ (绕本体 z 轴), 章动 β (绕新 y 轴, 即节线), 进动 α (绕空间 z 轴)" 的次序复合, 乘积从右往左作用. 通常取参数范围 $0 \le \alpha < 2\pi$, $0 \le \beta \le \pi$, $0 \le \gamma < 2\pi$.

几何上, α 是空间坐标架与节线之间的夹角 (进动角, precession), β 是空间 z 轴与本体 z 轴之间的夹角 (章动角, nutation), γ 是节线与本体 x 轴之间的夹角 (自转角, spin). 这里" 本体" 指随刚体固连的坐标架: 自转绕刚体自身的轴, 进动绕空间固定的轴. 第 4.2 小节将说明在乘积(4.1) 中, 各角度与这三层意义的对应关系.

Rmk　约定的多样性: 绕轴次序除 zyz 外还有 zxz (Goldstein 常用), 以及航空航天中的 extrinsic xyz (yaw-pitch-roll) 等, 共 12 种常见约定; 同一约定还可分主动/被动两种视角. 数学分析 (尤其万向锁的位置) 与约定有关, 但结构与结论不变, 本讲始终使用(4.1) 这一种.

4.2 显式矩阵

把基本旋转矩阵(1.3) 代入(4.1) 逐项相乘, 记 $c_\alpha = \cos\alpha$ 等:

Prop. 1　Euler 角的显式矩阵

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

其第三列给出本体 z 轴在空间架中的坐标

$$(\sin\beta\cos\alpha,\ \sin\beta\sin\alpha,\ \cos\beta)^{\mathsf{T}}, \tag{4.3}$$

第三行给出空间 z 轴在本体架中的坐标 $(-\sin\beta\cos\gamma,\ \sin\beta\sin\gamma,\ \cos\beta)^{\mathsf{T}}$.

Pf 直接做三次矩阵乘法; 正交性由三个因子正交与乘积封闭性保证. 第三列是 $\hat{R}(\alpha,\beta,\gamma)$ 作用在 $\boldsymbol{e}_3$ 上的结果, 它由进动与章动决定, 与自转 γ 无关, 这正是(4.3): 本体 z 轴由 α 决定其方位角, 由 β 决定其与空间 z 轴的夹角. □

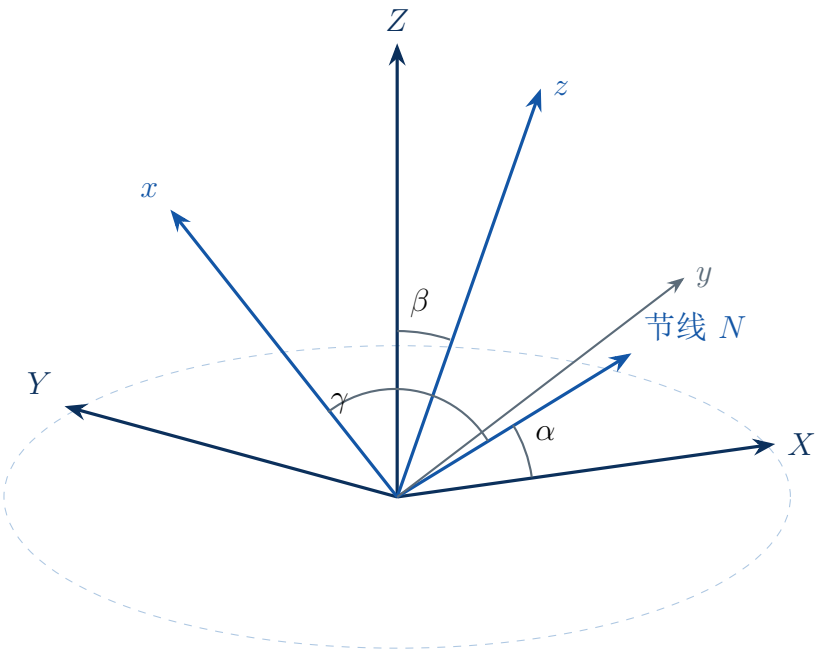


图 2: Euler 角 (zyz 约定) 的几何: α 是空间 X 轴与节线 N 的夹角 (进动), β 是空间 Z 轴与本体 z 轴的夹角 (章动), γ 是节线与本体 x 轴的夹角 (自转).

从(4.3) 立得两个重要推论. 其一, 本体 z 轴完全由 (α,β) 决定, 这正是"Euler 角是三个独立参数" 的局部体现; 其二, 当 $\beta = 0$ 或 π 时,

$$\hat{R}(\alpha,0,\gamma) = \hat{R}_z(\alpha+\gamma), \qquad \hat{R}(\alpha,\pi,\gamma) = \hat{R}_z(\alpha-\gamma)\,\hat{R}_y(\pi), \tag{4.4}$$

即进动与自转只在和 (或差) $\alpha \pm \gamma$ 中出现, 两个角度合并成一个自由度. 这就是万向锁, 其严格分析见第 6 节.

4.3 Euler 角作为局部坐标

在 $\beta \in (0,\pi)$ 时, (4.2) 的第三列非零地包含 $\sin\beta$, 由(4.3) 可以唯一解出 β 与 α, 再由矩阵其余部分解出 γ. 因此:

Prop. 2 局部坐标性

限制在开区域 $D = (0,2\pi)\times(0,\pi)\times(0,2\pi)$ 上, 映射

$$\Phi_E : (\alpha,\beta,\gamma) \mapsto \hat{R}(\alpha,\beta,\gamma) \tag{4.5}$$

是局部微分同胚 (除模 2π 的周期性外还是单射): Euler 角在 $\beta \in (0,\pi)$ 处是三个独立的局部坐标.

Pf 由(4.3), 给定矩阵后第三列是已知单位向量, 其第三个分量 $\cos\beta$ 在 $(0,\pi)$ 上严格单调, 故 β 唯一; 水平分量 $(\sin\beta\cos\alpha, \sin\beta\sin\alpha)$ 因 $\sin\beta > 0$ 唯一确定 α (模 2π); 再用

$\hat{R}_z(\alpha)^{-1}\hat{R}(\alpha,\beta,\gamma)=\hat{R}_y(\beta)\hat{R}_z(\gamma)$ 的第一行 $(c_\beta c_\gamma,-c_\beta s_\gamma,s_\beta)$ 解出 γ (模 2π). 于是映射可逆且光滑, 局部微分同胚; 正则性 (秩 3) 的另一个证明见第 6.2 小节的角速度方法. □

Rmk 注意这里" 独立" 仅限于开区域 D: 一旦 β 走到 0 或 π, 由(4.3), 第三列变成 $(0,0,\pm1)$, 不再携带 α 的信息, 反解立即失效. 这正是下一节要处理的情形, 也是第 7 节严格讨论参数独立性的伏笔.

5

轴角表示与 Euler 角的相互转换

5.1 由矩阵反解 Euler 角

Meth. 1　由矩阵提取 Euler 角

给定 $\hat{R}\in \mathrm{SO}(3)$, 设 $\hat{R}_{ij}$ 为其矩阵元, 且 $\sin\beta\neq 0$:

$$\beta=\arccos\!\left(\hat{R}_{33}\right)\in(0,\pi),\qquad \alpha=\operatorname{atan2}(\hat{R}_{23},\,\hat{R}_{13}),\qquad \gamma=\operatorname{atan2}(\hat{R}_{32},\,-\hat{R}_{31}),\tag{5.1}$$

其中 $\operatorname{atan2}(y,x)$ 取使 cos 与 sin 同时恢复符号的四象限反正切. 若 $\beta=0$ 或 π (万向锁), 只有 $\alpha\pm\gamma$ 可确定, 见第 6.1 小节.

Pf　由(4.3), $\hat{R}_{13}=\sin\beta\cos\alpha$, $\hat{R}_{23}=\sin\beta\sin\alpha$, 相除得 α 的两象限解, 用 atan2 修正到四象限. 由(4.2) 第三行, $\hat{R}_{31}=-\sin\beta\cos\gamma$, $\hat{R}_{32}=\sin\beta\sin\gamma$, 同样用 atan2 解出 γ. □

5.2 由 Euler 角求轴角

反向转换有两种等价途径: 先把三个基本旋转按(4.2) 乘成矩阵, 再用第 2.4 小节的方法提取轴角; 或者利用迹与反对称部分的封闭公式. 矩阵途径总是可用且不易出错:

Meth. 2　Euler 角转换为轴角

对给定 (α,β,γ), 先算矩阵 $\hat{R}=\hat{R}(\alpha,\beta,\gamma)$, 再提取轴角

$$\theta=\arccos\frac{\operatorname{Tr}\hat{R}-1}{2}\in[0,\pi],\qquad \boldsymbol{n}=\frac{1}{2\sin\theta}\begin{pmatrix}\hat{R}_{32}-\hat{R}_{23}\\ \hat{R}_{13}-\hat{R}_{31}\\ \hat{R}_{21}-\hat{R}_{12}\end{pmatrix}\quad(\theta\notin\{0,\pi\}).$$

把迹代入可得轴角的显式三角式:

Cor. 1　Euler 角下的轴角

设 $\theta=|\boldsymbol{\theta}|$ 是 $\hat{R}(\alpha,\beta,\gamma)$ 的转角, 则

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\beta}{2}\cos(\alpha+\gamma)-\sin^2\frac{\beta}{2},\tag{5.2}$$

且 $\boldsymbol{n}$ 的第三分量 $n_3=\sin\beta\cos\alpha\,/\,\sin\theta$ (由(4.3) 与(2.6)).

Pf　由(4.2) 逐元相加: $\operatorname{Tr}\hat{R}=c_\beta(c_\alpha c_\gamma-s_\alpha s_\gamma)+c_\alpha c_\gamma-s_\alpha s_\gamma+c_\beta=(1+c_\beta)\cos(\alpha+\gamma)+c_\beta$. 代入 $\operatorname{Tr}\hat{R}=1+2\cos\theta$, 并用 $1+c_\beta=2\cos^2(\beta/2)$, $1-c_\beta=2\sin^2(\beta/2)$ 即得(5.2). 由(4.3), $n_3\sin\theta=\sin\beta\cos\alpha$. □

Rmk (5.2) 特别清晰地显示 α 与 γ 在转角中只以和 $\alpha+\gamma$ 出现: 这是" 两个绕同轴的角度合并" 在迹里的表现, 与(4.4) 一致.

5.3 大多数情形下的等价性

综合第 3.2 与 4.3 小节, 两种表示各自给出了 SO(3) 的一个" 大块" 坐标卡:

Prop. 1 两种表示的等价性

轴角映射 Φ (定义于 B_π) 与 Euler 角映射 Φ_E (定义于 D) 都是局部微分同胚, 其像

$$\mathcal{U}_A = \mathrm{SO}(3)\setminus(\{\boldsymbol{I}\}\cup S_\pi), \qquad \mathcal{U}_E = \Phi_E(D)$$

都是 SO(3) 中的稠密开集. 交 $\mathcal{U}_A\cap\mathcal{U}_E$ 仍稠密, 在其上两个坐标卡光滑互换: 复合映射

$$\Phi^{-1}\circ\Phi_E : (0,2\pi)\times(0,\pi)\times(0,2\pi)\to B_\pi, \qquad \Phi_E^{-1}\circ\Phi : B_\pi\to(0,2\pi)\times(0,\pi)\times(0,2\pi)$$

是互为逆的微分同胚.

Pf Φ 在 B_π 上单射且局部微分同胚 (第 3.2 小节), 因而限制在开集上是开映射, 像是开集; $\{\boldsymbol{I}\}\cup S_\pi$ 是闭的零测集, 故 $\mathcal{U}_A$ 稠密. Φ_E 在 D 上局部微分同胚 (第 4.3 小节), 像 $\mathcal{U}_E$ 是开集; 其补集是 $\beta=0,\pi$ 两层 (万向锁面) 的像, 为闭的零测集, 故 $\mathcal{U}_E$ 稠密. 两开稠集的交仍开稠, 且两个坐标卡都是微分同胚, 复合自然光滑互逆. □

这就是" 二者在大多数情形下等价" 的精确表述: 除恒等元, 半角转动与万向锁面这一零测集外, 每个转动都同时有唯一的轴角三元组与唯一的 Euler 角三元组, 且二者之间是光滑的双向转换. 所谓" 大多数", 指的是稠密且测度全零补集之外的全体转动.

Eg. 1 两种表示的换算

取 Euler 角 $\alpha=60°$, $\beta=45°$, $\gamma=30°$ (zyz). 由(4.2) 得

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} -0.1268 & -0.9268 & 0.3536 \\ 0.7803 & 0.1268 & 0.6124 \\ -0.6124 & 0.3536 & 0.7071 \end{pmatrix}.$$

迹为 0.7071, 故 $\theta=\arccos((0.7071-1)/2)=98.42°$; 由(2.6),

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{pmatrix} 0.3536-0.6124 \\ 0.3536-(-0.6124) \\ 0.7803-(-0.9268) \end{pmatrix} = (-0.1308,\ 0.4882,\ 0.8629).$$

用 Rodrigues 公式(2.1) 把 $(\theta,\boldsymbol{n})$ 代回, 精确恢复到同一矩阵, 说明往返转换一致 (数值误差在舍入以内).

Part III

万向锁与参数独立性的严格分析

本部分考察两种表示的病态点. 先用角速度公式给出万向锁的精确刻画: 在 $\beta = 0, \pi$ 处 Euler 参数映射的秩从 3 降到 2, 一个自由度消失; 然后严格回答参数独立性问题: 轴角表示在一般区域上是三个严格独立的参数, 而 Euler 角只在 $\beta \in (0, \pi)$ 的局部是三个独立参数, 在万向锁处退化, 且全局非单射.

内容概要

- 会用秩与角速度公式刻画万向锁, 并解释其几何来源.
- 能严格说明轴角表示与 Euler 角在参数独立性上的差异.

6

万向锁 Gimbal Lock

6.1 现象

由(4.4), 当章动角 $\beta = 0$ 或 π 时, 进动与自转合并为一个角度:

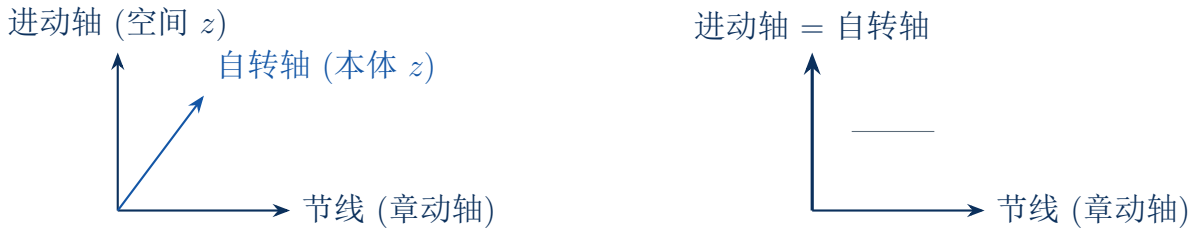
Prop. 1 万向锁

在 zyz 约定下, 若 $\beta = 0$ 或 $\beta = \pi$, 则

$$\hat{R}(\alpha, 0, \gamma) = \hat{R}_z(\alpha + \gamma), \qquad \hat{R}(\alpha, \pi, \gamma) = \hat{R}_z(\alpha - \gamma)\hat{R}_y(\pi), \tag{6.1}$$

即只有 $\alpha + \gamma$ (或 $\alpha - \gamma$) 有效, 映射的像是二维的, 参数映射丢失一个自由度.

Pf $\beta = 0$ 时 $\hat{R}_y(0) = \boldsymbol{I}$, 故 $\hat{R}_z(\alpha)\hat{R}_z(\gamma) = \hat{R}_z(\alpha+\gamma)$; 由 $\hat{R}_y(\pi)\hat{R}_z(\gamma) = \hat{R}_z(-\gamma)\hat{R}_y(\pi)$ (把 z 轴转 $-\pi$ 后绕 y 轴转 π 的交换) 得 $\beta = \pi$ 的式子. 两式右侧都只依赖一个组合角度, 故 α, γ 两个参数合二为一. □



(a) 一般情形 $\beta \neq 0$: 三个轴互不重合　　(b) 万向锁 $\beta = 0$: 进动轴与自转轴重合

图 3: 万向锁的轴几何: 当 $\beta = 0$ 时, 进动与自转绕同一根竖直轴, 转动的三个自由度只剩下两个.

这一现象得名于万向架 (gimbal): 三个同心环分别绕节线, 空间轴与体轴转动. 当内外两个环的转轴重合时 (即 $\beta = 0$), 外环的进动与内环的自转都是绕同一根竖直轴的旋转, 二者无法区分, 机构在一个方向上的自由度被” 锁死”.

6.2 数学本质: 秩的退化

设 $\hat{R}(t) = \hat{R}(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$ 沿 Euler 参数化的光滑路径运动. 由复合转动的角速度公式, 瞬时角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 由 $\dot{\hat{R}} = [\boldsymbol{\omega}]_\times \hat{R}$ 决定:

Prop. 2　Euler 角下的角速度

对 $\hat{R}=\hat{R}(\alpha,\beta,\gamma)=\hat{R}_z(\alpha)\hat{R}_y(\beta)\hat{R}_z(\gamma)$,

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\alpha}\,\hat{\boldsymbol{z}}+\dot{\beta}\,\hat{R}_z(\alpha)\hat{\boldsymbol{y}}+\dot{\gamma}\,\hat{R}_z(\alpha)\hat{R}_y(\beta)\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{6.2}$$

在 $\beta=0$ 处化简为

$$\boldsymbol{\omega}=(\dot{\alpha}+\dot{\gamma})\hat{\boldsymbol{z}}+\dot{\beta}(\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{x}}+\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}}), \tag{6.3}$$

线性映射 $(\dot{\alpha},\dot{\beta},\dot{\gamma})\mapsto\boldsymbol{\omega}$ 的秩为 2.

Pf　对 $\hat{R}=\hat{R}_1\hat{R}_2\hat{R}_3$ 用乘积法则: $\dot{\hat{R}}\hat{R}^{\mathsf{T}}=[\boldsymbol{\omega}_1]_\times+\hat{R}_1[\boldsymbol{\omega}_2]_\times\hat{R}_1^{\mathsf{T}}+\hat{R}_1\hat{R}_2[\boldsymbol{\omega}_3]_\times\hat{R}_2^{\mathsf{T}}\hat{R}_1^{\mathsf{T}}$, 其中 $[\boldsymbol{\omega}_1]_\times=\dot{\alpha}[\boldsymbol{e}_3]_\times$ 等; 每个共轭 $\hat{R}[\boldsymbol{e}_i]_\times\hat{R}^{\mathsf{T}}=[\hat{R}\boldsymbol{e}_i]_\times$ 再把角速度向量转回空间架, 即得(6.2). 在 $\beta=0$ 处 $\hat{R}_z(\alpha)\hat{R}_y(0)\hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{z}}$, 代入得(6.3); 其右侧落在由 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 与 $\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{x}}+\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{y}}$ 张成的二维平面上, 且 $\dot{\alpha}$ 与 $\dot{\gamma}$ 只以和出现, 故秩为 2. □

秩为 2 意味着: 在万向锁处, 三个参数方向中只有两个真正独立, 第三方向上的运动 (本应由 $\dot{\alpha}$ 与 $\dot{\gamma}$ 独立提供) 无法与其它两个参数方向区分. 几何上, 进动轴 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 与自转轴 $\hat{R}_z(\alpha)\hat{R}_y(\beta)\hat{\boldsymbol{z}}$ 在 $\beta=0$ 时重合为同一根轴, 两个" 绕轴转动" 的自由度塌缩为一个.

Rmk　与轴角映射对照: 第 3.2 小节的秩分析证明 Φ 在 $0<|\boldsymbol{\theta}|<2\pi$ 上处处满秩, 因此轴角表示没有任何万向锁式的局部退化. 万向锁是 Euler 角独有的病态, 不是" 参数化三维流形" 的必然.

6.3　近奇异行为与体积元

万向锁不仅是一个" 点" 上的退化, 它还在邻近区域造成剧烈的参数放大. 把角速度公式(6.2) 写成二次型, 得到参数空间上的诱导度量:

Prop. 3　Haar 体积元与退化

由旋转群上的双不变度量在 Euler 坐标下诱导的度量矩阵为

$$g=\begin{pmatrix}1&0&\cos\beta\\0&1&0\\\cos\beta&0&1\end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

其行列式 $\det g=\sin^2\beta$. 因此 SO(3) 的不变体积元在 Euler 坐标下为

$$\mathrm{d}\mu\propto\sin\beta\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma, \tag{6.5}$$

在 $\beta=0,\pi$ 处为零: 万向锁面上的" 体积" 塌缩, 坐标不再覆盖不同转动.

Pf　$g_{\lambda\mu}=\partial_\lambda\boldsymbol{\omega}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\omega}$ 由(6.2) 的三个基向量的内积给出: $\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{R}_z(\alpha)\hat{\boldsymbol{y}}=0$, $\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{R}_z(\alpha)\hat{R}_y(\beta)\hat{\boldsymbol{z}}=\cos\beta$, $\hat{R}_z(\alpha)\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{R}_z(\alpha)\hat{R}_y(\beta)\hat{\boldsymbol{z}}=0$, 对角元皆为 1, 即得(6.4), 从而 $\sqrt{\det g}=|\sin\beta|$. □

(6.5) 有两个直接后果. 其一, 在 β 接近 0 或 π 时, 相邻转动的 Euler 参数必须变化得越来越快: 一个微小的姿态变化需要很大的 $\Delta\alpha,\Delta\gamma$, 数值上表现为参数对微小扰动的极端敏感. 其二, 若在 SO(3) 上均匀采样姿态, 用 Euler 角采样会严重偏向万向锁附近, 而轴角或四元数则没有这种畸变.

6.4 与轴角表示的对比

万向锁与轴角表示的” 例外点” 性质完全不同:

万向锁 vs 轴角例外点

- Euler 角的万向锁 ($\beta = 0, \pi$) 是局部退化: 秩降到 2, 坐标不可逆, 有真实的自由度丢失, 且带有一整层稠密问题 (近奇异放大).
- 轴角表示的例外点 ($\theta = 0$ 与 $\theta = \pi$) 是全局识别: 秩保持 3, 局部仍是微分同胚, 只是同一转动被多个参数表示 (恒等元被所有轴覆盖, 半角转动被对径轴覆盖).

因此在需要光滑, 无奇异的三参数坐标 (姿态插值, 角速度积分, 数值刚体动力学) 时, 轴角表示比 Euler 角稳健; 这正解释了为什么工程中常引入四元数 (单位球面 S^3 对 SO(3) 的二重覆盖), 它连 $\theta = \pi$ 的对径识别也一并消除.

7

参数独立性的严格分析

7.1 轴角: 严格的三个独立参数

把第 3 节的结论收拢如下. 旋转向量 $\boldsymbol{\theta} = \theta \boldsymbol{n}$ 的三个分量 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$:

- 是自由的: 三个分量可取任意实数, 无约束方程把它们绑在一起;
- 在开球 B_π 内是一组全局坐标: $\Phi : B_\pi \to \mathcal{U}_A$ 是双射且局部微分同胚 (第 3.2 小节), 秩处处为 3;
- 唯一的例外是边界识别: $\theta = 0$ 处所有轴重合, $\theta = \pi$ 处对径轴重合, 二者都是零测的全局识别, 不构成局部退化.

这就是" 轴角表示是严格的三个独立参数" 的精确含义: 在覆盖几乎一切转动的一般区域上, 三个参数既是独立的, 又是唯一的, 又是非退化的.

7.2 Euler 角: 三个参数独立吗?

对 Euler 角同样的问题, 答案分为两层.

Prop. 1 Euler 角参数的独立性

在开区域 $\beta \in (0, \pi)$ 上, Euler 角 α, β, γ 是三个独立的局部坐标 (第 4.3 小节). 但严格地说, Euler 角不是三个全局独立的参数:

1. 在万向锁面 $\beta = 0, \pi$ 上, 参数映射的秩降到 2 (第 6.2 小节), α 与 γ 只以 $\alpha \pm \gamma$ 出现, 独立参数只有两个;
2. 参数映射全局非单射: α, γ 有 2π 周期性, 且万向锁面上的整族参数给出同一转动;
3. 诱导体积元 $\mathrm{d}\mu \propto \sin\beta \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta \, \mathrm{d}\gamma$ 在万向锁面上为零, 参数不是均匀的独立坐标.

Pf 前两点已在第 4.3 与 6.1 小节证明. 第三点来自(6.5): 若三个参数真正独立且均匀地覆盖 SO(3), 体积元不应在某个面片上为零. 体积元为零说明该处无穷小参数立方体退化, 即参数存在冗余. □

本讲的回答

轴角表示 $\hat{R}(\boldsymbol{\theta})$ 是严格的三个独立参数: 在一般区域上既是单射又是非退化的全局坐标. Euler 角 $\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ 也是三个参数, 但只是 $\beta \in (0, \pi)$ 上的三个独立局部坐标; 在万向锁处退化到两个独立自由度, 且全局非单射, 因此不能称为" 严格的三个独立参数".

7.3 两种表示对照

Table 1: 轴角表示与 Euler 角表示对照

性质	轴角 $\hat{R}(\boldsymbol{\theta})$	Euler 角 $\hat{R}(\alpha,\beta,\gamma)$
参数个数	3 (旋转向量分量)	3 (α,β,γ)
参数域	$\mathbb{R}^3$ (取模 2π)	$[0,2\pi)\times[0,\pi]\times[0,2\pi)$
一般区域的局部坐标	是, 秩恒为 3	是, 秩 3 当 $\beta\in(0,\pi)$
局部退化点	无 (仅在边界有全局识别)	$\beta=0,\pi$ (万向锁), 秩 2
单射性	B_π 内单射	非单射 (周期性与万向锁)
例外集	$\{\boldsymbol{I}\}\cup S_\pi$ (零测)	$\beta=0,\pi$ 两层 (零测)
体积元	均匀 $(\theta^2\sin\theta)$	$\sin\beta\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma$
物理意义	转轴与转角	进动, 章动, 自转
典型用途	角速度积分, 插值, 数值方法	刚体姿态, 陀螺仪, 解析动力学

结语

本讲给出了经典力学中空间旋转的两种标准数学形式. 轴角表示以旋转向量 $\boldsymbol{\theta}$ 直接指数化为旋转矩阵, 参数优美, 无局部退化, 是严格的三个独立参数; Euler 角把转动分解为三次基本转动, 物理图像直观, 但在万向锁处退化为两个自由度, 故只在局部是三个独立参数. 两种表示在稠密开集上光滑等价, 其差异全部集中在 $\theta=0,\pi$ 与 $\beta=0,\pi$ 这些零测例外集上. 理解这些例外集, 是正确选择姿态参数的前提.

习题

1. 用恒等式(1.5) 直接验证 Rodrigues 公式(2.1) 的矩阵满足 $\hat{R}(\boldsymbol{n},\theta)^{\mathsf{T}}\hat{R}(\boldsymbol{n},\theta) = \boldsymbol{I}$ 与 $\det \hat{R}(\boldsymbol{n},\theta) = 1$.
2. 求 $\hat{R} = \hat{R}_x(\pi/2)\hat{R}_y(\pi/2)$ 与 $\hat{R}' = \hat{R}_y(\pi/2)\hat{R}_x(\pi/2)$ 的轴角表示, 验证 $\hat{R} \neq \hat{R}'$ (提示: 用迹与(2.6)).
3. 对 Euler 角 $(\alpha,\beta,\gamma) = (\pi/3,\pi/4,\pi/6)$ (zyz), 求其轴角表示并验证往返转换.
4. 用角速度公式(6.2) 证明: 在 zyz 约定下, 参数映射在 $\beta = 0$ 与 $\beta = \pi$ 处的秩为 2.
5. 证明半角转动的对径识别 $\hat{R}(\boldsymbol{n},\pi) = \hat{R}(-\boldsymbol{n},\pi)$, 并说明它如何导致 $\mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{R}P^3$ 的对径粘合描述.
6. 结合万向锁与体积元(6.5), 说明为什么数值刚体姿态积分与均匀采样通常回避 Euler 角而改用轴角或四元数.