空间平移与动量守恒

Space Translation and Momentum Conservation

空间均匀性, 平移算符与 Noether 定理

RongYu

量子力学系列讲义

2026.8.6

目录

导言 3

I 空间平移的量子描述 4

1 单参幺正群与 Stone 定理 5
1.1 对称性变换的幺正实现 5
1.2 强连续单参幺正群 5
1.3 Stone 定理 6

2 空间平移算符的代数性质 8
2.1 空间平移算符的定义 8
2.2 空间平移算符构成 Abel 群 8
2.3 空间平移算符的幺正性 9
2.4 对左矢与波函数的作用 9

3 空间平移算符与位置算符 11
3.1 对易关系 11
3.2 位置算符的主动变换 11

II 指数形式与动量生成元 13

4 空间平移算符的指数形式 14
4.1 定理的陈述 14
4.2 动量分量对易 15

5 无穷小平移与基本对易关系 16
5.1 无穷小平移变换 16
5.2 基本对易关系的导出 16
5.3 动量算符的位置表象 17

6 动量本征态与位置-动量表象变换 18
6.1 动量本征态的波函数 18
6.2 位置表象与动量表象 18

III 空间平移不变性与动量守恒 20

7 对称性变换与守恒量 21

7.1 动力学对称性 21

7.2 守恒量的判据 21

7.3 量子 Noether 定理 22

8 空间平移不变性与动量守恒 23

8.1 空间平移不变性 23

8.2 核心定理: 平移不变性与动量守恒等价 23

9 例子与讨论 25

9.1 自由粒子 25

9.2 势场中的粒子 25

9.3 两体系统与总动量守恒 26

9.4 质心分离 27

9.5 周期势与离散平移不变性 27

10 总结 28

导言

空间是均匀的:物理定律不依赖于坐标系原点的选取, 把整个物理系统刚性平移一段距离后, 系统的动力学应当完全不变. 在经典力学中, 这条空间平移不变性由 Noether 定理联系到总动量守恒: 孤立系统的总动量不随时间改变, 其质心作匀速直线运动. 量子力学继承了同一条对称性, 但表述方式不同: 空间平移由 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的幺正算符 $\hat{T}(\boldsymbol{a})$ 描述, 而动量不再由 Newton 第二定律定义, 它作为平移群的生成元从对称性本身涌现出来; 动量守恒则表现为平移不变性对 Hamilton 量的约束.

本讲的目的有二. 第一, 建立空间平移的量子描述: 先由 Stone 定理说明连续对称性为何总由一个自伴算符生成, 再系统考察空间平移算符 $\hat{T}(\boldsymbol{a})$ 的代数性质, 指数形式与无穷小平移. 第二, 讨论动量守恒: 由空间平移不变性推出动量算符与 Hamilton 量对易, 从而动量守恒, 并把这一结论放在 Noether 定理的框架下与能量守恒, 角动量守恒统一起来.

全讲分三部分. 第一部分 (第 1-3 节) 引入强连续单参幺正群与 Stone 定理, 定义空间平移算符, 证明它的 Abel 群结构与幺正性, 并建立它与位置算符的代数关系. 第二部分 (第 4-6 节) 给出平移算符的指数形式, 说明动量算符是空间平移的生成元, 由无穷小平移导出基本对易关系 $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}\hat{I}$, 并构造动量本征态与位置-动量表象间的变换核. 第三部分 (第 7-10 节) 先给出对称性与守恒量的一般判据, 再证明空间平移不变性与动量守恒的等价性, 最后用自由粒子, 势场中的粒子, 两体系统与周期势等例子讨论动量守恒的物理内涵与边界.

Part I

空间平移的量子描述

本部分回答” 量子态如何描述空间的整体平移”. 我们从一般框架入手: 连续对称性由强连续单参幺正群实现, Stone 定理保证它唯一地由一个自伴算符生成. 然后转向具体对象, 定义空间平移算符并证明其全部代数性质: Abel 群结构, 幺正性, 对波函数的作用, 以及与位置算符的对易关系.

内容概要

- 掌握强连续单参幺正群的定义与 Stone 定理的陈述, 理解生成元为何自伴.
- 会证明平移算符构成 Abel 群并保持内积.
- 会推导平移算符与位置算符的对易关系及位置算符的主动变换.

1

单参幺正群与 Stone 定理

1.1 对称性变换的幺正实现

量子力学的测量对象是概率. 若一个变换 g 把每个态射线映为态射线, 且对任意两个态 $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ 都保持跃迁概率 $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$ 不变, 则称 g 为量子系统的一个对称性变换. Wigner 定理断言: 这样的变换由 Hilbert 空间上的幺正算符或反幺正算符实现, 而且可以由单位元连续连接的对称性只能由幺正算符实现. 反幺正算符只出现在时间反演等离散变换中, 与本讲关心的连续空间对称性无关.

因此, 一个连续对称性族对应一族幺正算符 $\{\hat{U}(g)\}$, 其乘法结构在射线的意义下与对称性自身的复合一致. 对空间平移而言, 两个平移先后作用仍是一个平移, 合成规则由平移向量加法给出; 我们将在第 2 节看到, 空间平移的表示比旋转更简单, 它不需要相位因子, 是一个精确的幺正表示. 本小节先把连续对称性的一般数学框架固定下来.

1.2 强连续单参幺正群

考虑由单个实参数 t 标记的对称性, 例如沿固定方向的平移, 或时间演化. 物理上要求参数取值的加法反映变换的复合, 这一结构由下面的定义概括.

Def. 1　强连续单参幺正群

设 $\{\hat{U}(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的算符族. 若它满足以下三条公理:

1. 幺正性: 对每个 t, $\hat{U}(t)$ 是幺正算符;
2. 群公理: $\hat{U}(0) = \hat{I}$, 且对所有 $s, t \in \mathbb{R}$ 成立

$$\hat{U}(s)\hat{U}(t) = \hat{U}(s+t), \qquad \hat{U}(t)^{-1} = \hat{U}(-t); \tag{1.1}$$

3. 强连续性: 对任意 $|\psi\rangle \in \mathscr{H}$,

$$\lim_{t \to 0} \left\| \hat{U}(t)\,|\psi\rangle - |\psi\rangle \right\| = 0, \tag{1.2}$$

则称 $\{\hat{U}(t)\}$ 为 $\mathscr{H}$ 上的强连续单参幺正群.

其中公理 1, 2 是代数结构: 幺正算符保持内积, 群公理说明参数 t 作为实数加群的表示. 公理 3 是分析条件, 它排除了某些病态的表示: 强连续性要求 $\hat{U}(t)\,|\psi\rangle$ 在 $t = 0$ 处以向量范数的意义收敛到 $|\psi\rangle$, 这比矩阵元 $\langle\phi|\hat{U}(t)\rangle\,\psi$ 的弱收敛更强, 又比 $\|\hat{U}(t) - \hat{I}\|$ 的范数收敛更弱. 物理上的时间演化算符与空间平移算符都满足强连续.

Prop. 1　强连续在每处成立

若 $\{\hat{U}(t)\}$ 满足定义(1.2) 中的群公理与幺正性, 且在 $t=0$ 处强连续, 则对任意 $t\in\mathbb{R}$ 与任意 $|\psi\rangle\in\mathscr{H}$,

$$\lim_{h\to 0}\left\|\hat{U}(t+h)\,|\psi\rangle-\hat{U}(t)\,|\psi\rangle\right\|=0. \tag{1.3}$$

Pf　由群公理, $\hat{U}(t+h)\,|\psi\rangle-\hat{U}(t)\,|\psi\rangle=\hat{U}(t)\left(\hat{U}(h)\,|\psi\rangle-|\psi\rangle\right)$. 对两边取范数, 利用幺正算符保范数, 得

$$\left\|\hat{U}(t+h)\,|\psi\rangle-\hat{U}(t)\,|\psi\rangle\right\|=\left\|\hat{U}(h)\,|\psi\rangle-|\psi\rangle\right\|\xrightarrow[h\to 0]{}0. \quad \square$$

1.3 Stone 定理

强连续单参幺正群的全部内容由一个算符所携带. 把 $\hat{U}(t)$ 在 $t=0$ 附近展开, 一阶项定义它的" 切向量", 即无穷小生成元. Stone 定理保证这个生成元是自伴的, 且幺正群就是生成元的指数函数.

Thm. 1　Stone 定理

设 $\{\hat{U}(t)\mid t\in\mathbb{R}\}$ 为 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的强连续单参幺正群, 满足对任意 $|\psi\rangle\in\mathscr{H}$

$$\lim_{t\to 0}\left\|\hat{U}(t)\,|\psi\rangle-|\psi\rangle\right\|=0. \tag{1.4}$$

则存在唯一的自伴算符 $\hat{A}$ (不必有界), 使得

$$\hat{U}(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{A}t}\qquad\forall t\in\mathbb{R}. \tag{1.5}$$

称 $\hat{A}$ 为该群的无穷小生成元, 它由

$$\hat{A}\,|\psi\rangle=\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}\hat{U}(t)\,|\psi\rangle}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \tag{1.6}$$

在使右端极限存在的稠密子空间上定义.

Stone 定理的内容可以拆成三层. 第一层, 生成元存在: 对" 足够好" 的态, 群映射 $t\mapsto\hat{U}(t)\,|\psi\rangle$ 在 $t=0$ 处可微, 其导数定义 $\hat{A}$. 第二层, 生成元自伴: $\hat{A}$ 在自然定义域上是对称的, 而 Stone 定理的分析内容保证它本质自伴, 从而自伴闭包仍是自伴算符; 自伴性又反过来保证 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{A}t}$ 幺正且谱落在实数轴, 因此生成元具有充当可观测量的资格. 第三层, 指数表示: $\hat{U}(t)$ 与 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{A}t}$ 满足同一个一阶方程, 由初值问题解的唯一性相等.

Stone 定理的证明思想

完整的证明依赖无界自伴算符的谱理论, 这里给出主要思路, 每个步骤都可以核对.

1. 定义稠密定义域. 记 $\mathscr{D}=\left\{|\psi\rangle\in\mathscr{H}\mid t\mapsto\hat{U}(t)\,|\psi\rangle\ \text{在}\ t=0\ \text{处可微}\right\}$. 对任意 $|\varphi\rangle\in\mathscr{H}$, 向量 $|\varphi_\epsilon\rangle=\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon\hat{U}(t)\,|\varphi\rangle\,\mathrm{d}t$ 属于 $\mathscr{D}$, 因为被积函数连续保证了积分对参数的可微性; 又当 $\epsilon\to 0$ 时由强连续性 $|\varphi_\epsilon\rangle\to|\varphi\rangle$. 故 $\mathscr{D}$ 在 $\mathscr{H}$ 中稠密.

2. 定义生成元. 在 $\mathscr{D}$ 上令 $\hat{A}\,|\psi\rangle = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}\hat{U}(t)|\psi\rangle}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}$.
3. 对称性. 由 $\left\langle \hat{U}(t)\phi \middle| \hat{U}(t)\psi \right\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$ 两边在 $t=0$ 处求导, 左边导数为 $\left\langle -\mathrm{i}\hat{A}\phi \middle| \psi \right\rangle + \left\langle \phi \middle| -\mathrm{i}\hat{A}\psi \right\rangle = \mathrm{i}\left(\left\langle \hat{A}\phi \middle| \psi \right\rangle - \left\langle \phi \middle| \hat{A}\psi \right\rangle\right)$, 右边导数为零, 故 $\left\langle \hat{A}\phi \middle| \psi \right\rangle = \left\langle \phi \middle| \hat{A}\psi \right\rangle$, 即 $\hat{A}$ 在 $\mathscr{D}$ 上对称.
4. 本质自伴性. Stone 定理的分析部分证明 $\hat{A} \pm \mathrm{i}\hat{I}$ 的值域都在 $\mathscr{H}$ 中稠密. 对称算符加上这一条件即本质自伴, 其闭包是唯一的自伴算符, 仍记作 $\hat{A}$.
5. 指数表示. 对 $|\psi\rangle \in \mathscr{D}$, 由群公理与生成元的定义,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{U}(t)\,|\psi\rangle = \hat{U}(t)\,\frac{\mathrm{d}\hat{U}(s)\,|\psi\rangle}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} = -\mathrm{i}\hat{A}\,\hat{U}(t)\,|\psi\rangle\,.$$

另一方面由谱定理, $|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{A}t}\,|\psi\rangle$ 满足同一方程与同一初值 $|\psi(0)\rangle = |\psi\rangle$. 初值问题解的唯一性给出二者相等, 再按 $\mathscr{D}$ 的稠密性把等式延拓到整个 $\mathscr{H}$.

于是 $\hat{U}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{A}t}$. 生成元的唯一性由式(1.6) 直接给出: 若两个自伴算符给出同一个群, 它们在 $t=0$ 处的导数必相等.

物理上最重要的一组单参幺正群是时间演化群 $\hat{U}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}$, 其生成元为 $\hat{H}/\hbar$, 即 Hamilton 量除以 $\hbar$. 空间平移沿固定方向的族 $\left\{\hat{T}(a)\right\}$ 同样是单参幺正群; 本讲第 4 节将证明它形如 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\hat{p}/\hbar}$, 生成元正比于动量算符. 这样, Stone 定理就把" 连续对称性" 与" 自伴算符" 一一对应起来, 而自伴算符正是量子力学中可观测量的候选. 连续对称性之所以产生守恒量, 根源正在这里: 生成元是可观测量, 而对称性对动力学的约束 (第 7 节) 将保证它是守恒量.

2

空间平移算符的代数性质

2.1 空间平移算符的定义

把物理系统整体平移的量子操作由位置本征态的动作给出.位置本征态 $\{|\boldsymbol{x}\rangle\}$ 描述" 粒子确定地处于空间点 $\boldsymbol{x}$" 的 (广义) 态, 系统沿 $+\boldsymbol{a}$ 方向刚性平移后, 这一点状态应成为" 粒子处于 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$" 的态. 于是:

Def. 1 空间平移算符

量子力学中的空间平移由空间平移算符 (space translation operator) 描述. 若将位置本征态移动 $\boldsymbol{a}$, 即规定

$$\hat{T}(\boldsymbol{a})\,|\boldsymbol{x}\rangle := |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\rangle\,, \tag{2.1}$$

再由线性性延拓到 $\{|\boldsymbol{x}\rangle\}$ 张成的整个态空间, 得到的算符 $\hat{T}(\boldsymbol{a})$ 称为空间平移算符.

这里采用主动观点: 物理系统移动, 坐标系不动. 位置本征右矢采用 Dirac 归一化 $\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}'\rangle=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$. 由式(2.1) 取共轭即得 $\langle\boldsymbol{x}|\hat{T}(\boldsymbol{a})^\dagger=\langle\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}|$: 左矢随平移的行为是右矢的共轭镜像, 这一点在取内积时反复用到.

2.2 空间平移算符构成 Abel 群

所有空间平移算符的集合在乘法下构成一个交换群, 这个群的乘法就是平移向量的加法.

Thm. 1 Abel 群性质

设所有空间平移算符构成的集合为 $\mathscr{T}(3):=\left\{\hat{T}(\boldsymbol{a})\mid\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3\right\}$, 在其中定义乘法

$$\hat{T}(\boldsymbol{a})\hat{T}(\boldsymbol{b})=\hat{T}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}). \tag{2.2}$$

则对所有 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$, 乘法满足结合律

$$\left[\hat{T}(\boldsymbol{a})\hat{T}(\boldsymbol{b})\right]\hat{T}(\boldsymbol{c})=\hat{T}(\boldsymbol{a})\left[\hat{T}(\boldsymbol{b})\hat{T}(\boldsymbol{c})\right], \tag{2.3}$$

有单位元

$$\hat{T}(\boldsymbol{0})=\hat{I}, \tag{2.4}$$

有逆元

$$\hat{T}(\boldsymbol{a})^{-1}:=\hat{T}(-\boldsymbol{a}), \tag{2.5}$$

并且乘法满足交换律

$$\hat{T}(\boldsymbol{a})\hat{T}(\boldsymbol{b})=\hat{T}(\boldsymbol{b})\hat{T}(\boldsymbol{a}). \tag{2.6}$$

从而 $\mathscr{T}(3)$ 构成一个 Abel 群.

Pf 乘法封闭性. 对任意位置本征态 $|\boldsymbol{x}\rangle$,

$$\left[\hat{T}(\boldsymbol{a})\hat{T}(\boldsymbol{b})\right]|\boldsymbol{x}\rangle = \hat{T}(\boldsymbol{a})\,|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\rangle = |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\rangle = \hat{T}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})\,|\boldsymbol{x}\rangle\,,$$

由 $\{|\boldsymbol{x}\rangle\}$ 的完备性得式(2.2). 结合律. 由式(2.2) 两侧同时展开, 得到同一个算符 $\hat{T}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})$, 即式(2.3). 单位元. 由式(2.2), $\hat{T}(\boldsymbol{0})\hat{T}(\boldsymbol{a}) = \hat{T}(\boldsymbol{a})$; 又 $\hat{T}(\boldsymbol{a})$ 有逆 (见下), 故 $\hat{T}(\boldsymbol{0}) = \hat{I}$. 作用于位置本征态也直接验证: $\hat{T}(\boldsymbol{0})\,|\boldsymbol{x}\rangle = |\boldsymbol{x}\rangle$. 逆元. 由式(2.2),

$$\hat{T}(-\boldsymbol{a})\hat{T}(\boldsymbol{a}) = \hat{T}(\boldsymbol{0}) = \hat{I}, \qquad \hat{T}(\boldsymbol{a})\hat{T}(-\boldsymbol{a}) = \hat{T}(\boldsymbol{0}) = \hat{I},$$

故 $\hat{T}(\boldsymbol{a})^{-1} = \hat{T}(-\boldsymbol{a})$, 即式(2.5). 交换律. 因为向量加法交换, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 故

$$\hat{T}(\boldsymbol{a})\hat{T}(\boldsymbol{b}) = \hat{T}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}) = \hat{T}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \hat{T}(\boldsymbol{b})\hat{T}(\boldsymbol{a}),$$

即式(2.6). 综上, 群公理与交换律齐备, $\mathscr{T}(3)$ 是 Abel 群. □

Rmk $\mathscr{T}(3)$ 同构于向量加群 $(\mathbb{R}^3, +)$, 因而是三维可交换 Lie 群. 它在 $\mathscr{H}$ 上的表示由式(2.1) 精确给出, 不出现任何相位因子; 这与旋转群不同, 后者的一般表示只能到射线表示 (相差相因子). Abel 性还会在第 4 节末端体现为动量算符各分量的对易关系.

2.3 空间平移算符的幺正性

平移保持一切内积, 因而是幺正变换: 刚性移动不改变两个状态的重叠, 也不改变态的概率解释.

Prop. 1 空间平移算符的幺正性

空间平移算符为幺正算符, 即

$$\hat{T}(\boldsymbol{a})^\dagger\hat{T}(\boldsymbol{a}) = \hat{T}(\boldsymbol{a})\hat{T}(\boldsymbol{a})^\dagger = \hat{I} \quad\Longleftrightarrow\quad \hat{T}(\boldsymbol{a})^\dagger = \hat{T}(\boldsymbol{a})^{-1}. \tag{2.7}$$

Pf 设 $|\psi'\rangle = \hat{T}(\boldsymbol{a})\,|\psi\rangle$, $|\phi'\rangle = \hat{T}(\boldsymbol{a})\,|\phi\rangle$. 分别在两侧插入完备关系 $\hat{I} = \int \mathrm{d}^3x\,|\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{x}|$, 得

$$\begin{aligned}\langle\phi'|\psi'\rangle &= \langle\phi|\hat{T}(\boldsymbol{a})^\dagger\hat{T}(\boldsymbol{a})|\psi\rangle \\ &= \int \mathrm{d}^3x \int \mathrm{d}^3x'\ \langle\phi|\boldsymbol{x}\rangle\ \langle\boldsymbol{x}|\hat{T}(\boldsymbol{a})^\dagger\hat{T}(\boldsymbol{a})|\boldsymbol{x}'\rangle\ \langle\boldsymbol{x}'|\psi\rangle\,.\end{aligned}$$

中间的矩阵元由式(2.1) 与其共轭计算:

$$\langle\boldsymbol{x}|\hat{T}(\boldsymbol{a})^\dagger\hat{T}(\boldsymbol{a})|\boldsymbol{x}'\rangle = \left\langle\hat{T}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}\middle|\hat{T}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}'\right\rangle = \langle\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}|\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{a}\rangle = \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$

代入并利用位置本征态的 δ 归一化完成一次积分, 得

$$\langle\phi'|\psi'\rangle = \int \mathrm{d}^3x\ \langle\phi|\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{x}|\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle\,.$$

由于 $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ 任意, $\hat{T}(\boldsymbol{a})^\dagger\hat{T}(\boldsymbol{a}) = \hat{I}$. 再结合逆元关系(2.5) 即得式(2.7). □

Rmk 幺正性同时保证: 平移后波函数仍归一, 平移是概率守恒的, 且逆变换就是沿相反方向的平移, $\hat{T}(\boldsymbol{a})^\dagger = \hat{T}(-\boldsymbol{a})$. 这两点使空间平移构成一个幺正表示, 也是第 7 节把平移称为对称性变换的依据.

2.4 对左矢与波函数的作用

由幺正性可以把平移对左矢与波函数的作用都算出来.

Cor. 1　对左矢的作用

$$\langle \boldsymbol{x}|\,\hat{T}(\boldsymbol{a}) = \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|\,. \tag{2.8}$$

Pf　由式(2.7) 与式(2.5),

$$\langle \boldsymbol{x}|\,\hat{T}(\boldsymbol{a}) = \langle \boldsymbol{x}|\left[\hat{T}(\boldsymbol{a})^{-1}\right]^{\dagger} = \langle \boldsymbol{x}|\left[\hat{T}(-\boldsymbol{a})\right]^{\dagger} = \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|\,,$$

末步使用了 $\hat{T}(-\boldsymbol{a})\,|\boldsymbol{x}\rangle = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\rangle$ 的共轭. □

Prop. 2　对波函数的作用

态 $|\psi\rangle$ 的波函数 $\psi(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}|\psi\rangle$ 在平移下变为

$$\left[\hat{T}(\boldsymbol{a})\psi\right](\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}|\hat{T}(\boldsymbol{a})|\psi\rangle = \psi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}). \tag{2.9}$$

Pf　直接使用式(2.8):

$$\left[\hat{T}(\boldsymbol{a})\psi\right](\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}|\hat{T}(\boldsymbol{a})|\psi\rangle = \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|\psi\rangle = \psi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}). \quad \square$$

式(2.9) 说明主动平移使波函数整体向 $+\boldsymbol{a}$ 方向移动: 新波函数在点 $\boldsymbol{x}$ 的值等于原波函数在点 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}$ 的值, 整条曲线平移了 $\boldsymbol{a}$, 形状不变 (图 1). 由幺正性, 归一化保持:

$$\int |\psi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})|^2\,\mathrm{d}^3x = \int |\psi(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}^3x.$$

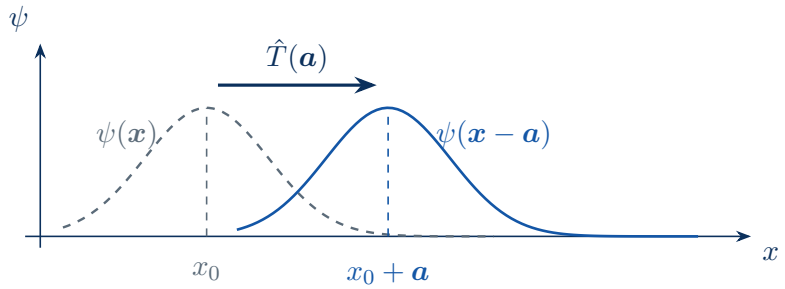


图 1: 空间平移算符对波函数的主动作用. 虚线波包为 $\psi(\boldsymbol{x})$, 实线波包为 $\hat{T}(\boldsymbol{a})\psi(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$: 波包整体沿 $+\boldsymbol{a}$ 方向移动, 形状不变, 峰值位置由 x_0 移到 $x_0+\boldsymbol{a}$.

Rmk　若改用被动观点, 即移动坐标系而固定系统, 则符号相反: 把坐标原点沿 $+\boldsymbol{a}$ 移动后, 同一物理状态在新坐标下的波函数为 $\psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})$. 两种观点给出等价的物理, 本讲统一采用主动观点, 不再另行说明.

3

空间平移算符与位置算符

3.1 对易关系

位置算符在位置表象中就是坐标乘法,而平移把坐标移动一个常数, 两者不能对易, 其对易关系直接反映位移的大小.

Prop. 1 空间平移算符与位置算符的对易关系

$$\left[\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{T}(\boldsymbol{a})\right] = \boldsymbol{a}\,\hat{T}(\boldsymbol{a}). \tag{3.1}$$

分量形式为 $\left[\hat{x}_i, \hat{T}(\boldsymbol{a})\right] = a_i \hat{T}(\boldsymbol{a})$.

Pf 先作用在位置本征态上:

$$\left[\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{T}(\boldsymbol{a})\right]|\boldsymbol{x}\rangle = \hat{\boldsymbol{x}}\hat{T}(\boldsymbol{a})|\boldsymbol{x}\rangle - \hat{T}(\boldsymbol{a})\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{x}\rangle = \hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\rangle - \boldsymbol{a}\hat{T}(\boldsymbol{a})|\boldsymbol{x}\rangle .$$

利用 $\hat{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\rangle = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\rangle$ 与 $\boldsymbol{a}\hat{T}(\boldsymbol{a})|\boldsymbol{x}\rangle = \boldsymbol{a}|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\rangle$, 得

$$\left[\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{T}(\boldsymbol{a})\right]|\boldsymbol{x}\rangle = [(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}]|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\rangle = \boldsymbol{a}|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\rangle = \boldsymbol{a}\hat{T}(\boldsymbol{a})|\boldsymbol{x}\rangle .$$

由 $\{|\boldsymbol{x}\rangle\}$ 的完备性, 式(3.1) 对所有态成立. □

3.2 位置算符的主动变换

对称变换下可观测量如何改变, 由相似变换 $\hat{T}(\boldsymbol{a})\hat{\boldsymbol{x}}\hat{T}(\boldsymbol{a})^\dagger$ 给出, 即" 先逆平移, 作用, 再平移". 对位置算符, 结果是把它的期望值加上 $\boldsymbol{a}$.

Prop. 2 位置算符的主动变换

$$\hat{\boldsymbol{x}}' = \hat{T}(\boldsymbol{a})\hat{\boldsymbol{x}}\hat{T}(\boldsymbol{a})^\dagger = \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{a}\hat{I}. \tag{3.2}$$

Pf 由式(3.1) 解出 $\hat{\boldsymbol{x}}\hat{T}(\boldsymbol{a}) = \hat{T}(\boldsymbol{a})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{a}\hat{T}(\boldsymbol{a})$, 右乘 $\hat{T}(\boldsymbol{a})^\dagger$ 并利用式(2.7), 得

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{T}(\boldsymbol{a})\hat{\boldsymbol{x}}\hat{T}(\boldsymbol{a})^\dagger + \boldsymbol{a}\hat{I},$$

移项即得式(3.2). □

物理上, 把位置算符按式(3.2) 变换, 与把态按 $\hat{T}(\boldsymbol{a})$ 变换是等价的: 对任意态 $|\psi\rangle$, 设 $|\psi'\rangle = \hat{T}(\boldsymbol{a})|\psi\rangle$, 则

$$\langle\psi'|\hat{\boldsymbol{x}}|\psi'\rangle = \langle\psi|\hat{T}(\boldsymbol{a})^\dagger\hat{\boldsymbol{x}}\hat{T}(\boldsymbol{a})|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{a}\hat{I}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{\boldsymbol{x}}|\psi\rangle + \boldsymbol{a}.$$

平移后的态平均位置增加 $\boldsymbol{a}$, 与经典图像的" 把系统沿 $+\boldsymbol{a}$ 推" 一致. 同时, 在主动变换的意义下两者自洽: 状态与可观测量同时变换时物理结果不变, $\langle\psi'|\hat{\boldsymbol{x}}'|\psi'\rangle = \langle\psi|\hat{\boldsymbol{x}}|\psi\rangle$, 这正是对称变换保持观测结果的一般方式.

至此, 空间平移的代数图像已经完整: 它是 Abel 幺正群, 保持内积与归一化, 把位置算符平移一个常量. 剩下的问题是, 这个群的生成元是什么, 以及它与动量算符的关系. 这正是第二部分的内容.

Part II

指数形式与动量生成元

本部分确定空间平移群的生成元. 由 Stone 定理的一般框架, 生成元必为自伴算符; 由指数形式定理, 它正是动量算符 (乘以 $1/\hbar$). 无穷小平移把连续对称性化为对易关系: 基本对易关系 $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}$ 由此推出. 最后构造动量本征态, 得到位置与动量表象间的 Fourier 变换核.

内容概要

- 掌握 $\hat{T}(\boldsymbol{a}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}/\hbar}$ 的导出与生成元的自伴性.
- 会用无穷小平移导出基本对易关系.
- 会构造动量本征态并归一化, 得到 $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{p}\rangle$ 的平面波形式.

4

空间平移算符的指数形式

4.1 定理的陈述

空间平移群是单参数族的直积:沿 $\boldsymbol{a}$ 方向的平移可以拆成沿三个坐标轴的小平移的复合. 由 Stone 定理, 每个方向的单参子群都由一个自伴算符生成; 组合起来, 整个平移群由一个向量值算符 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 指数生成.

Thm. 1　空间平移算符的指数形式

设 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 为空间平移群的无穷小生成元, 即定义平移算符的自伴算符. 则空间平移算符有指数形式

$$\hat{T}(\boldsymbol{a}) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}. \tag{4.1}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 称为动量算符.

指数形式把" 有限平移" 约化为" 无穷小生成元", 把对称性的几何对象约化为可测量对象. 下面的推导在物理层面说明这个形式是如何出现的; Stone 定理 (第 1 节) 提供了严格的基础.

Meth. 1　指数形式的导出

以一维平移 a 为例, 三维情形是直接的推广.

1. 对 $\hat{T}(a)$ 在 $a=0$ 处作 Taylor 展开,

$$\hat{T}(a) = \hat{T}(0) + a\left.\frac{\mathrm{d}\hat{T}(a)}{\mathrm{d}a}\right|_{a=0} + \cdots \tag{4.2}$$

2. 定义生成元 $\hat{p} = \mathrm{i}\hbar\left.\frac{\mathrm{d}\hat{T}(a)}{\mathrm{d}a}\right|_{a=0}$, 则式(4.2) 写为

$$\hat{T}(a) = \hat{I} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}a\hat{p} + \cdots \tag{4.3}$$

3. 对无穷小参数 ϵ 保留一阶项, 得无穷小变换

$$\hat{T}(\epsilon) = \hat{I} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\epsilon\hat{p}. \tag{4.4}$$

4. 由导数的定义与群公理(1.1),

$$\frac{\mathrm{d}\hat{T}(a)}{\mathrm{d}a} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\hat{T}(a+\epsilon)-\hat{T}(a)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\hat{T}(\epsilon)-\hat{I}}{\epsilon}\hat{T}(a) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\,\hat{T}(a). \tag{4.5}$$

这是算符的一阶常微分方程, 初值 $\hat{T}(0)=\hat{I}$; 形如 $\hat{T}(a)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\hat{p}/\hbar}$ 的算符满足它 (两边求导一致), 由解的唯一性

$$\hat{T}(a) = \underbrace{\hat{T}(0)}_{=\hat{I}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}a\hat{p}} = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}a\hat{p}}. \tag{4.6}$$

最后, 幺正性要求生成元自伴. 由式(4.4) 取共轭并相乘,

$$\hat{T}(\epsilon)^\dagger \hat{T}(\epsilon) = \left(\hat{I} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\epsilon\hat{p}^\dagger\right)\left(\hat{I} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\epsilon\hat{p}\right) = \hat{I} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\epsilon\left(\hat{p}^\dagger - \hat{p}\right) + O(\epsilon^2).$$

对每个 ϵ 这必须等于 $\hat{I}$, 故一阶项为零: $\hat{p}^\dagger = \hat{p}$, 即 $\hat{p}$ 是自伴算符.

Rmk 称 a 为群参数, $\hat{p}$ 为生成元. 生成元本身由群在单位元处的切向量决定, 这一事实与经典力学中泊松括号的对应完全平行: 经典平移由 $q \to q + a$ 描述, 其 Hamilton 生成函数是 ap; 量子平移由 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\hat{p}/\hbar}$ 描述, 生成元 $\hat{p}$ 直接是动量算符. 在位置表象中, 式(4.4) 与 $\hat{T}(\epsilon)\psi(x) = \psi(x-\epsilon)$ 比较,

$$\psi(x) - \epsilon\psi'(x) + \cdots = \left(\hat{I} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\epsilon\hat{p}\right)\psi(x),$$

立即得 $\hat{p} = -\mathrm{i}\hbar\mathrm{d}/\mathrm{d}x$. 这正是教科书里动量算符的位置表象形式, 它不需要另行假设, 而是空间平移生成元的结构所要求的.

4.2 动量分量对易

平移群是 Abel 群, 这一性质在生成元层面表现为动量算符的各分量两两对易.

Prop. 1 动量分量两两对易

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{4.7}$$

Pf 对任意 $\boldsymbol{a}$, 由群公理 $\hat{T}(\boldsymbol{a})\hat{T}(\boldsymbol{b}) = \hat{T}(\boldsymbol{b})\hat{T}(\boldsymbol{a})$ 两边对 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{b} = 0$ 处求导. 左端对 b_j 求导得 $\hat{T}(\boldsymbol{a})\left.\frac{\partial \hat{T}(\boldsymbol{b})}{\partial b_j}\right|_{\boldsymbol{b}=0}$, 右端得 $\left.\frac{\partial \hat{T}(\boldsymbol{b})}{\partial b_j}\right|_{\boldsymbol{b}=0}\hat{T}(\boldsymbol{a})$; 而 $\left.\frac{\partial \hat{T}(\boldsymbol{b})}{\partial b_j}\right|_{\boldsymbol{b}=0} = -\mathrm{i}\hat{p}_j/\hbar$, 故 $\left[\hat{T}(\boldsymbol{a}), \hat{p}_j\right] = 0$ 对所有 $\boldsymbol{a}$ 成立. 取 $\boldsymbol{a} = \epsilon a_i \boldsymbol{e}_i$ 为沿坐标轴的无穷小平移, 代入 $\hat{T}(\epsilon a_i \boldsymbol{e}_i) = \hat{I} - \mathrm{i}\epsilon a_i \hat{p}_i/\hbar$, 得 $-\mathrm{i}\epsilon a_i[\hat{p}_i, \hat{p}_j]/\hbar = 0$, 即式(4.7). □

因此三维指数(4.1) 中三个方向的平移可以任意排序:

$$\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}} = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}a_1\hat{p}_1}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}a_2\hat{p}_2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}a_3\hat{p}_3},$$

这正对应于 $\mathscr{T}(3)$ 的 Abel 性: 先沿哪个方向平移都一样. 与之对照, 旋转群 $SO(3)$ 不对易, 角动量算符的各分量因此满足非平凡的对易关系, 那是另一条主线.

5

无穷小平移与基本对易关系

5.1 无穷小平移变换

连续对称性的全部信息都包含在无穷小变换里:有限平移可以分解为大量无穷小平移的复合, 而无穷小平移只需要生成元的一阶信息.

Def. 1 无穷小平移变换

以无穷小量 $\delta\boldsymbol{a}$ 为参数的指数形式空间平移算符 $\hat{T}(\delta\boldsymbol{a})=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}/\hbar}$ 展开, 保留至一阶项, 称所得算符为无穷小平移变换:

$$\hat{T}(\delta\boldsymbol{a})=\hat{I}-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}. \tag{5.1}$$

Cor. 1 无穷小平移变换与位置算符的对易关系

$$\left[\hat{\boldsymbol{x}},\hat{T}(\delta\boldsymbol{a})\right]=\delta\boldsymbol{a}\,\hat{I}. \tag{5.2}$$

Pf 由精确关系(3.1) 取 $\boldsymbol{a}=\delta\boldsymbol{a}$, 保留一阶: $\left[\hat{\boldsymbol{x}},\hat{T}(\delta\boldsymbol{a})\right]=\delta\boldsymbol{a}\,\hat{T}(\delta\boldsymbol{a})=\delta\boldsymbol{a}\,\hat{I}+O(\delta a)$. □

5.2 基本对易关系的导出

把无穷小平移的两种表达式代入同一对易关系, 即可反解出位置与动量的对易关系.

Meth. 1 由无穷小平移变换导出基本对易关系

取沿 j 方向的无穷小平移, 其参量为 δa_j, 位移向量 $\delta\boldsymbol{a}=\delta a_j\boldsymbol{e}_j$. 由式(5.2),

$$\left[\hat{x}_i,\hat{T}(\delta a_j\boldsymbol{e}_j)\right]=\delta a_i\hat{I}=\delta_{ij}\delta a_j\hat{I}.$$

另一方面, 代入式(5.1) 并展开对易子,

$$\left[\hat{x}_i,\hat{T}(\delta a_j\boldsymbol{e}_j)\right]=\left[\hat{x}_i,\hat{I}-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta a_j\hat{p}_j\right]=\underbrace{\left[\hat{x}_i,\hat{I}\right]}_{=0}-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta a_j[\hat{x}_i,\hat{p}_j].$$

两种表达式相等, 且对任意 δa_j 成立, 故

$$\boxed{[\hat{x}_i,\hat{p}_j]=\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}\hat{I}} \tag{5.3}$$

这就是量子力学的基本对易关系 (canonical commutation relation).

式(5.3) 是整个量子力学结构性的结论之一: 它把位置与动量绑定在一起, 使二者成为互补可观测量, 并蕴含 Heisenberg 不确定原理 $\Delta x\,\Delta p \geq \hbar/2$. 对空间平移理论而言, 它的意义在于把平移群的对易结构翻译成了算符代数: 位置算符沿 j 方向的平移由与 $\hat{p}_j$ 的对易关系生成. 经典对应 $\{x_i, p_j\}_{\mathrm{PB}} = \delta_{ij}$ 在量子化规则 $\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{PB}} \to [\cdot,\cdot]/(\mathrm{i}\hbar)$ 下恰好给出式(5.3).

5.3 动量算符的位置表象

由式(5.3) 或直接由无穷小平移, 可以确定动量算符在位置表象中的形式.

Prop. 1　动量算符的位置表象

在位置表象中, 动量算符作用在波函数上为微分算符:

$$\langle \boldsymbol{x}|\hat{\boldsymbol{p}}|\psi\rangle = -\mathrm{i}\hbar\nabla\psi(\boldsymbol{x}). \tag{5.4}$$

Pf　以一维为例. 由式(2.1), 对任意态 $|\psi\rangle$,

$$\psi(x+\epsilon) = \langle x+\epsilon|\psi\rangle = \left\langle x\middle|\hat{T}(-\epsilon)\right\rangle\psi = \langle x|\hat{I} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\epsilon\hat{p}|\psi\rangle = \psi(x) + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\epsilon\,\langle x|\hat{p}|\psi\rangle\,,$$

取一阶, 左端 $\psi(x+\epsilon) = \psi(x) + \epsilon\psi'(x)$, 故 $\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = -\mathrm{i}\hbar\psi'(x)$. □

这个结果把" 动量是平移生成元" 与" 动量是微分算符" 统一起来: 平移生成元作用在位置坐标上必然产生位移, 而位移的生成子正是导数算符. 它也解释了平面波的形状: 动量本征态在位置表象中是指数函数 (第 6 节).

6

动量本征态与位置-动量表象变换

6.1 动量本征态的波函数

动量守恒的讨论需要动量本征态.设动量算符的本征方程为 $\hat{\boldsymbol{p}}\,|\boldsymbol{p}\rangle = p\,|\boldsymbol{p}\rangle$, 在位置表象中它化为一个一阶微分方程. 用平移语言来解更直接: 动量本征态在平移下只改变相位.

Prop. 1　$\hat{x} \leftrightarrow \hat{p}$ 表象变换的核函数

态 $|\psi\rangle$ 在位置表象与动量表象中分别展开为

$$|\psi\rangle = \int \mathrm{d}^3x\,\psi(\boldsymbol{x})\,|\boldsymbol{x}\rangle = \int \mathrm{d}^3p\,\tilde{\psi}(\boldsymbol{p})\,|\boldsymbol{p}\rangle\,,$$

其中 $\psi(\boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}^3p\,\tilde{\psi}(\boldsymbol{p})\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})$, 而变换核 (动量本征态的位置波函数) 为

$$\psi_p(x) = \langle x|p\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}px}, \tag{6.1}$$

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}. \tag{6.2}$$

Pf　设 $|p\rangle$ 是动量本征态, $\hat{p}\,|p\rangle = p\,|p\rangle$. 一维情形, $\psi_p(x) = \langle x|p\rangle$ 对 x 的导数由无穷小平移给出:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\psi_p(x)}{\mathrm{d}x} &= \lim_{\epsilon\to0}\frac{\psi_p(x+\epsilon)-\psi_p(x)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to0}\frac{\langle x+\epsilon|p\rangle - \langle x|p\rangle}{\epsilon}\\ &= \lim_{\epsilon\to0}\frac{\langle x|\hat{T}(-\epsilon)|p\rangle - \langle x|p\rangle}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to0}\frac{\langle x|\hat{I}+\mathrm{i}\epsilon\hat{p}/\hbar|p\rangle - \langle x|p\rangle}{\epsilon} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}p\,\psi_p(x).\end{aligned}$$

故 $\psi_p(x) = N\mathrm{e}^{\mathrm{i}px/\hbar}$. 归一化常数 N 由动量本征态的正交归一条件确定. 用位置本征态的完备性插入中间态,

$$\langle p|p'\rangle = \langle p|\left(\int \mathrm{d}x\;|x\rangle\langle x|\right)|p'\rangle = \int \mathrm{d}x\;\langle p|x\rangle\langle x|p'\rangle = |N|^2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(p-p')x}\,\mathrm{d}x.$$

利用 Fourier 积分公式 $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = 2\pi\delta(k)$, 取 $k = (p-p')/\hbar$, 得

$$\langle p|p'\rangle = |N|^2\cdot 2\pi\hbar\,\delta(p-p') = \delta(p-p'),$$

故 $N = (2\pi\hbar)^{-1/2}$, 即式(6.1). 三维情形是三个独立方向的乘积, 得式(6.2). □

6.2 位置表象与动量表象

由式(6.2), 两个表象之间的变换是 Fourier 变换:

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int \mathrm{d}^3p\,\tilde{\psi}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}, \qquad \tilde{\psi}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int \mathrm{d}^3x\,\psi(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}.$$

$|\psi(\boldsymbol{x})|^2$ 是位置测量分布, $\left|\tilde{\psi}(\boldsymbol{p})\right|^2$ 是动量测量分布; 两者通过 Fourier 变换互连, 一个窄则另一个宽, 这是不确定原理在表象层面上的体现. 动量本征态是平面波, 概率密度处处均匀, 位置完全不确定: 这是 $\Delta p = 0$ 的极端情形, 反方向也说明不可能存在平方可积的精确动量本征态, 物理上真实的动量确定态只能是可归一化的窄波包.

Rmk 把平面波代入式(2.9) 还能看到一个重要事实: 平移只改变动量本征态的相位,

$$\hat{T}(\boldsymbol{a})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})} = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}.$$

动量本征态在空间平移下是不变的, 至多相差相因子 $e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}/\hbar}$. 第 8 节将看到, 当动力学也保持这种不变性时, 动量就守恒.

Part III

空间平移不变性与动量守恒

本部分把前两部分的代数结果用于动力学. 先建立一般判据: 对称性变换与守恒量之间的等价关系 (量子 Noether 定理). 然后证明本讲的核心结论: 空间平移不变性与动量守恒等价, 并说明其物理内容. 最后用自由粒子, 势场中的粒子, 两体系统与周期势等例子讨论动量守恒的成立条件与边界.

内容概要

- 掌握守恒量的判据 $\left[\hat{A}, \hat{H}\right] = 0$ 及其与对称性的联系.
- 会证明空间平移不变性等价于动量守恒.
- 能判断具体系统是否动量守恒, 并说明背后的对称性原因.

7

对称性变换与守恒量

7.1 动力学对称性

前面考察了状态空间上的对称变换如何实现,但一个变换要成为物理定律的对称性, 还必须与动力学相容. 在 Schrödinger 绘景, 系统的演化由 $\hat{H}$ 决定. 称幺正算符 $\hat{U}$ 为动力学对称性, 若它把解映为解: 只要 $|\psi(t)\rangle$ 满足 Schrödinger 方程, $\hat{U}|\psi(t)\rangle$ 也满足. 这一条件等价于 $\hat{U}$ 与演化算符对易.

Prop. 1　动力学对称性的判据

对不含时的 $\hat{H}$, 幺正算符 $\hat{U}$ 是动力学对称性, 当且仅当

$$\left[\hat{U},\hat{H}\right]=0. \tag{7.1}$$

Pf　动力学对称性要求对所有 $|\psi\rangle$ 与所有 t,

$$\hat{U}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}|\psi\rangle=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\hat{U}|\psi\rangle,$$

即 $\hat{U}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}\hat{U}^{\dagger}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}$ 恒成立. 对 t 在 $t=0$ 处求导得 $-\mathrm{i}\hat{U}\hat{H}\hat{U}^{\dagger}/\hbar=-\mathrm{i}\hat{H}/\hbar$, 即 $\hat{U}\hat{H}=\hat{H}\hat{U}$. 反之, 若式(7.1) 成立, 则 $\hat{U}$ 与 $\hat{H}$ 的任何函数对易, 尤其与 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}$ 对易, 上述等式成立. □

7.2 守恒量的判据

一个可观测量守恒, 指的是它的测量分布不随时间改变, 因而期望值也不变.

Def. 1　守恒量

设 $\hat{H}$ 不含时. 可观测量 $\hat{A}$ 称为守恒量, 若对任意初态 $|\psi\rangle$, 期望值 $\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$ 与时间无关.

Thm. 1　守恒量判据

对不含时的 $\hat{H}$, 可观测量 $\hat{A}$ 是守恒量, 当且仅当它与 Hamilton 量对易:

$$\left[\hat{A},\hat{H}\right]=0. \tag{7.2}$$

Pf　先求期望值的变化率. 在 Schrödinger 绘景中, $|\psi(t)\rangle=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}|\psi\rangle$,

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle=\langle\psi(t)|\left[\hat{A},\hat{H}\right]|\psi(t)\rangle, \tag{7.3}$$

这是 Ehrenfest 定理 (对任意可观测量成立). 若 $\left[\hat{A},\hat{H}\right]=0$, 则对任意 t, 期望值的导数为零, $\hat{A}$ 是守恒量. 反之, 若 $\hat{A}$ 守恒, 则对一切初态, 在 $t=0$ 处 $\langle\psi|\left[\hat{A},\hat{H}\right]|\psi\rangle=0$. 由于

$\left[\hat{A},\hat{H}\right]$ 是反自伴算符, $\mathrm{i}\left[\hat{A},\hat{H}\right]$ 是自伴算符, 它对一切态的期望值为零, 故它为零算符, 即式(7.2). □

守恒量的判据(7.2) 还有两个等价的说法, 后面都会用到. 其一, 在 Heisenberg 绘景中, 算符的运动方程是 $\mathrm{d}\hat{A}_H/\mathrm{d}t=(\mathrm{i}/\hbar)\left[\hat{H},\hat{A}_H\right]$, 守恒量满足 $\mathrm{d}\hat{A}_H/\mathrm{d}t=0$, 即 $\hat{A}_H(t)$ 作为算符本身不随时间改变. 其二, $\left[\hat{A},\hat{H}\right]=0$ 使 $\hat{A}$ 与 $\hat{H}$ 拥有共同本征基, 态在各本征空间的振幅只随时间振荡相位而不发生跃迁, 因此 $\hat{A}$ 的测量分布不变, $\hat{A}$ 的本征值是好量子数.

7.3 量子 Noether 定理

把式(7.1) 与式(7.2) 放在一起, 立即得到连续对称性与守恒量之间的一一对应.

Thm. 2 量子 Noether 定理

设 $\left\{\hat{U}(s)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{A}s}\right\}$ 是以自伴算符 $\hat{A}$ 为生成元的单参幺正群, $\hat{H}$ 不含时. 则每个 $\hat{U}(s)$ 都是动力学对称性, 当且仅当 $\hat{A}$ 是守恒量:

$$\left[\hat{U}(s),\hat{H}\right]=0\ \forall s \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\hat{A},\hat{H}\right]=0. \tag{7.4}$$

Pf 若 $\left[\hat{A},\hat{H}\right]=0$, 则 $\hat{A}$ 与 $\hat{H}$ 对易, 故 $\hat{H}$ 与 $\hat{A}$ 的任何函数对易, 特别地 $\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{A}s},\hat{H}\right]=0$ 对所有 s 成立. 反之, 若 $\left[\hat{U}(s),\hat{H}\right]=0$ 对所有 s 成立, 在 $s=0$ 处对参数求导, 利用 $\left.\frac{\mathrm{d}\hat{U}(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}=-\mathrm{i}\hat{A}$, 得 $\left[\hat{A},\hat{H}\right]=0$. 再由守恒量判据(7.2), $\hat{A}$ 守恒. □

这就是 Noether 定理的量子版本: 连续对称性的生成元就是守恒量, 而守恒量反过来又生成一个对称性. 三个最常遇到的连续对称性构成一个统一的表格 (表 1): 时间平移, 空间平移与空间旋转分别对应能量, 动量与角动量. 它们分别来自时间的均匀性, 空间的均匀性与空间的各向同性.

对称性	群参数	生成元	守恒量	时空性质
时间平移	t	$\hat{H}/\hbar$	能量	时间均匀性
空间平移	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}/\hbar$	动量	空间均匀性
空间旋转	$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{\theta}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}/\hbar$	角动量	空间各向同性

Table 1: 三种连续对称性与对应的守恒量. 每一行都由量子 Noether 定理(7.4) 保证: 生成元与 $\hat{H}$ 对易, 因而是守恒量. 本讲处理第一行之外的第二行; 第三行对应旋转与角动量, 由角动量理论初步一讲专门讨论.

8

空间平移不变性与动量守恒

8.1 空间平移不变性

把第 7 节的一般判据用到空间平移上. 空间平移不变性就是: 系统经任意整体平移后, 动力学完全不变, 因而 $\hat{H}$ 与所有平移算符对易. 物理上它意味着不存在特殊空间位置, 物理定律不依赖绝对位置.

Def. 1　空间平移不变性

若对所有 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$,

$$\left[\hat{T}(\boldsymbol{a}), \hat{H}\right] = 0, \tag{8.1}$$

则称系统具有空间平移不变性 (空间均匀性).

对单体系统 $\hat{H} = \hat{\boldsymbol{p}}^2/2m + V(\hat{\boldsymbol{x}})$, 条件(8.1) 等价于势能 V 不随平移改变, 即 V 是常数: 任何位置的势场都会破坏空间均匀性. 因此" 空间平移不变" 的系统本质上是不受外势作用的孤立系统. 对多体系统, 条件放宽为势能只依赖相对坐标, 全体粒子同时平移时相互作用能不变; 第 9 节将据此讨论总动量守恒.

8.2 核心定理: 平移不变性与动量守恒等价

Thm. 1　空间平移不变性与动量守恒

设 $\hat{H}$ 不含时. 系统具有空间平移不变性, 当且仅当动量算符是守恒量:

$$\left[\hat{T}(\boldsymbol{a}), \hat{H}\right] = 0 \ \forall \boldsymbol{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}\right] = 0. \tag{8.2}$$

因此空间平移不变性蕴含动量守恒, 动量守恒也蕴含空间平移不变性.

Pf　若 $\left[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}\right] = 0$, 则 $\hat{H}$ 与动量算符的任意函数对易, 特别地与 $\hat{T}(\boldsymbol{a}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}/\hbar}$ 对易, 得式(8.1). 反之, 若式(8.1) 对所有 $\boldsymbol{a}$ 成立, 取 $\boldsymbol{a} = \delta\boldsymbol{a}$ 为无穷小平移, 代入式(5.1),

$$0 = \left[\hat{I} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}\right] = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\boldsymbol{a}\cdot\left[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}\right].$$

对任意方向与大小的 $\delta\boldsymbol{a}$ 成立, 故 $\left[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}\right] = 0$. 由守恒量判据(7.2), $\hat{\boldsymbol{p}}$ 是守恒量. □

这是本讲的核心结论: 动量守恒不是一条与对称性并列的独立原理, 它是空间均匀性在量子力学中的表现. 反之亦然: 若实验上发现某个系统的动量不守恒, 则说明该系统存在破坏空间均匀性的结构, 例如外势场. 值得注意的是证明的方向性: 平移不变性是比动量守恒更" 几何" 的陈述, 而动量守恒是它经由无穷小平移得到的算符层面的推论. 量子 Noether 定理(7.4) 在这里的作用是把两者衔接起来.

Cor. 1　动量守恒的内容

设 $\left[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}\right] = 0$. 则对任意初态 $|\psi\rangle$,

1. 动量期望值不变: $\langle\psi(t)|\hat{\boldsymbol{p}}|\psi(t)\rangle = \langle\psi|\hat{\boldsymbol{p}}|\psi\rangle$ 对所有 t 成立;
2. 动量测量分布不变: 若 $|\psi\rangle = \int \mathrm{d}^3p\, c(\boldsymbol{p})\,|\boldsymbol{p}\rangle$, 则 $|c(\boldsymbol{p},t)|^2 = |c(\boldsymbol{p},0)|^2$, 且定态可标记为 $|\boldsymbol{p}, E\rangle$;
3. 在 Heisenberg 绘景中动量算符恒定: $\hat{\boldsymbol{p}}_H(t) = \hat{\boldsymbol{p}}$.

Pf　第 1 条由守恒量定义直接得到. 第 2 条: $\left[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}\right] = 0$ 意味着 $\hat{H}$ 在动量本征基中是对角化的, $\hat{H}\,|\boldsymbol{p}\rangle = E(\boldsymbol{p})\,|\boldsymbol{p}\rangle$ (允许简并), 于是 $|\boldsymbol{p}\rangle$ 的演化只乘相因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E(\boldsymbol{p})t/\hbar}$, 模方不变. 第 3 条是 Heisenberg 运动方程 $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{p}}_H/\mathrm{d}t = (\mathrm{i}/\hbar)\left[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{p}}_H\right] = 0$. □

由第 2 条还可看出动量守恒的动力学含义: Hamilton 量不能把不同的动量分量混合起来, 能量只可能是动量的函数. 这就是为什么自由粒子的能量 $E = \boldsymbol{p}^2/2m$ 只依赖于动量: 任何对位置的依赖都会引入动量混合, 从而破坏动量守恒.

图 2 把本讲的核心推导链条集中在一起: 从空间的均匀性出发, 经过无穷小平移与守恒量判据, 最后到达动量守恒.

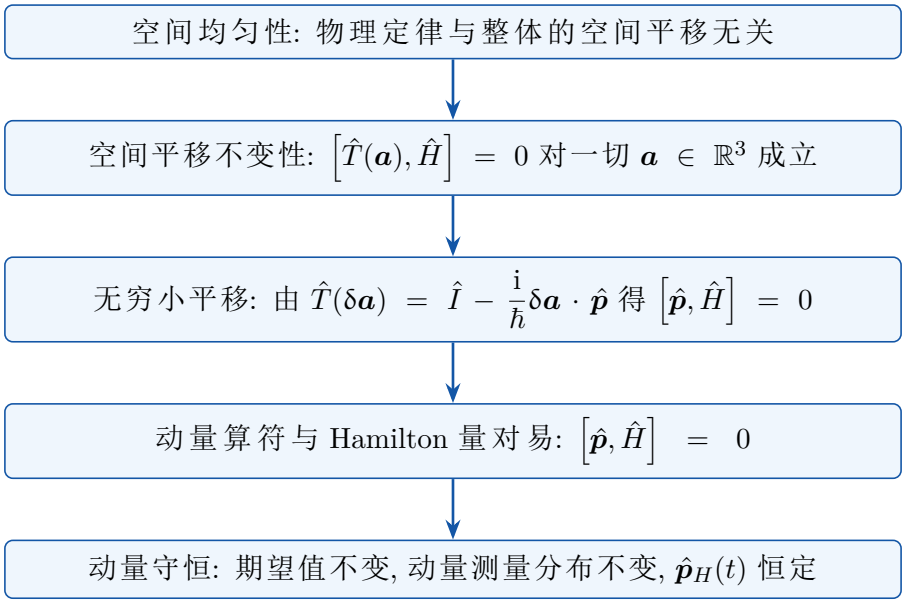


图 2: 本讲的核心推导链条. 第 1 步是定义(8.1), 第 2 步到第 3 步使用无穷小平移(5.1), 第 3 步到第 4 步是定理(8.2) 的证明, 第 4 步到第 5 步使用守恒量判据(7.2) 与其推论.

9

例子与讨论

9.1 自由粒子

Eg. 1 自由粒子

自由粒子的 Hamilton 量为

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m}. \tag{9.1}$$

它只依赖于动量, 显然与 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 对易, 因此空间平移不变, 动量守恒. 动量本征态 $|\boldsymbol{p}\rangle$ 就是定态, 位置波函数为平面波

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - Et)}, \qquad E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}.$$

任意波包 $|\psi(0)\rangle = \int \mathrm{d}^3 p\, c(\boldsymbol{p}) |\boldsymbol{p}\rangle$ 演化后动量分量只获得相因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}^2 t/2m\hbar}$, 因而动量分布 $|c(\boldsymbol{p}, t)|^2$ 不随时间改变, 而位置波包随时间展宽. 这是经典" 自由粒子匀速直线运动, 动量恒定" 的量子对应: 量子化保留的是动量的守恒, 付出的是位置的不确定性 (对动量本征态, 位置完全不确定).

自由粒子也是检验指数形式的直接场合: 它的空间平移算符 $\hat{T}(\boldsymbol{a}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}/\hbar}$ 与 $\hat{H}$ 对易, 因而平移只给平面波乘上相位 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}/\hbar}$, 不改变任何物理性质.

9.2 势场中的粒子

Eg. 2 势场中的粒子

粒子在势场中的 Hamilton 量为

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + V(\hat{\boldsymbol{x}}). \tag{9.2}$$

由式(5.4), 在位置表象中

$$[\hat{\boldsymbol{p}}, V(\hat{\boldsymbol{x}})] = -\mathrm{i}\hbar\nabla V(\boldsymbol{x}),$$

除非 V 是常数, 否则动量不守恒. 按 Ehrenfest 定理(7.3),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi(t)|\hat{\boldsymbol{p}}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\langle\psi(t)|\left[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}\right]|\psi(t)\rangle = -\langle\psi(t)|\nabla V(\hat{\boldsymbol{x}})|\psi(t)\rangle,$$

即动量期望值的变化率等于作用力的期望值, Newton 第二定律的期望值形式. 例如均匀引力场 $V(\boldsymbol{x}) = -F\boldsymbol{x}$ 中动量期望值线性增长, 谐振子 $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ 中动量期望值以 $\cos\omega t$ 振荡. 这种系统动量不守恒, 但时间平移不变性仍在, 能量仍守恒: 每条对称性各自对应一条守恒量, 互不冲突.

物理上要强调: 势场 $V(\boldsymbol{x})$ 通常由外部的物体产生. 若把产生势场的物体也算进系统, 则整个孤立系统仍然平移不变, 总动量守恒, 只是守恒量变成" 粒子动量 + 外部物体动量". 单个粒子动量不守恒, 是因为它把与外部物体的动量交换排除在动力学之外了. 动量守恒与否, 取决于系统边界的选取.

9.3 两体系统与总动量守恒

Eg. 3 两体系统

两个相互作用的粒子, 若相互作用只依赖相对位置, 则

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_2^2}{2m_2} + V(\hat{\boldsymbol{x}}_1 - \hat{\boldsymbol{x}}_2). \tag{9.3}$$

系统整体平移 $\boldsymbol{a}$ 时, 两个粒子都移动, 相对坐标不变, 势能不变, 因而空间平移不变. 总动量

$$\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{p}}_1 + \hat{\boldsymbol{p}}_2 \tag{9.4}$$

是守恒量. 验证: 动能部分显然与 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 对易; 对势能部分, 利用 $[\hat{p}_{1,i}, V(\hat{\boldsymbol{x}}_1 - \hat{\boldsymbol{x}}_2)] = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial V}{\partial x_{1,i}}$ 与 $[\hat{p}_{2,i}, V] = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial V}{\partial x_{2,i}}$, 而 V 只通过 $x_{1,i} - x_{2,i}$ 进入, 故 $\partial V/\partial x_{1,i} + \partial V/\partial x_{2,i} = 0$, 两项相加为零. 因此 $\left[\hat{\boldsymbol{P}}, \hat{H}\right] = 0$.

式(9.3) 的内力成对满足 Newton 第三定律: 粒子 1 受力 $-\nabla_1 V$, 粒子 2 受力 $-\nabla_2 V = +\nabla_1 V$, 大小相等方向相反, 系统所受合外力为零. 这与经典力学中" 合外力为零则总动量守恒" 的结论完全一致, 只是在量子力学里, 依据是总动量算符与 $\hat{H}$ 对易.

9.4 质心分离

把质心自由度分离出来, 动量守恒表现为质心的自由运动. 定义质心坐标与总质量

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \frac{m_1\hat{\boldsymbol{x}}_1 + m_2\hat{\boldsymbol{x}}_2}{m_1+m_2}, \qquad M = m_1 + m_2,$$

以及相对坐标, 约化质量与相对动量

$$\hat{\boldsymbol{x}}_r = \hat{\boldsymbol{x}}_1 - \hat{\boldsymbol{x}}_2, \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}, \qquad \hat{\boldsymbol{p}}_r = \frac{m_2\hat{\boldsymbol{p}}_1 - m_1\hat{\boldsymbol{p}}_2}{m_1+m_2}.$$

利用 $\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}$ 与 $[\hat{x}_{r,i}, \hat{p}_{r,j}] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}$, 动能项可以改写为

$$\frac{\hat{\boldsymbol{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_2^2}{2m_2} = \frac{\hat{\boldsymbol{P}}^2}{2M} + \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_r^2}{2\mu}.$$

于是式(9.3) 化为

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{P}}^2}{2M} + \underbrace{\left(\frac{\hat{\boldsymbol{p}}_r^2}{2\mu} + V(\hat{\boldsymbol{x}}_r)\right)}_{\text{内部运动}}. \tag{9.5}$$

质心部分与内部部分完全分离. 总动量 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 只出现在质心动能里, 是守恒量; 质心坐标按自由粒子演化, $\left\langle\hat{\boldsymbol{X}}\right\rangle(t) = \left\langle\hat{\boldsymbol{X}}\right\rangle(0) + \left\langle\hat{\boldsymbol{P}}\right\rangle t/M$, 作匀速直线运动. 内部运动由约化质量与相对势 V 描述, 与整体平移无关. 经典力学中"质心匀速运动"由此在量子力学中严格成立, 这是动量守恒最直观的表现.

9.5 周期势与离散平移不变性

动量守恒要求平移不变性对一切 $\boldsymbol{a}$ 成立, 即连续的平移对称性. 若系统只对某些离散平移不变, 动量本身并不守恒, 但离散对称性仍然给出一个守恒量. 周期势是标准的例子.

Eg. 4 周期势与准动量

设势场满足 $V(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{L}) = V(\boldsymbol{x})$, 其中 $\boldsymbol{L}$ 是某个晶格矢量. 则 $\left[\hat{T}(\boldsymbol{L}), \hat{H}\right] = 0$ 只对 $\boldsymbol{L}$ 成立, 而 $\left[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}\right] \neq 0$: 动量不守恒. 但 $\hat{T}(\boldsymbol{L})$ 是幺正算符, 与 $\hat{H}$ 对易, 故两者有共同本征态. $\hat{T}(\boldsymbol{L})$ 的本征值是模为一的数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{L}}$ (Bloch 定理), 因此本征态可写为

$$\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \qquad u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{L}) = u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}).$$

量子数 $\boldsymbol{k}$ 称为准动量 (晶格动量), 它是守恒量; 普通动量则随势场的周期力而改变. 这说明空间平移不变性一旦退化为离散版本, 守恒量就从动量退化为准动量.

周期势的例子同时说明了一个普遍原则: 对称性在哪, 守恒量就在哪. 判断一个系统的动量是否守恒, 只需检查它是否允许任意大小的整体平移而不改变动力学; 而不能, 则退而寻找残留对称性对应的守恒量. 这正体现了 Noether 定理作为分析工具的价值.

10

总结

本讲的逻辑可以压缩为一条推导链条 (图 2):

空间均匀性 $\longrightarrow$ 平移不变性 $\left[\hat{T}(\boldsymbol{a}), \hat{H}\right] = 0 \longrightarrow$ 动量与 $\hat{H}$ 对易 $\left[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}\right] = 0 \longrightarrow$ 动量守恒.

其中每一步都是本讲证明过的定理:第一段是空间平移不变性的定义(8.1) 及其物理内容; 第二段的关键是无穷小平移(5.1), 它把" 对一切平移不变" 翻译成" 生成元与 $\hat{H}$ 对易"; 第三段是守恒量判据(7.2) 与量子 Noether 定理(7.4).

从数学上看, 本讲把空间平移算符的内容展开为完整的逻辑链: 定义(2.1) 与 Abel 群定理确定平移的代数结构, 幺正性命题确定它是对称性变换, 指数形式(4.1) 与无穷小平移(5.1) 引入生成元动量, 基本对易关系(5.3) 把平移代数翻译为位置-动量代数, 最后动量本征态(6.2) 给出位置与动量表象间的联系. 这些结果全部汇总在下框中.

本讲核心公式

$$\hat{T}(\boldsymbol{a})\,|\boldsymbol{x}\rangle = |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\rangle\,, \qquad \hat{T}(\boldsymbol{a})\psi(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}),$$

$$\hat{T}(\boldsymbol{a}) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}, \qquad \hat{T}(\delta\boldsymbol{a}) = \hat{I} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{p}},$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}\hat{I}, \qquad \langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}.$$

守恒律: 空间平移不变性 $\left[\hat{T}(\boldsymbol{a}), \hat{H}\right] = 0$ 对一切 $\boldsymbol{a}$ 成立, 当且仅当动量守恒 $\left[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}\right] = 0$.

从物理上看, 动量守恒是空间均匀性的直接后果. 在 Noether 定理的统一图景里, 动量与能量, 角动量处于完全平行的地位: 能量来自时间均匀性, 动量来自空间均匀性, 角动量来自空间各向同性. 这些守恒律不依赖具体的相互作用形式, 因而是最可靠, 最普遍的物理规律. 本讲的动量算符与平移算符随后续课程的展开, 将作为旋转与角动量理论的对照物继续使用: 平移群是 Abel 群, 其生成元两两对易; 旋转群是非 Abel 群, 其生成元满足 $\left[\hat{J}_i, \hat{J}_j\right] = \mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k$. 两组结构的差异直接决定了动量与角动量守恒性质在数学形式上的不同.