

Special Relativity

狭义相对论

Version 2026.8.6

容与

https://rongyu221104.github.io/

rongyu221104@163.com

Typeset with LaTeX

目录

1 3-狭义相对论 **5**

1.1 狭义相对论时空的 3-表述 5

1.1.1 基本原理 5

1.1.2 事件的时空间隔 5

1.1.3 Lorentz 变换 6

1.1.4 速度变换 6

1.2 时空效应 7

1.2.1 光锥与时空关系 7

1.2.2 因果关系的绝对性 7

1.2.3 同时的相对性 7

1.2.4 钟慢效应 8

1.2.5 尺缩效应 8

1.3 3-狭义相对论动力学 9

1.3.1 四维速度矢量 9

2 Minkowski 时空 **10**

2.1 基本物理模型 10

2.2 时空变换 12

2.2.1 Poincaré 变换与 Poincaré 群 12

2.2.2 Lorentz 变换 13

2.2.3 伪转动 13

2.3 典型效应 14

2.3.1 同时的相对性 14

2.3.2 尺缩 14

2.3.3 钟慢 15

2.3.4 双生子佯谬 15

2.3.5 车库佯谬 15

2.4 * 时空的 $3+1$ 分解 15

2.4.1 诱导度规与投影张量 15

2.4.2 4-矢量场的 $3+1$ 分解 16

2.5 时空因果结构 16

3 4-狭义相对论动力学 **17**

3.1 三维物理量 . . . 17

3.2 四维物理量 . . . 17

3.2.1 4-速度 . . . 17

3.2.2 4-动量 . . . 18

3.2.3 4-加速度 . . . 19

3.2.4 4-力 . . . 20

3.3 相对论质点的运动方程 . . . 20

3.3.1 Newton 形式 . . . 20

3.3.2 Lagrange 形式 . . . 21

3.3.3 Hamilton 形式 . . . 21

3.3.4 Hamilton-Jacobi 形式 . . . 21

3.4 连续介质动力学 . . . 21

3.4.1 连续介质的能量-动量张量 . . . 21

3.4.2 4-动量密度 . . . 22

3.4.3 4-动量流密度 . . . 22

3.4.4 能量、3-动量、角动量的守恒律 . . . 22

3.4.5 由变分原理导出能量-动量张量 . . . 22

3.5 流体动力学 . . . 22

3.5.1 流体的 4-流速场与共动参考系 . . . 22

3.5.2 理想流体的能量-动量张量 . . . 22

4 电动力学 **24**

4.1 4-电磁物理量 . . . 24

4.1.1 电磁场张量 . . . 24

4.1.2 4-电流密度 . . . 25

4.1.3 4-Lorentz 力 . . . 26

4.1.4 电磁能量-动量张量 . . . 26

4.1.5 4-势 . . . 26

4.2 Maxwell 场方程 . . . 27

4.3 电磁波 . . . 28

4.3.1 电磁波方程 . . . 28

4.3.2 4-波矢 . . . 29

4.3.3 电磁波的类光性 . . . 29

4.3.4 Doppler 效应 29
4.4 电磁场中的分析力学 29
4.4.1 Lagrange 29
4.4.2 Hamilton 29
4.4.3 Hamilton-Jacobi 29

5 统计力学 **30**

符号约定

凡平直时空中的物理学, 即为狭义相对论.

单位制

3-狭义相对论部分采用国际单位制 (SI)

4-狭义相对论部分采用几何单位制 (取光速 $c=1$) 与 Gauss 单位制.

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\to 1$$

$$\varepsilon_0\to\frac{1}{4\pi}$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi}$$

$$\mu_0\to\frac{4\pi}{c^2}$$

度规

采用西海岸约定, 即 $(\eta_{ab})=\mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)$.

指标

1. 拉丁字母 $i,j,k,l,\cdots$ 表示标识指标, 不遵循 Einstein 求和约定;
2. 希腊字母 $\mu,\nu,\kappa,\lambda,\rho,\sigma,\cdots$ 表示时空坐标分量指标, 遵循 Einstein 求和约定, 取值 $0,1,2,3$;
3. 希腊字母 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots$ 表示空间分量指标, 遵循 Einstein 求和约定, 取值 $1,2,3$.
4. 拉丁字母 $a,b,c,d,\cdots$ 表示 Penrose 抽象指标, 遵循 Einstein 求和约定, 不取值.

1 3-狭义相对论

1.1 狭义相对论时空的 3-表述

1.1.1 基本原理

Post. 1 狭义相对性原理

所有惯性参考系平权, 物理定律在所有惯性参考系中表达形式相同.

Post. 2 光速不变原理

真空中光速相对于任何惯性参考系均为常量 c, 与光源和观察者的运动状态无关.

1.1.2 事件的时空间隔

Def. 1 事件

在一个特定时间与特定空间位置发生的物理现象, 也称为一个时空点, 需要用 (t,x,y,z) 四个坐标参数描述.

Def. 2 时空间隔

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \tag{1.1}$$

Thm. 1 时空间隔不变性

设事件 p_1 在惯性系 $\mathscr{R}$ 中的时空坐标为 (t_1,x_1,y_1,z_1), 在 $\mathscr{R}'$ 中为 (t_1',x_1',y_1',z_1'), 事件 p_2 在 $\mathscr{R}$ 中为 (t_2,x_2,y_2,z_2), 在 $\mathscr{R}'$ 中为 (t_2',x_2',y_2',z_2'). $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{R}'$ 中 p_1,p_2 的间隔分别为

$$\begin{cases} \Delta s^2 = c^2(t_1-t_2)^2 - (x_1-x_2)^2 - (y_1-y_2)^2 - (z_1-z_2)^2 \\ \Delta s'^2 = c^2(t_1'-t_2')^2 - (x_1'-x_2')^2 - (y_1'-y_2')^2 - (z_1'-z_2')^2 \end{cases} \tag{1.2}$$

于是有

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2 \tag{1.3}$$

即, 两个事件的间隔在惯性系变换下不变.

Rmk 时空间隔不变性即光速不变原理的数学表示.

1.1.3 Lorentz 变换

Thm. 2 Lorentz 变换

设惯性系 $\mathscr{R}'$ 相对于另一惯性系 $\mathscr{R}$ 以速率 v 运动, 选取相对运动方向为 x 轴, 则有狭义相对论时空中的坐标变换关系

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ 称为 Lorentz 因子.

Cor. 1 Lorentz 逆变换

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{v}{c^2}x'\right) \end{cases} \tag{1.5}$$

Pf 由狭义相对性原理, 作变换 $(t, x, y, z) \leftrightarrow (t', x', y', z')$, $v \to -v$ 即可得到逆变换关系.

1.1.4 速度变换

Thm. 3 速度变换

定义粒子相对于惯性系 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{R}'$ 的速度分量为

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \qquad u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} \quad u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} \quad u'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} \tag{1.6}$$

速度分量的变换关系为

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)} \qquad u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{vu_x}{c^2}\right)} \tag{1.7}$$

Cor. 2 速度逆变换

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \qquad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}\right)} \qquad u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}\right)} \tag{1.8}$$

1.2 时空效应

1.2.1 光锥与时空关系

1.2.2 因果关系的绝对性

Thm. 4 因果的绝对性

因果关系是绝对的.

设在参考系 $\mathscr{R}$ 中事件 p_1 为因, p_2 为果, 即 $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$. 则在另一参考系 $\mathscr{R}'$ 中这种因果关系依然成立, 即 $\Delta t' > 0$. 在任何参考系下, 果 p_{effect} 均在因 p_{cause} 的绝对未来之中.

Pf 考虑任意参考系变换 $\mathscr{R} \to \mathscr{R}'$, 可将其分解为无数个惯性系变换 $\mathscr{R}_i \to \mathscr{R}_{i+1}$, 于是有

$$\Delta t'_i = \gamma_i\left(\Delta t_i - \frac{v_i}{c^2}\Delta x_i\right) = \gamma_i\left(1 - \frac{u_i v_i}{c^2}\right)\Delta t_i \tag{1.9}$$

其中 $u_i = \dfrac{\Delta x_i}{\Delta t_i}$. 由于 $\gamma_i, (1 - u_i v_i/c^2), \Delta t_i > 0$, 从而 $\Delta t'_i > 0$, 于是 $\Delta t'_{\text{total}} = \sum\limits_i \Delta t'_i > 0$.

Cor. 3 相互作用的最大传播速度

相互作用的最大传播速度即为真空中光速 c. 若果 p_{effect} 与因 p_{cause} 间以某一作用相联系, 该作用不可能超光速.

Pf 由于 p_{effect} 在 p_{cause} 的绝对未来, 即上半光锥中, 二者间隔 $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta \boldsymbol{x}^2 > 0$, 则作用的速度 $u = \dfrac{|\Delta \boldsymbol{x}|}{\Delta t} < c$.

1.2.3 同时的相对性

Lem. 1 时钟的校准

Thm. 5 同时的相对性

同时关系是相对的.

设在参考系 $\mathscr{R}$ 中事件 p_1 与 p_2 同时发生, 即 $\Delta t = 0$, 则其间隔 $\Delta s^2 = -\Delta \boldsymbol{x}^2 < 0$ 类空,

p_1, p_2 必然没有因果关系, 从而没有绝对的时序要求, 在另一参考系 $\mathscr{R}'$ 中观测, $\Delta t'$ 可正可负可零.

Pf 由 Lorentz 变换, $\Delta t' = \gamma_v \left(\Delta - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = -\gamma_v \frac{v \Delta x}{c^2}$. 若 $v \neq 0$, v 与 x 同向则 $\Delta t' < 0$, 反向则 $\Delta t' > 0$. $v = 0$ 则 $\Delta t' = 0$.

1.2.4 钟慢效应

Def. 3 固有时

固有时 $\Delta \tau$ 为物体的静止参考系中测得的时间.

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta \tau^2 \tag{1.10}$$

物体的固有时不依赖于参考系的选择, 参考系仅具有坐标时 Δt.

Thm. 6 动钟延缓效应

设惯性系 $\mathscr{R}'$ 相对于惯性系 $\mathscr{R}$ 以速度 v 运动, 事件 p_1, p_2 在 $\mathscr{R}'$ 中的固有时为 $\Delta \tau$, 则在 $\mathscr{R}$ 中测得的坐标时为

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{1.11}$$

$\Delta t = \gamma_v \Delta \tau > \Delta \tau$, 即动钟延缓.

Pf 由间隔不变性, $c^2 \Delta \tau^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \boldsymbol{x}^2$, 令 $v = \dfrac{|\Delta \boldsymbol{x}|}{\Delta t}$, 则有 $\Delta t = \gamma_v \Delta \tau$.

Prop. 1 钟慢效应的相对性

Thm. 7 双生子佯谬

惯性运动物体的固有时最大.

1.2.5 尺缩效应

Def. 4 固有长度

设惯性系 $\mathscr{R}'$ 为物体的静止参考系, $\mathscr{R}'$ 中测得的物体长度 $l_0 = |\Delta x'|$ 称为固有长度, 不依赖于参考系的选择.

Thm. 8 动尺缩短效应

若在惯性系 $\mathscr{R}$ 中, 物体一端经过 x_1 与另一端经过 x_2 同时, 即 $\Delta t = 0$, 则定义 $\mathscr{R}$ 观测得的物体长度为 $l = |\Delta x| = |x_2 - x_1|$, 满足

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{1.12}$$

$l = l_0/\gamma_v < l_0$, 即动尺缩短.

Pf $l_0 = |\Delta x'| = \gamma_v|\Delta x - v\Delta t| = \gamma_v l$.

Cor. 4 体积收缩

设 V_0 为物体在其静止参考系测得的体积, 称为固有体积. 若物体相对于惯性系 $\mathscr{R}$ 以速度 v 运动, 则在 $\mathscr{R}$ 中观测得的体积为

$$V = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}V_0 < V_0 \tag{1.13}$$

1.3 3-狭义相对论动力学

1.3.1 四维速度矢量

Def. 5 四维速度矢量

四维速度矢量的分量为

$$U^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{1.14}$$

$$(U^\mu) = \gamma(c, \boldsymbol{u}) \tag{1.15}$$

2 Minkowski 时空

Einstein 提出狭义相对论 (1905) 后, 其数学老师 Minkowski 为狭义相对论构建了一个几何框架 (1907-1908), 即 Minkowski 时空, 将时间与空间完全统一于一个 4 维连续统中.

2.1 基本物理模型

Def. 1 时空

所有可能事件的集合, 构成一个 4 维流形, SR 中为平直的 4 维 Lorentz 流形, 称为 Minkowski 时空, 记作 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$.

Def. 2 世界线

一条 Minkowski 时空中的, 代表一个粒子的全部历史的, 连续且未来方向的曲线.

Def. 3 粒子

在时空中运动的, 具有一系列物理属性的物体, 其全部历史由世界线描述.

1. 光子: 无质量, 以光速运动的粒子, 世界线为类光曲线.
2. 质点: 有静止质量, 运动速度不超过光速的粒子, 世界线为类时曲线.

Def. 4 观者

可进行物理观测的质点, 配备有标准钟与空间局部坐标系, 可对其世界线上的事件进行直接观测, 赋予该事件一个时空坐标, 即对事件的一个参数化.

Def. 5 标准钟与固有时

对于世界线上任意两个事件 p_1, p_2, 若时钟读数之差等于世界线线长, 即

$$\Delta\tau = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{-\mathrm{d}s^2} \tag{2.1}$$

则称其为标准钟. 标准钟的示数为固有时, 一般情况以固有时 τ 来参数化世界线.

Def. 6 参考系

观者世界线的线汇. 一个参考系可以给时空中每一个事件均赋予一个时空坐标 (t, x, y, z), 该全时空的赋值行为即一个坐标映射 ϕ.

Def. 7 时空坐标系

即 $\{(t,x,y,z)\}$ 或 $\{x^\mu\}$. Minkowski 时空 M 可以由一个覆盖全时空的坐标卡 (M,ϕ) 参数化, 其中 $\phi: M \to \mathbb{R}^4$ 为一个参考系对时空中每一点赋予坐标的映射, 因此可建立全局坐标系. 其中 t 称为坐标时.

Def. 8 固有时与坐标时

设粒子运动速率为 $v = \dfrac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}}{\mathrm{d}t}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma > 1 \tag{2.2}$$

$$\mathrm{d}\tau^2 = -\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 = (1-v^2)\,\mathrm{d}t^2$$

Def. 9 惯性参考系

由均为平行类时测地线 (直线) 的观者世界线所构成的参考系, 简称惯性系. 由惯性系生成的坐标系为惯性坐标系, 又称 Lorentz 坐标系.

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}=0}_{\text{直线方程}} \xLeftrightarrow{\Gamma^\mu_{\nu\kappa}=\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}(\partial_\nu\eta_{\lambda\kappa}+\partial_\kappa\eta_{\lambda\nu}-\partial_\lambda\eta_{\nu\kappa})=0} \underbrace{\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}+\Gamma^\mu_{\nu\kappa}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}\tau}=0}_{\text{测地线方程}}$$

1. 钟同步: 惯性观者 A 在其固有时为 τ_1 时刻发给 B 一个光信号, B 在其固有时为 τ' 时刻收到光信号并反射给 A, A 在其固有时为 τ_2 时刻收到光信号, 令 $\tau' = \dfrac{\tau_1+\tau_2}{2} = 0$, 则实现同一惯性系的两个观者的钟同步. 将该校准方法推广至任意两个观者, 则可实现全惯性系的钟同步.

2. 瞬时观者

等长线:时空中等长线为双曲线

物理模型	物理意义	几何对象
事件	在一个特定时间与特定空间位置发生的物理现象	一个时空点
时空	所有可能事件的集合	一个 4 维光滑 Lorentz 流形, SR 中为整体平直的, 且可由单一坐标卡 (M, ϕ) 参数化, 即微分同胚于 $\mathbb{R}^4$ 的, 称为 Minkowski 时空, 记作 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 或 M
世界线	代表一个粒子的全部历史	一条 Minkowski 时空中的连续且未来方向的曲线
粒子	在时空中运动的, 具有一系列物理属性的物体, 其全部历史由世界线描述	一个轨迹由一条非类空的曲线描述的几何点

2.2 时空变换

2.2.1 Poincaré 变换与 Poincaré 群

光速不变原理要求 Minkowski 时空中的变换保持时空间隔 $\mathrm{d}s$ 与度规 η_{ab} 不变, 满足时空间隔不变的等距变换称为 Poincaré 变换. 由 Poincaré 变换构成的等距变换群称为 Poincaré 群, 其构成一个 10 维的 Lie 群. Poincaré 群分为齐次与非齐次两部分, 其齐次部分称为 Lorentz 群, 构成一个 6 维的子 Lie 群. Poincaré 群可分解为十个 1 维的单参等距群, 分别对应 Minkowski 时空的十个对称性 (时间平移, 空间平移, 空间转动, 伪转动). 10 个单参等距群可各自诱导出一个 Killing 场, 这十个独立的 Killing 场分别为

$$\partial_t \quad \partial_x \quad \partial_y \quad \partial_z \tag{2.3}$$

$$x\partial_y - y\partial_x \quad y\partial_z - z\partial_y \quad z\partial_x - x\partial_z \tag{2.4}$$

$$t\partial_x + x\partial_t \quad t\partial_{xy} + y\partial_t \quad t\partial_z + z\partial_t \tag{2.5}$$

时空变换	是否同一参考系	物理意义	
时间平移	是	重新设置时钟零点	
空间平移	是	移动空间坐标原点	
空间转动	是	转动空间坐标轴取向	
伪转动	否	从一个惯性系变换到另一个相对匀速运动的惯性系	

2.2.2 Lorentz 变换

Lorentz 变换可由狭义相对性原理、光速不变原理与时间的均匀性、空间的均匀性和各向同性导出, 描述了 Minkowski 时空中一个事件在两个惯性系中被赋予的时空坐标的变换关系.

设事件在惯性系 $\mathscr{R}$ 中的坐标为 (t,x), 在惯性系 $\mathscr{R}'$ 中坐标为 (t',x'), $\mathscr{R}'$ 相对 $\mathscr{R}$ 以速度 v 运动

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - vx) \end{cases} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{2.6}$$

Lorentz 变换为 Minkowski 时空中的一种等距变换, 保持时空间隔不变

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu = -(\mathrm{d}x^0)^2 + (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{2.7}$$

2.2.3 伪转动

若 $\mathscr{R}'$ 相对于 $\mathscr{R}$ 以速率 v 沿 x 轴方向匀速运动, 则有坐标变换公式

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - vx) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{2.8}$$

或称 4 维坐标系绕 x 轴双曲转动了 $\varphi = \operatorname{arctanh} v$, 有矩阵形式

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{arccos}\varphi & -\operatorname{arcsin}\varphi & 0 & 0 \\ -\operatorname{arcsin}\varphi & \operatorname{arccos}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

若沿 y 轴或 z 轴运动, 则分别为

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma v & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arccos\varphi & 0 & -\arcsin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\arcsin\varphi & 0 & \arccos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arccos\varphi & 0 & 0 & -\arcsin\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\arcsin\varphi & 0 & 0 & \arccos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

时空图上伪转动表示为

2.3 典型效应

唯有内禀几何量 (世界线线长, 固有时, $\cdots$) 不依赖于参考系, 得出的结论是绝对的, 非几何对象 (长度, 时间间隔, $\cdots$) 依赖于参考系, 得出的结论是相对的.

2.3.1 同时的相对性

Minkowski 时空中, 两个事件的同时性, 是依赖于观测这两个事件的惯性系的.

选定一个惯性系 $\mathscr{R}$, 即可定义一个全时空的光滑函数 $t : M \to \mathbb{R}$, 称为坐标时间函数. 设在 $\mathscr{R}$ 中事件 A 发生的时间为 $t(A) = t_A$, 则 $t = t_A$ 给出了 Minkowski 时空中的一张超曲面, 称为同时面 Σ_{t_A}, 若 $B \in \Sigma_{t_A}$, 则称在 $\mathscr{R}$ 中 A 与 B 同时发生. 若另一个惯性系 $\mathscr{R}'$ 定义了一个不同的坐标时间函数 t', 则其定义的同时面 $\Sigma'_{t'_A}$ 也不同, 于是 A 与 B 在 $\mathscr{R}'$ 中可能不同时发生. 因此同时是相对的, 是依赖于参考系的选取的.

2.3.2 尺缩

定义在某一个参考系测得尺的长度, 为某一同时面与尺的世界面的截线段的长度.

设 $\mathscr{R}'$ 相对于 $\mathscr{R}$ 以速率 v 沿 x 轴方向匀速运动, 相对于 $\mathscr{R}$ 静止的, 在 $\mathscr{R}$ 测得 x 方向长为 L 的尺, 在 $\mathscr{R}'$ 测得 x' 方向长为 L', 有

$$\frac{L}{L'} = \frac{1}{\gamma} \tag{2.12}$$

2.3.3 钟慢

2.3.4 双生子佯谬

双生子佯谬

有一对双生子, A 守在家中, 做惯性运动, B 星际旅行. 当 B 返回家时, 发现 A 比自己更年老.

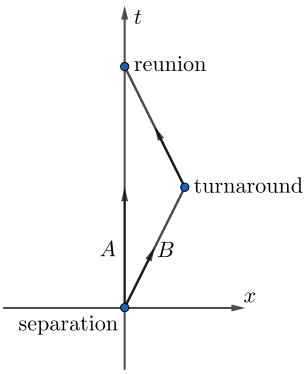


图 1: Twin Paradox

2.3.5 车库佯谬

车库佯谬

车与库静长相等, 车匀速入库时, 司机认为动库收缩, 车放不下, 司库认为动车收缩, 入库有余. 二者的想法在各自的惯性系都正确.

2.4 * 时空的 3 + 1 分解

2.4.1 诱导度规与投影张量

3 维空间是 4 维 Minkowski 时空中的一张超曲面, Minkowski 度规 η_{ab} 在空间上生成的诱导度规为 Euclid 度规 δ_{ab}, 满足 $\forall v^a, u^a \in \Gamma(\mathrm{T}\Sigma_t)$

$$\delta_{\mu\nu} v^\mu u^\nu = \eta_{\mu\nu} v^\mu u^\nu \tag{2.13}$$

$$(h_{\mu\nu}) \xlongequal{(\mathrm{d}t)_a(\partial_t)^a=-1} (\eta_{\mu\nu}) + ((\mathrm{d}t)_\mu (\mathrm{d}t)_\nu) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

2.4.2 4-矢量场的 $3+1$ 分解

Thm. 1 4-矢量场的 $3+1$ 分解

空间矢量 v^a 是依赖于参考系的. 选定参考系 $\mathscr{R}$, 对于任意 4-矢量场 $V^a \in \Gamma(\mathrm{T}M)$, 其对应的空间矢量场 $v^a \in \Gamma(\mathrm{T}\Sigma_t)$ v^a 满足

$$\eta_{ab} Z^a v^b = 0 \tag{2.14}$$

即在该瞬时惯性坐标系下的分量为 $(0, \boldsymbol{V})$

$$V^a = h^a{}_b V^b - (Z_b V^b) Z^a \tag{2.15}$$

其中 $h^a{}_b V^b$ 为空间部分, $-Z_b V^b$ 为时间分量.

2.5 时空因果结构

3 4-狭义相对论动力学

相对性原理要求物理定律的数学表达式满足 Lorentz 协变性.

3.1 三维物理量

1. 速率

$$u = \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}}{\mathrm{d}t} \tag{3.1}$$

2. 动量

$$\boldsymbol{p} = m_u \boldsymbol{u} = \gamma_u m_0 \boldsymbol{u} = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2}} \boldsymbol{u} \tag{3.2}$$

3. 动能

$$E_{\mathrm{k}}(u) = m_u - m_0 \tag{3.3}$$

$$\xRightarrow{\text{SI}} m_u c^2 = E_{\mathrm{k}} + m_0 c^2 \quad (\text{总能} = \text{动能} + \text{静能}) \tag{3.4}$$

4. 能量守恒式: 取守恒量 $E = m_u c^2$ 与不变量 $m = m_0$, 则有

$$E = E_{\mathrm{k}} + mc^2 \quad (\text{SI}) \tag{3.5}$$

3.2 四维物理量

3.2.1 4-速度

Def. 1 4-速度

4-速度为质点世界线的切矢量

$$U^a = (\partial_\tau)^a \tag{3.6}$$

Prop. 1 4-速度的性质

质点的 4-速度是未来方向的, 且是归一的

$$U_\mu U^\mu = \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1 \tag{3.7}$$

Prop. 2 3-速度的观测

只需要惯性系 $\mathscr{R}$ 中世界线经过 p 的观者在 p 处的 4-速度 $Z^a \in \mathrm{T}_p M$, 即瞬时观者 (p, Z^a), 则可观测某一具有 4-速度 U^a 的质点, 在时空点 p 处的 3-速度 $u^a \in \mathrm{T}_p \Sigma_t$

$$u^a = \frac{h^a{}_b U^b}{\gamma} \tag{3.8}$$

其中

$$h^a{}_b = \delta^a{}_b + Z^a Z_b \tag{3.9}$$

Prop. 3 4-速度的 $3+1$ 分解

$$U^a = \gamma(Z^a + u^a) \tag{3.10}$$

$$(U^a) = \gamma(1, u^1, u^2, u^3) \tag{3.11}$$

3.2.2 4-动量

Def. 2 4-动量

设质点的静质量为 m, 4-速度为 U^a, 则 4-动量为

$$P^a = mU^a \tag{3.12}$$

Prop. 4 4-动量的 $3+1$ 分解

可借瞬时观者 (p, V^a) 作 3+1 分解

$$P^a = EZ^a + p^a \tag{3.13}$$

Thm. 1 能量-动量三角形关系

由 4-动量的缩并可得

$$E^2 = m^2 + \boldsymbol{p}^2 \tag{3.14}$$

3.2.3 4-加速度

Def. 3 4-加速度

设一个质点在 p 处的 4-速度为 U^a, 则其 4-加速度为

$$A^a = U^b \partial_b U^a \tag{3.15}$$

其中 ∂_b 为 Minkowski 时空中的依赖于惯性坐标系的普通导数算符.

Thm. 2 自由质点

关于自由质点的以下表述等价:

1. 质点的 4-加速度为零.
2. 质点的世界线满足测地线方程

$$A^a = U^b \partial_b U^a = 0 \tag{3.16}$$

   即其世界线为一条测地线.

3. 质点做惯性运动.

Prop. 5 4-速度与 4-加速度的正交关系

设质点的 4-速度为 U^a, 4-加速度为 A^a, 则在世界线上任意一点处其缩并

$$U_a A^a = 0 \tag{3.17}$$

Pf $U_a A^a = \eta_{ab} U^a A^b = \eta_{ab} U^a U^c \partial_c U^b = \frac{1}{2} U^c \partial_c \underbrace{(\eta_{ab} U^a U^b)}_{=-1} = 0$

Def. 4 3-加速度

在惯性坐标系 $\{t, x^\alpha\}$ 中, 3-速度为 u^a 的质点的 3-加速度为

$$a^a = (\partial_\alpha)^a \frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} \tag{3.18}$$

3.2.4 4-力

Def. 5 4-力

设质点的 4-速度为 U^a, 4-加速度为 A^a, 则其所受的 4-力为

$$F^a = U^b \partial_b P^a \tag{3.19}$$

Prop. 6 4-力与 4-加速度的关系

若质点的静质量为常数, 即 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau} = 0$, 则有

$$F^a = mA^a \tag{3.20}$$

Prop. 7 4-力的 $3+1$ 分解

对于 $m = \text{Const}$ 的质点, 设其在惯性坐标系 $\{x^\mu\} = \{(t, x^\alpha)\}$ 中, 3-速度为 u^a, 受力 f^a, 则

$$F^\mu = (\gamma f_\alpha u^\alpha, \gamma f^\alpha) \tag{3.21}$$

$$F^a = \gamma \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} Z^a + \gamma f^a \tag{3.22}$$

其中 $f_\alpha u^\alpha = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u} = \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$ 为功率.

1. **定义**:
2. :
3. :

3.3 相对论质点的运动方程

3.3.1 Newton 形式

$$\frac{\mathrm{d}P^a}{\mathrm{d}\tau} = F^a \tag{3.23}$$

3.3.2 Lagrange 形式

3.3.3 Hamilton 形式

3.3.4 Hamilton-Jacobi 形式

3.4 连续介质动力学

3.4.1 连续介质的能量-动量张量

能量-动量张量统一描述了物质场能量与动量的分布与流动.

1. **对称性**

$$T_{ab} = T_{ba} \tag{3.24}$$

2. **协变守恒律**

$$\partial^a T_{ab} = 0 \tag{3.25}$$

3. **分量**:由 $(p, (e_\mu)^a)$ 测得的能量-动量张量的分量矩阵为

$$(T_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \mu & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_1 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ w_2 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ w_3 & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

   (a) **能量密度**

$$\mu = T_{ab} Z^a Z^b = T_{00} \tag{3.27}$$

   (b) **能流密度与 3-动量密度**

$$w_\alpha = -T_{ab} Z^a (e_\alpha)^b = -T_{0\alpha} = -T_{ba} Z^a (e_\alpha)^b = -T_{\alpha 0} \tag{3.28}$$

   (c) **3-动量流密度与 3-应力张量**

$$\sigma_{\alpha\beta} = T_{ab} (e_\alpha)^a (e_\beta)^b = T_{\alpha\beta} \tag{3.29}$$

3.4.2 4-动量密度

(p, Z^a) 观测得的 4-动量密度为

$$W^a = -T^a_{\ b} Z^b \tag{3.30}$$

3.4.3 4-动量流密度

3.4.4 能量、3-动量、角动量的守恒律

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{w} = 0 \tag{3.31}$$

$$\partial^a T_{ab} \Longrightarrow \partial_a W^a = 0 \tag{3.32}$$

3.4.5 由变分原理导出能量-动量张量

3.5 流体动力学

3.5.1 流体的 4-流速场与共动参考系

1. 将流体中宏观小微观大的一个微元, 视作一个流体质点 p, 其 4-速度即其世界线的切矢量 $U^a|_p = (\partial_\tau)^a$.

2. 对流体的每个质点均定义一个 4-速度, 则可得到流体的 4-流速场, 即该流体的一个切场.

3. 设流体的 4-流速场为 U^a, 若在 p 处的观者满足 $Z^a = U^a|_p$, 则称 (p, Z^a) 为该流体质点的共动观者.

4. 若参考系的每一个观者均是流体的共动观者, 则称该参考系为共动参考系.

3.5.2 理想流体的能量-动量张量

设流体的 4-流速场为 U^a, 则能量-动量张量为

$$T_{ab} = (\mu + p) U_a U_b + p \eta_{ab} \tag{3.33}$$

的物质场称为理想流体. 在共动参考系下的分量矩阵为

$$(T_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

其中 $\mu = T_{ab}Z^aZ^b$ 为共动参考系下的能量密度, 称为固有能量密度

4 电动力学

4.1 4-电磁物理量

4.1.1 电磁场张量

Def. 1 电磁场张量

Minkowski 时空中的电磁场由电磁场张量 F_{ab} 描述. F_{ab} 为满足 Maxwell 场方程的 2-形式场.

$$F_{ab} = F_{[ab]} \tag{4.1}$$

Def. 2 电场 1-形式与磁场 1-形式

瞬时观者 (p, Z^a) 观测到的电磁场的场量, 由电场 1-形式 E_a 与磁场 1-形式 B_a 描述.

$$E_a = F_{ab}Z^b \tag{4.2}$$

$$B_a = -(\star F)_{ab}Z^b \tag{4.3}$$

Prop. 1 电磁场张量的分量

电磁场张量在 $\{(e_\mu)^a\}$ 下的分量矩阵为

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

$$F_{\mu\mu} = -F_{\mu\mu} = 0$$

$$F_{\alpha 0} = F_{ab}(e_\alpha)^a(e_0)^b = E_a(e_\alpha)^a = E_\alpha \quad F_{0\alpha} = F_{ab}(e_0)^a(e_\alpha)^b = -F_{ba}(e_0)^a(e_\alpha)^b = -E_b(e_\alpha)^b$$

$$B_\alpha = B_a(e_\alpha)^a = -(\star F)_{ab}(e_0)^b(e_\alpha)^a = -\frac{1}{2}F^{cd}\varepsilon_{cdab}(e_0)^b(e_\alpha)^a = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu 0\alpha}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} B_1 = \frac{1}{2}(F^{23}\underbrace{\varepsilon_{2301}}_{=1} + F^{32}\underbrace{\varepsilon_{3201}}_{=-1}) = F_{23} \\ B_2 = \frac{1}{2}(F^{31}\underbrace{\varepsilon_{3102}}_{=1} + F^{13}\underbrace{\varepsilon_{1300}}_{=-1}) = F_{31} \\ B_3 = \frac{1}{2}(F^{12}\underbrace{\varepsilon_{1203}}_{=1} + F^{21}\underbrace{\varepsilon_{2103}}_{=-1}) = F_{12} \end{cases}$$

4.1.2 4-电流密度

Post. 1 电荷量的 Lorentz 不变性

带电粒子的电荷量与运动状态无关, 电荷量 Q 是一个 Lorentz 标量.

Def. 3 固有电荷密度

设总电荷量 Q 的连续带电体的固有体积为 V_0, 则其固有电荷密度为

$$\rho_0 = \frac{Q}{V_0} \tag{4.5}$$

若构成该带电体的带电粒子的电荷量均为 e, 固有数密度为 n_0, 则带电体的固有电荷密度为

$$\rho_0 = en_0 \tag{4.6}$$

Prop. 2 运动带电体的电荷密度

设构成该带电体的带电粒子均以 4-速度 U^a 运动, 则其体积收缩为 V_0/γ, 于是电荷密度增大为

$$\rho = \gamma\rho_0 \tag{4.7}$$

Def. 4 4-电流密度

设固有电荷密度 ρ_0, 则 4-电流密度为

$$J^a = \rho_0 U^a \tag{4.8}$$

Prop. 3 4-电流密度的 $3+1$ 分解

瞬时观者 (p, Z^a) 测得的 4-电流密度可分解为

$$J^a = \rho Z^a + j^a \tag{4.9}$$

分量为

$$(J^\mu) = (\rho_0, \boldsymbol{j}) \tag{4.10}$$

SI: $(J^\mu) = (c\rho, \boldsymbol{j})$.

Pf $J^a = \rho_0 U^a = \rho_0\gamma(Z^a + u^a) = \rho Z^a + j^a$.

Law. 1 4-电荷守恒定律

$$\partial_a J^a = 0 \tag{4.11}$$

Pf $\partial_a J^a = \partial_0 J^0 + \partial_\alpha J^\alpha = \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla \cdot j} = 0.$

4.1.3 4-Lorentz 力

Def. 5 4-Lorentz 力

电荷量为 q, 4-速度为 U^a 的带电质点在电磁场 F_{ab} 中所受 4-Lorentz 力为

$$F^a = qF^a{}_b U^b \tag{4.12}$$

Pf $F^a = qF^a{}_b \gamma(Z^b + u^b) = \gamma q(\underbrace{F^a{}_b Z^b}_{=E^a} + F^a{}_b u^b) \Longrightarrow f^\alpha = qE^\alpha + qF^\alpha{}_b u^b.$

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B})_c = \varepsilon^{ab}{}_c u_a B_b = -\varepsilon^{ab}{}_c u_a (\star F)_{bd} Z^d =$$

$$\Longrightarrow f^\alpha = qE^\alpha + q(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B})^\alpha$$

Def. 6 4-Lorentz 力密度

$$\mathcal{F}_a = F_{ab} J^b \tag{4.13}$$

4.1.4 电磁能量-动量张量

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}\eta_{ab}F_{cd}F^{cd}\right) = \frac{1}{8\pi}\left[F_{ac}F_b{}^c + (\star F)_{ac}(\star F)_b{}^c\right] \tag{4.14}$$

$$\partial^a T_{ab} = \tag{4.15}$$

4.1.5 4-势

Lem. 1 d'Alembert 算符的 Lorentz 不变性

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \partial^a \partial_a \tag{4.16}$$

Def. 7 4-势

由 $\mathrm{d}F = 0$, 可知电磁场张量是闭的, 在全 Minkowski 时空中是恰当的, 因此存在势. 用 4-势 A_a 可将 F_{ab} 表示为

$$F_{ab} = (\mathrm{d}A)_{ab} = 2\partial_{[a}A_{b]} \tag{4.17}$$

Thm. 1 规范不变性

对于任意 C^2 标量场 χ, 4-势 A_a 与

$$\tilde{A}_a = A_a + (\mathrm{d}\chi)_a \tag{4.18}$$

决定同一个电磁场, 即 $\tilde{F}_{ab} = (\mathrm{d}\tilde{A})_{ab} = (\mathrm{d}A)_{ab} + \underbrace{\mathrm{d}^2\chi}_{=0} = F_{ab}$.

Def. 8 Lorenz 规范

$$\partial^a A_a = 0 \tag{4.19}$$

Thm. 2 d'Alembert 方程

$$\Box A^a = \frac{4\pi}{c^2} J^a \tag{4.20}$$

SI: $\Box A^a = \mu_0 J^a$.

Prop. 4 4-势的 $3+1$ 分解

$$A_a = -\phi(\mathrm{d}t)_a + a_a \tag{4.21}$$

分量为

$$(A^\mu) = (\phi, \boldsymbol{a}) \tag{4.22}$$

SI: $(A^\mu) = (\phi/c, \boldsymbol{a})$

4.2 Maxwell 场方程

1. **导数算符表述**:

$$\begin{cases} \partial_{[a}F_{bc]} = 0 \\ \partial^a F_{ab} = -4\pi J_b \end{cases} \tag{4.23}$$

2. **外微分表述**:

$$\begin{cases} \mathrm{d}F = 0 \\ \mathrm{d}{\star}F = 4\pi{\star}J \end{cases} \tag{4.24}$$

3. **等价性证明**

$\nabla_{[a}F_{bc]} = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{d}F = 0$:

$$(\mathrm{d}F)_{abc} = 3\nabla_{[a}F_{bc]} = 0$$

$\mathrm{d}{\star}F = 4\pi{\star}J \Longleftrightarrow \partial^a F_{ab} = -4\pi J_b$:

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}{\star}F)_{abc} &= 3\nabla_{[a}({\star}F)_{bc} = \frac{3}{2}\nabla_{[a}\varepsilon_{bc]de}F^{de} = 4\pi({\star}J)_{abc} = 4\pi J^f\varepsilon_{fabc} \\ \Longleftrightarrow -4\pi J^f &= \frac{3}{2}\nabla_{[a}\varepsilon_{[bc]]de}\varepsilon^{fabc}F^{de} = \frac{1}{2}(\nabla_a\varepsilon_{bcde} + \nabla_b\varepsilon_{cade} + \nabla_c\varepsilon_{abde})\varepsilon^{fabc}F^{de} \\ &= -(\nabla_a\delta^{[f}{}_d\delta^{a]}{}_e + \nabla_b\delta^{[f}{}_d\delta^{b]}{}_e + \nabla_c\delta^{[c}{}_d\delta^{f]}{}_e)F^{de} = -\nabla_a F^{[fa]} = \nabla_a F^{af} \\ \Longleftrightarrow \nabla^a F_{ab} &= -4\pi J_b \xLeftrightarrow{\text{in } (\mathbb{R}^4, \eta_{ab})} \partial^a F_{ab} = -4\pi J_b \end{aligned}$$

4. 由协变形式导出 3 维 Maxwell 方程组

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \partial^\alpha E_\alpha = \partial^a E_a = \partial^a(F_{ab}Z^b) = Z^b\partial^a F_{ab} = -4\pi J_b Z^b = -4\pi(\rho\underbrace{Z_aZ^a}_{=-1} + \underbrace{j_aZ^a}_{=0}) = 4\pi\rho \tag{4.25}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = 4\pi\rho \\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = 4\pi\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{4.26}$$

4.3 电磁波

4.3.1 电磁波方程

1. **有源电磁波方程**

$$\partial^a\partial_a A_b = -4\pi J_b \tag{4.27}$$

$$-4\pi J_b = \partial^a(\partial_a A_b - \partial_b A_a) = \partial^a\partial_a A_b - \partial^a\partial_b A_a = \partial^a\partial_a A_b - \partial_b\underbrace{\partial^a A_a}_{=0}$$

2. **无源电磁波方程**

$$\partial^a\partial_a A_b = 0 \tag{4.28}$$

3. **方程的波动解**

$$A_b = C_b \cos\theta \tag{4.29}$$

其中 θ 为实值标量场, 称为相位.

4.3.2 4-波矢

1. **定义**

$$K^a = \partial^a \theta \tag{4.30}$$

2. $3+1$ **分解**

$$K^a = \omega Z^a + k^a \tag{4.31}$$

其中 ω 为角频率, k^a 为 3-波矢

3.

4.3.3 电磁波的类光性

1. 4-波矢是类光矢量场.

$$K^a K_a = 0 \tag{4.32}$$

$$\partial^a \partial_a A_b = \partial^a \partial_a (C_b \cos\theta) = -C_b(\sin\theta \partial^a \partial_a \theta + \cos\theta (\partial^a \theta)\partial_a \theta) \Longrightarrow \begin{cases} \partial^a K_a = 0 \\ K^a K_a = 0 \end{cases}$$

2. 4-波矢的积分曲线, 即光的世界线, 是 Minkowski 时空中的类光测地线.

$$K^a \partial_a K^b = 0 \tag{4.33}$$

3. 等相位面 $\mathcal{S}$ 是类光超曲面.

4.3.4 Doppler 效应

4.4 电磁场中的分析力学

4.4.1 Lagrange

4.4.2 Hamilton

4.4.3 Hamilton-Jacobi

5 统计力学